Departamento de Física Teórica
Universidad Autónoma de Madrid

Autosimilaridad Estadística en Imágenes Naturales

Antonio María Turiel Martínez

Departamento de Física Teórica

Universidad Autónoma de Madrid

Autosimilaridad Estadística en Imágenes Naturales

Memoria de Tesis presentada ante la Facultad de Ciencias, Sección de Físicas, de la Universidad Autónoma de Madrid.

Trabajo dirigido por el *Dr. Néstor Parga Carballeda* en el Departamento de Física Teórica.

Madrid, 13 de Marzo de 1998

por Antonio María Turiel Martínez

Agradecimientos

A mi director de tesis, Néstor Parga, por haberme introducido en este mundo mágico y complejo de la Redes Neuronales. Gracias también por haber confiado en mí y haber aguantado mis “cabezonerías” tanto cuando yo tenía razón como cuando no.

A Elka Kourutcheva, David Renato Carreta Domínguez, Germán Mato y Jean Pierre Nadal, a quienes he tenido el gusto de conocer y también la distinción de colaborar.

A Daniel L. Ruderman, por habernos prestado sus ojos para ver el bosque de Nueva Jersey que sirve de base a esta tesis y empapela la pared de mi despacho.

A Alfonso, Ángela y Ángel, por ser compañeros de fatigas; que por “neuróticos” han podido compartir conmigo las frustraciones de los fracasos y la excitación de los descubrimientos; y que han sufrido mi actitud a veces paternalista, a veces exigente y a veces caótica.

A los miembros de este Departamento de Física Teórica, a algunos de los cuales habré explicado cosa de diez mil veces “aquel problema”. Gracias a todo por su simpatía y paciencia. Pondría aquí una lista, pero sería demasiado extensa.

A la Comunidad de Madrid, por haber financiado a este becario, confiando en mis posibilidades.

A delta, mu, nu, daniel, diana, martin y betelgeuse, sin cuya colaboración y por momentos a pesar de ella este trabajo jamás se habría concluido.

Y también a Calliope, Clio, Erato, Euterpe , Melpomene, Polyhymnia, Terpsichore, Thalia y Uralia (no Urania), por servirme de fuente de inspiración, por obligarme a mejorar mis dotes mecanográficas y hacer que a partir de ahora no haya crucigrama que se me resista.

A Rafa, que tiene la ingrata y poco reconocida tarea de poner orden en medio del caos, con más voluntad que medios.

A Lena, quien ha dejado un recuerdo indeleble en mi memoria y en mi retina, y una "grandmother cell" para ella sola. Y a lo que la rodea, por dejarse ver.

A mis (sucesivos y en algún momento simultáneos) compañeros de piso Ángel, Carlos, Jesus, Joseba, Luis y Josean, mil gracias por la experiencia de convivir con ellos, y la esperanza de que algún día volvamos a patear juntos naranjas y tomates[1] .

A mis padres, Agustín y Carmen, a los que todo debo. Ésa es una cuenta que nunca se puede saldar.

A mi tía Consuelo, por su cariño e incondicional apoyo.

A mis hermanos, a Agustín, Carmen, Nuria, María Jesús, Jose María, Eduardo, Oscar y Javier; a los ocho, de quien tantas veces he hablado a quien quería saberlo y a quien no le interesaba lo más mínimo. Y a mis hermanos políticos, Yolanda y Julio, por enriquecer mi gran familia.

A Montse, por ser la única que ha elegido aguantarme, a mí y a mis Redes Neuróticas. Por ofrecerse a reseguir a mano la foto de Lena y mejor que mi programa. Per el seu somriure i la seva fe en mi.

Madrid, Marzo de 1998.

[1]Véase Ángel M. Uranga *"Nuevos vacíos heteróticos en cuatro dimensiones con supersimetría $N = 1$ y $N = 2$"*. Tesis Doctoral presentada en el Departamento de Física Teórica, UAM. Enero 1997

Índice General

Índice de Figuras

Capítulo 1

Introducción

1.1 Presentación

La presente tesis es un estudio detallado de las propiedades estadísticas de las imágenes naturales, con un especial énfasis en las llamadas propiedades de **Autosimilaridad**. Se trata de investigar las regularidades que presentan las imágenes que captamos del mundo, para poder explicar cómo se ha adaptado nuestro sistema visual para interpretarlas.

El trabajo ha sido desarrollado dentro del Grupo de Neurocomputación del Departamento de Física Teórica de la Universidad Autónoma de Madrid, cuyos intereses fundamentales son el estudio y la modelización de sistemas biológicos. No obstante, no es el objetivo del presente texto explicar las experiencias psicofísicas y fisiológicas acerca de la visión primaria de los mamíferos, sino definir las propiedades *a priori* del mundo visual. Es éste un necesario e ineludible paso previo si uno quiere llegar a entender los mecanismos de la visión.

1.2 Motivación. Tratamiento

La motivación de esta tesis es, pues, fijar las bases de la codificación de las imágenes naturales, pues conocida ésta se podrán saber cuáles han de ser las estrategias óptimas para transmitir y almacenar mensajes con ellas relacionados (ver [1, 2, 3, 4, 5, 6]). El objetivo último será la comprensión de las primeras etapas de la visión en mamíferos, y de las estructuras neuronales que habrán de formarse en la primera corteza visual y antes de ésta para adaptarse a esta señal, y para transferir esta información del modo más eficiente.

Nos vamos a centrar, exclusivamente, en las luminosidades, así que nuestras imágenes serán en blanco y negro. Trabajamos con imágenes naturales, pues no nos interesan, al menos por ahora, las características visuales de una dieta visual sesgada como la que introduce el hombre en sus ambientes. Además, se asume que no hay implicado ningún mecanismo de atención (que implicaría una actividad a alto nivel cortical), por lo que los objetos que aparecen en las escenas no ocupan un lugar distinguido en las mismas.

Nosotros abordamos la cuestión del aprendizaje en sistemas como las redes neuronales, de características notablemente estadísticas, desde el punto de vista de la *Teoría Estadística de la Información.* Desde esta perspectiva, consideraremos una **señal** como una variable aleatoria (ya escalar, ya vectorial) con una cierta distribución dada. En particular, hablaremos del campo de intensidades luminosas registradas en la retina (denotado $I(\vec{x})$) como nuestra señal, representación de una imagen del mundo real.

Desde el punto de vista de la Teoría de la Información, podemos considerar el contenido de información (o **Cantidad de Información**) de una señal dada, como la entropía de su función de densidad de probabilidad. Esto es, si la función de densidad de probabilidad de una señal S es $\rho_S(x)$, su Cantidad de Información H_S será :

$$H_S \;\equiv\; -\langle \log_b \rho_S \rangle \;=\; -\int dx\, \rho_S(x) \log_b \rho_S(x)$$

donde b es una base de logaritmo; cuando $b = 2$ se dice que esta Cantidad de Información se expresa en *bits.* Muchas veces, por conveniencia al operar, se usa la base natural, $\log_b = \ln$ y la entropía en tal caso de mide en *nats.* Al término $-\log_b \rho_S(x)$ se le llama **extrañeza del evento** x.

Puede verse (por ejemplo, en el libro de Cover et al, [7]) que la entropía de una distribución caracteriza el menor número medio de palabras que puede tener un código que trate de representar los eventos de la señal S. Para un universo de sucesos de tamaño dado, la distribución que alcanza la máxima entropía es aquella que asigna igual probabilidad a todos los sucesos, y que por tanto ha de usar la misma cantidad de bits para hablar de cada uno.

En el caso de las imágenes del mundo real, es evidente que no toda sucesión de puntos luminosos constituiría una imagen que pudiéramos calificar de natural; nada más tenemos que pensar en la imagen que nos proporciona un televisor cuando no tiene puesta antena: una nube electrónica aleatoria genera una imagen en la que cada punto se ilumina al azar e independientemente de los demás, maximizando la entropía. Sin embargo, en las imágenes del mundo real abunda la **redundancia** informativa: un punto próximo a otro es muy probable que tenga una luminosidad muy similar (posiblemente se hallen ambos dentro del mismo objeto)

1.3 Adaptación neuronal. Aprendizaje

Más allá del formalismo matemático, existe cierta evidencia experimental de que las redes neuronales biológicas siguen ciertas prescripciones de aprendizaje natural que las conducen a buscar el código óptimo al ser sometidas incesantemente a una señal. Este aprendizaje se ha visto confirmado a ser el que maximiza la transferencia de información desde el mundo exterior, lo que en determinados contextos equivale al que reduce la redundancia en la representación interna (ver [8]). En un célebre artículo (ver [9]), Atick probó que las primeras etapas del procesado visual en los mamíferos (en particular, monos) decorrelan la señal que les llega, produciendo una señal compacta. De ese modo, el sistema visual se ha adaptado a la señal recibida. Existe, así mismo, abundante experimentación que prueba que las primeras semanas e incluso horas de la vida de un mamífero son fundamentales en la adaptación a su dieta visual, por ser la época de mayor plasticidad sináptica; y por ello se ve que hay pocos rasgos innatos en estas adaptaciones y que, más bien, cada individuo aprende de su entorno.

Es indudable que si se conociera el mejor código, aquél que en modo más eficiente y compacto representase los sucesos visuales, tendríamos una idea clara de cual ha de ser la meta de todo sistema biológico: alcanzar, dentro de las limitaciones funcionales, tal representación. Y aquí es donde se inserta toda la investigación presente, pues obtener este código significa conocer al menos lo suficiente de la estadística de nuestra señal como para calcular su Contenido de Información. Tarea ésta, sin duda, ciclópea, sobre todo si se procede muy formalmente. Ahora bien, las imágenes poseen fuertes propiedades geométricas que pueden sobremanera simplificar su tratamiento y su descripción estadística. Del énfasis en algunas de esas propiedades conseguiremos explorar espacios antes desconocidos.

Una de esas propiedades es la invariancia estadística de traslación, o sea, tomada una subescena dentro de la imagen ésta podría haber aparecido igualmente en cualquier otro lugar; en definitiva, el observador puede encontrarse un objeto dado en cualquier lugar dentro de su campo visual. Por tanto, la distribución debe ser invariante bajo esta transformación interna. Evidentemente, con imágenes reales (que son mallas finitas de puntos discretizados) este tipo de propiedades fallan a escalas donde el tamaño o la resolución finita impidan extrapolar, pero nuestro punto de vista será el de aislar la región universal, que no depende del aparato que registra la señal. Incluso, en ocasiones se impone la invariancia de traslación para determinados tratamientos, mejorando en ese aspecto un posible muestreo que se hubiese tomado.

Un poco más sutiles son las invariancias de escala, que se explican detalladamente en la siguiente SubSección. Adicionalmente, es conveniente en lo que sigue tener en cuenta el denominado principio de **Ergodicidad**, y que se formula del modo siguiente: Es equivalente promediar una magnitud intensiva a lo largo de diversas imágenes del colectivo, que promediarla a lo largo de una sola, suficientemente grande. Nuevamente, esto se relaciona con la presencia o no de subescenas dentro de una dada, y es una hipótesis sumamente razonable. Nosotros la utilizaremos continuamente, allí donde sea necesario.

1.4 Autosimilaridad en imágenes

Las imágenes tomadas del mundo poseen propiedades de diversa índole conocidas en conjunto como propiedades de Autosimilaridad. Todas ellas se piensa que tienen un origen común, a saber: que las imágenes no poseen una escala definida, por razón de que cualquier subescena de una escena dada podría aparecer con mayor o menor tamaño aparente, simplemente en función de la distancia a la que se halle el obervador de la misma. Así, en el mundo visual no tiene sentido preguntarse por el tamaño absoluto de un objeto, que es algo inalcanzable sin algún tipo de esteroscopía.[1]

La más conocida de la propiedades de Autosimilaridad es el comportamiento del espectro de potencias $S(\vec{f})$ (ver, por ejemplo, [11]). Definamos éste: dado el campo de luminosidades en la retina $I(\vec{x})$ definimos la correlación a dos puntos de este campo $C(\vec{x},\vec{y})$ como :

$$C(\vec{x},\vec{y}) \equiv \langle I(\vec{x})I(\vec{y})\rangle - \langle I(\vec{x})\rangle\langle I(\vec{y})\rangle$$

[1]No se ha explicitado, pero evidentemente nuestro tratamiento es monocular. La binocularidad no es más que dos monocularidades, y la estereocopía sólo se consigue por un tratamiento a alto nivel en la corteza visual.

donde los paréntesis triangulares denotan promedio sobre el colectivo de imágenes. Si asumimos, como es natural, que hay invariancia de traslación, esta cantidad no dependerá del par de puntos $\vec{x}$, $\vec{y}$ considerados, sino de su diferencia $\vec{r} = \vec{y} - \vec{x}$. Así hablaremos de $C(\vec{r})$ para denotar esta correlación. Más aún, si hay ergodicidad es equivalente promediar sobre un conjunto de imágenes que sobre todos los puntos de una imagen. Esto es muy interesante porque permite interpretar $C(\vec{r})$ como la autocorrelación del campo de contrastes $c(\vec{x}) = I(\vec{x}) - \langle I \rangle$.

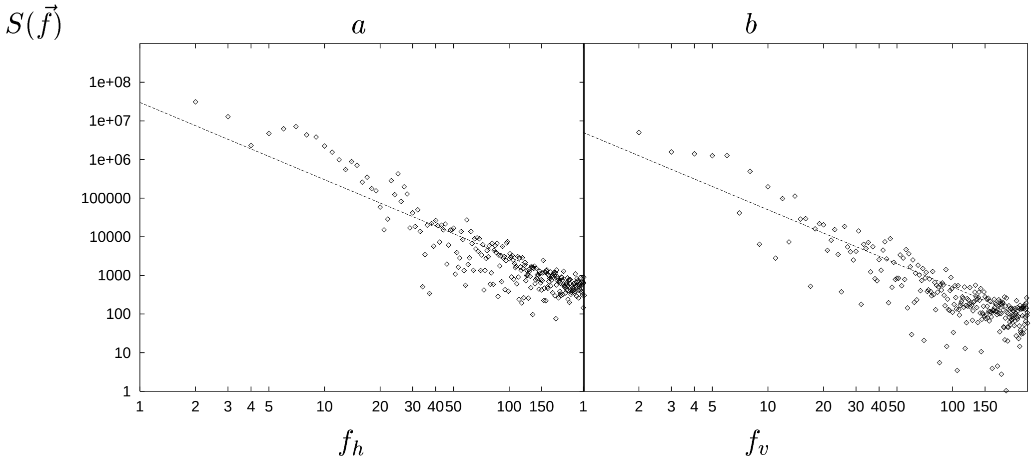


Figura 1.1: *$S(\vec{f})$ en la imagen de Lena*
a: En la dirección horizontal; b: En la vertical

El espectro de potencias $S(\vec{f})$ se define como la transformada de Fourier de $C(\vec{r})$ respecto de $\vec{r}$. Es un hecho experimental bien conocido (ver [12, 13]) desde los primeros días de la televisión que esta función presenta una ley de potencias en $f \equiv |\vec{f}|$, o sea, se verifica :

$$S(\vec{f}) \propto \frac{1}{f^{2-\eta}}$$

donde η es un exponente pequeño, y no universal puesto que presenta variaciones apreciables entre imágenes y colectivos, y de algún modo mide la anisotropía relacional del medio (ver [14] para un estudio detallado de este aspecto). También es verdad que en las imágenes del mundo real hay cierta anisotropía y por ello las correlaciones son algo mayores en las direcciones horizontal y vertical. En la figura 1.1 se representa el espectro de potencias de la imagen de Lena (ver figura 5.1) a lo largo de esas dos direcciones.

El comportamiento en ley de potencias del espectro de potencias indica que, al menos en lo que a la correlación se refiere, no hay una escala fija; o bien: la longitud de correlación típica es infinita. Este tipo de fenómenos revela más bien la estructura macroscópica de la imagen, pues relaciona elementos a grandes escalas. Ruderman (ver [15]) construye un modelo de imágenes sintéticas (que será analizado más tarde en el Capítulo 6) en el cual puede explicar satisfactoriamente esta ley de potencias, simplemente por relaciones de tamaños entre objetos colocados al azar.

La parte central de esta tesis lo constituye el análisis de otras propiedades, también autosimilares, pero de un tipo completamente diferente. En ellas intervendrá toda una jerarquía de estadísticos (que serán los momentos de una distribución), cuya aportación conjunta permitirá caracterizar más bien la estructura relacional microscópica de las imágenes, determinando en última instancia los bordes de los objetos que las constituyen.

1.5 Aspectos no gaussianos

Las correlaciones entre las luminosidades de los puntos que conforman una imagen son tan fuertes que hacen que este sistema sea difícilmente descriptible. En particular, una descripción gaussiana de la estadística de imágenes naturales es absolutamente imposible.

Es fácil darse cuenta de ello : tomando el contraste luminosos $c(\vec{x}) = I(\vec{x}) - \langle I \rangle$, ya dijimos que la correlación luminosa a dos puntos no es más que la autocorrelación del contraste luminoso; por tanto, el espectro de potencias no es más que el módulo al cuadrado de la transformada de Fourier de $c(\vec{x})$,

$$S(\vec{f}) = |\hat{c}(\vec{f})|^2$$

(donde se ha hecho uso de la ergodicidad para promediar solamente sobre una imagen)

Con una distribución gaussiana para $I(\vec{x})$, se obtiene una distribución gaussiana de media nula para $c(\vec{x})$ (ya que, por la invariancia de traslación, las marginales en cada $\vec{x}$ de $c(\vec{x})$ están equidistribuidas); y esta distibución queda caracterizada totalmente por la matriz de correlación, o sea, por $S(\vec{f})$. Así que algo tan simple como decorrelar la señal produciría una imagen en la cual cada pixel se iluminaría independientemente. Las imágenes con

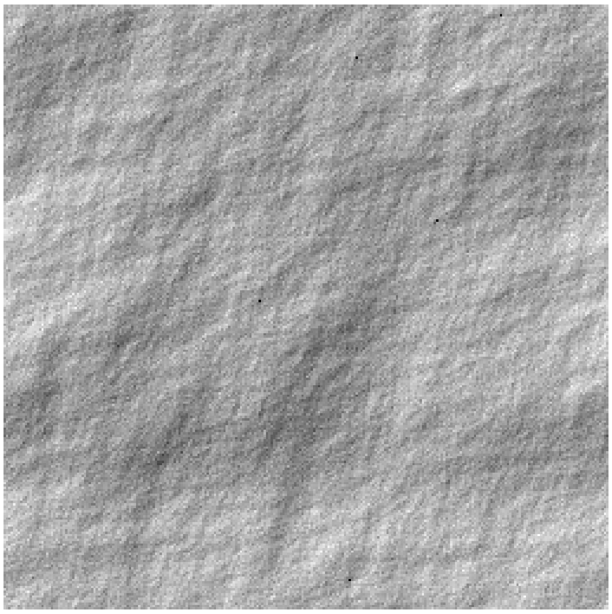
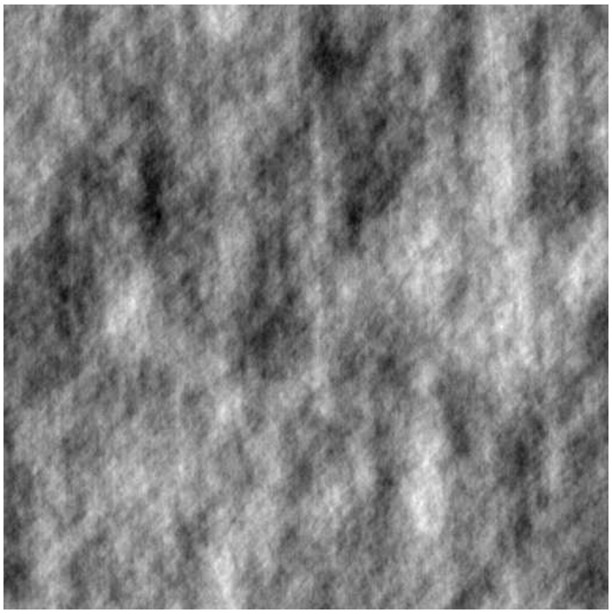


Figura 1.2: *Imagen con distribución de luminosidades gaussiana y espectro de potencias de la forma* $1/f^2$

distribución gaussiana que tienen el espectro de potencias conocido tienen un aspecto muy uniforme, y no se distinguen estructuras relevantes en ellas. (ver figura 1.2)

Si bien, como es cierto, la decorrelación es una buena estrategia para eliminar redundancia a nivel de las células ganglionales del nervio óptico (precisamente en el artículo antes mencionado de Atick se concluye que en primera instancia estas células decorrelan la señal, para compactar el código), también es cierto que tras la decorrelación quedan multitud de estructuras reconocibles, no independientes, en las imágenes: particularmente perviven los bordes. No sólo eso: si en una imagen real se suprime la estadística de mayor orden (3 y superiores), manteniendo las correlaciones, las imágenes obtenidas son irreconocibles, dando a entender que el mayor contenido informacional está precisamente en aquéllas. Es, por tanto, lo que diferencia y aleja a nuestra distribución de la gaussianidad lo que, al fin y a la postre, es más relevante.

Decorrelada



Eliminando toda la estadística de orden mayor que 2.

Figura 1.3: *Imagen de Lena "blanqueada" y truncada a momento de orden 2*

En la figura 1.3 se muestra el resultado de aplicar dos truncamientos de estadística diferentes a la imagen de Lena (quien puede ser contemplada en su esplendor en la figura 5.1). La figura superior corresponde a la decorrelación de la imagen, conseguida sin más que dividir por su módulo la transformada de Fourier de $c(\vec{x})$. La figura inferior corresponde a eliminar la estadística de orden mayor que 2, y se consigue cambiando la fase de la transformada de Fourier de $c(\vec{x})$ por una aleatoria.

Es evidente que la imagen tras la decorrelación conserva suficiente estructura como para ser reconocible; en ese sentido se puede decir que se elimina la redundancia debida a los cambios suaves de luz sobre las superficies iluminadas. Las correlaciones de órdenes más altos se revelan como poseedoras del mayor caudal informativo, pues sin ellas se pierde toda estructura. Más aún, de esto se concluye que la estadística de $c(\vec{x})$ es no gaussiana, y son los eventos raros, los que determina la cola de la distribución y afectan fundamentalmente a los momentos de mayor orden, los informativamente más relevantes y estructurales.

Ruderman (ver [16]) analizó la distribución de la luminosidad y del modulo del gradiente de la misma, llegando a la conclusión de que las colas de ambas distribuciones decaían a un ritmo mucho menor que en las distribuciones gaussianas. De este modo, la influencia de estos aspectos no gaussianos se revelan como factores estructurales profundos y evidentes. Por medio de la variable que vamos a definir trataremos de acercarnos un poco más a las estructuras informacionalmente significativas en las imágenes y al modo de clasificarlas y estudiarlas.

Capítulo 2

Teoría sobre las leyes de escala

2.1 Escala en Turbulencia Completamente Desarrollada

2.1.1 Introducción

Introducimos la teoría sobre leyes de escala destacando algunos aspectos conocidos acerca del comportamientos de fluídos en régimen muy turbulento. La observación de estas propiedades y su prolijo estudio en este campo sirvieron de inspiración primera de nuestro trabajo, así que por completitud y por lo provechoso de la analogía citamos aquí los aspectos clave que fueron útiles en la presente tesis. No ha sido nuestra intención hacer un estudio detallado de estos sistemas; el lector interesado puede acudir por ejemplo al libro de Frisch, [10], para ampliar su perspectiva de esta materia.

2.1.2 Turbulencia Completamente Desarrollada

El comportamiento de los fluídos depende críticamente en el número de Reynolds que posea el régimen en el que se encuentran.

- Para **números de Reynolds bajos**, el fluído se comporta de una forma tremendamente regular: es el denominado *régimen laminar.* En este caso, el fluído se organiza en capas que se deslizan las unas sobre otras. Tales fluídos presentan invariancias exactas de traslación y de escala (siempre que las condiciones de contorno no lo impidan)

- En **números de Reynolds altos**, el fluído experimenta súbitos cambios. La regularidad desaparece, dando lugar a la aparición esporádica de torbellinos, que rompen toda la simetría del mismo. Las láminas de fluído se quiebran y en algunos casos desaparecen.
- Para **números de Reynolds muy altos**, la estructura se vuelve absolutamente caótica e impredictible. El fluído cae en un estado de **caos determinista**[1] . Por ello mismo, un tratamiento determinista es inviable y absurdo en este caso. No obstante, tal fluído tiene un comportamiento absolutamente ergódico, así que es posible hablar de magnitudes estadísticas sobre él. En este contexto se puede observar que las invariancias de escala y de traslación se reestablecen, en un sentido estadístico.

Es este último caso el que nos interesa, aquél que viene determinado por la llamada **Turbulencia Completamente Desarrollada**. El valor concreto del número de Reynolds ya no es importante en absoluto en este régimen; sólo importan las magnitudes termodinámicas.

2.1.3 Variación de velocidad y disipación

En el contexto de fluídos en Turbulencia Completamente Desarrollada (abreviada a veces por sus siglas en inglés, FDT) dos magnitudes se muestran relevantes para el análisis, generalización de las magnitudes de Euler del fluído laminar. La primera de tales es la llamada **Variación Local de Velocidad**: Dado un segmento orientado de longitud determinada, $\vec{r}$, definimos la Variación Local de Velocidad a distancia r en el punto del fluído $\vec{x}$ como :

$$\delta_{\vec{r}} v \equiv |v(\vec{x}+\vec{r}) - v(\vec{x})|$$

donde $v(\vec{x})$ se puede tomar como el campo de módulos de las velocidades o como las proyecciones longitudinales del campo de velocidades.

Esta definición pretende reflejar la anisotropía y caoticidad del campo de velocidades. Su dependencia en la escala r, sin embargo, permite comparar estructuras a diversos tamaños y deducir de ahí aspectos microscópicos.

Otra variable íntimamente relacionada con la anterior es la disipación local de energia, denotada por ϵ_r. En el punto $\vec{x}$ esta magnitud viene dada por :

[1]Salvo que los efectos cuánticos sean relevantes a la escala disipativa, lo cual es más que probable; en tal caso el fluído poseería probablemente verdadero caos

$$\epsilon_r(\vec{x}) \equiv \frac{1}{|B_r(\vec{x})|} \int_{B_r(\vec{x})} d\vec{x}' \sum_{ij} [\partial_i v_j(\vec{x}') + \partial_j v_i(\vec{x}')]^2$$

donde $B_r(\vec{x})$ denota la bola de centro $\vec{x}$ y radio r.

Para fluídos tridimensionales existe una relación universal, de carácter geométrico, que liga $\delta_r v$ con ϵ_r (ver, por ejemplo, [10]), y que es :

$$\frac{[\delta_r v]^3}{r} \propto \epsilon_r \tag{2.1}$$

Esto permite fácilmente comparar la estadística de una y otra variable.

2.2 SS y ESS

Vamos a formular en esta Sección las dos propiedades de escala más relevantes que pueden poseer (y que en los casos que consideraremos de hecho poseen) variables estadísticas intensivas definidas a una escala interna r. Denotaremos por $e_{\vec{r}}$ una variable genérica de este tipo. Para hacer más simple posteriormente la transición hacia el estudio de imágenes naturales, llamaremos "imagen" (con comillas) a una realización del campo básico considerado (el campo de velocidades, para fluídos turbulentos; el campo de luminosidades, para las imágenes naturales), del cual todas las demás magnitudes son derivadas.

Denotaremos $\mathbf{e}_{\vec{r}}^{\,p} = \langle e_{\vec{r}}^{\,p} \rangle$, el momento de esta variable de orden p, obtenido de promediar a lo largo de cada "imagen" y sobre todo el colectivo *(ensemble)* de "imágenes". Se dice que esta variable presenta la propiedad de Autosimilaridad (cuyas siglas en inglés son SS) si se verifica que existen constantes τ_p, α_p tales que :

$$\mathbf{e}_{\vec{r}}^{\,p} = \alpha_p \, r^{\tau_p} \tag{2.2}$$

Se dice que la variable $e_{\vec{r}}$ presenta la la propiedad de Autosimilaridad Extendida (ESS) si existen dos colecciones de constantes $\rho(p,q)$, $A(p,q)$ (q se toma fijo) tales que :

$$\mathbf{e}_{\vec{r}}^{\,p} = A(p,q) \, [\, \mathbf{e}_{\vec{r}}^{\,q} \,]^{\rho(p,q)}$$

esto es, se expresan todos los momentos en función de uno fijo, el q-ésimo, que es el que aporta toda la dependencia en r. La expresión anterior también se suele denotar :

$$\mathbf{e}_{\vec{r}}^{\,p} = e^{\bar{\rho}(p,q)} \, [\, \mathbf{e}_{\vec{r}}^{\,q} \,]^{\rho(p,q)} \tag{2.3}$$

donde $\bar{\rho}(p,q) = \ln A(p,q)$. Evidentemente, si se tiene SS se tiene ESS, pero al revés no necesariamente. En el caso de tener SS, los coeficientes de ESS se calculan directamente según las expresiones :

$$\tau_p \;=\; \rho(p,q)\;\tau_q \;\;,\;\; \alpha_p \;=\; A(p,q)\;\alpha_q^{\rho(p,q)}$$

También está claro que si (2.3) se verifica para un q dado, se verifica para cualquier otro momento q' siempre que $\rho(q',q) \neq 0$. Los coeficientes centrados en el nuevo momento q' se expresan respecto a los de q según las relaciones :

$$\rho(p,q') \;=\; \frac{\rho(p,q)}{\rho(q',q)} \quad , \quad A(p,q') \;=\; A(p,q)\;[A(q',q)]^{-\rho(p,q')}$$

lo que nos permite pasar de uno a otro. En el estudio de la Turbulencia Completamente Desarrollada, es habitual fijar $q = 3$ para la variable $\delta_r v$ y $q = 1$ para la disipación local de energía ϵ_r, pues es conveniente dada la relación dinámica, ec. (2.1). Para el caso de imágenes naturales, sin embargo, tomaremos convencionalmente $q = 2$ para nuestra variable $e_{\vec{r}}$ (que será definida en el Capítulo 3) y usaremos siempre la relación particular :

$$\mathbf{e}_{\vec{r}}^{\,p} = e^{\bar{\rho}(p,2)} \, [\, \mathbf{e}_{\vec{r}}^{\,2} \,]^{\rho(p,2)} \tag{2.4}$$

2.3 Acerca de la $\|\;\|_p$

Seguidamente, haremos una revisión de diversos conceptos teóricos de los que deberemos hacer uso más adelante.

2.3.1 Definición de $\|\;\|_p$. El límite de las normas-p, $p \to \infty$

Empecemos esta sección con la definición usual de norma p de una variable aleatoria (en el caso general, se puede usar una función medible). Se define **norma-p** de una variable aleatoria x como :

$$\|\, x \,\|_p \equiv [\, \int_{-\infty}^{\infty} dF(x)\; |x|^p \,]^{\frac{1}{p}} \tag{2.5}$$

donde $F(a) = \wp(x \leq a)$, la función de distribución de probabilidad y así $dF(x)$ es la densidad de probabilidad diferencial de la variable x. Esta definición tiene sentido para $0 < p < \infty$, pero sólo define una norma para $1 < p < \infty$. La definición puede ser extendida para $p = \infty$ por :

$$\| \, x \, \|_\infty \equiv ess\ sup|x| = inf\{a \ : \wp(|x| > a) = 0\}$$

(*ess sup* significa "supremo esencial") De este modo, por definición, para cualquier número estrictamente menor que $\| \, x \, \|_\infty$, la probabilidad de obtener valores de $|x|$ mayores que éste es positiva. A continuación se da una prueba sencilla de que esta definición es una extensión de la que se tiene para p finito, en el sentido :

$$\lim_{p \to \infty} \| \, x \, \|_p = \| \, x \, \|_\infty \tag{2.6}$$

Demostración :

- **Caso** $\| \, x \, \|_\infty < \infty$ **:**

  Calculemos el momento de orden p de $|x|$:

$$\langle |x|^p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dF(x) \; |x|^p = \int_0^{\infty} dF(|x|) \; |x|^p$$

  (La segunda expresión es un abuso de notación, ya que el "dF" para la variable aleatoria $|x|$ es una función diferente de la de x; el símbolo debe ser entendido como : "La función de distribución para la variable argumento")

  Esto es igual a :

$$\langle |x|^p \rangle = \int_0^{M} dF(|x|) \; |x|^p + \int_M^{\infty} dF(|x|) \; |x|^p \; , \; \geq \int_M^{\infty} dF(|x|) \; |x|^p$$

  para cualquier $M \; \in \; \Re^+$. Pero entonces, $\forall \, p > 0$:

$$\langle |x|^p \rangle \; \geq \; \int_M^{\infty} dF(|x|) \; M^p \;\; = \; M^p \wp(|x| > M)$$

  y asi :

$$\| \, x \, \|_p \geq M \; [\wp(|x| > M)]^{\frac{1}{p}} \tag{2.7}$$

Ahora, si tomamos $\epsilon > 0$ y $M = \parallel x \parallel_\infty - \epsilon$, automáticamente obtenemos que $\wp(|x| > M)$ es mayor que cero, por definición de $\parallel x \parallel_\infty$. Por tanto, cuando $p \to \infty$ el segundo factor de la derecha de (2.7) tiende a 1. Por ello,

$$\lim_{p\to\infty} \parallel x \parallel_p \geq M = \parallel x \parallel_\infty - \epsilon$$

y esto es cierto para cualquier $\epsilon > 0$, así que haciendo que $\epsilon \to 0$ se saca que :

$$\lim_{p\to\infty} \parallel x \parallel_p \geq \parallel x \parallel_\infty .$$

Pero por definición $|x| \leq \parallel x \parallel_\infty$ (en casi todos los puntos), así que $\parallel x \parallel_p \leq \parallel x \parallel_\infty$ y entonces :

$$\lim_{p\to\infty} \parallel x \parallel_p = \parallel x \parallel_\infty .$$

- **Caso** $\parallel x \parallel_\infty = \infty$ **:**

  En este caso, para todo $M > 0$, $\wp(x > M) > 0$; análogamente a lo hecho en la demostación anterior se obtiene que $\forall\, p > 0$,

  $$\langle |x|^p \rangle \;\geq\; \int_M^\infty dF(|x|)\; M^p \;\;=\;\; M^p \wp(|x| > M)$$

  y esa probabilidad no se anula; así que cuando $p \to \infty$ tenemos que :

  $$\lim_{p\to\infty} \parallel x \parallel_p \geq M$$

  para todo $M > 0$, así pues :

  $$\lim_{p\to\infty} \parallel x \parallel_p \;=\; \infty \;=\; \parallel x \parallel_\infty$$

C.Q.D.

Como bonus interesante de la demostración para $\parallel x \parallel_\infty < \infty$, se ve que lo que regula cuán rápido la norma p está a distancia ϵ de $\parallel x \parallel_\infty$ es $[\wp(|x| > \parallel x \parallel_\infty - \epsilon)]^{\frac{1}{p}}$. Esta parte es dominada por la cola de la distribución (la cola hasta el máximo valor posible de $|x|$, que es $\parallel x \parallel_\infty$)

2.3.2 El límite de las normas p, $p \to 0$

Tiene interés también el límite de $\| x \|_p$ cuando $p \to 0$, aunque esas expresiones ya no sean normas cuando p está por debajo de 1. Así pues queremos calcular $\lim_{p\to 0} \| x \|_p$.

Para p pequeños, tenemos que $|x|^p \underset{p\ll 1}{\approx} 1 + p\ln|x|$; por ello :

$$\| x \|_p{}^p \underset{p\ll 1}{\approx} 1 + p\ln \| x \|_p \underset{p\ll 1}{\approx} 1 + p\langle \ln|x|\rangle$$

y así :

$$\lim_{p\to 0} \| x \|_p = e^{\langle \ln|x|\rangle}$$

Siempre usaremos distribuciones con media finita, así que la única divergencia posible en $\langle \ln|x|\rangle$ está en $x = 0$ y de producirse haría que ese valor esperado fuese $-\infty$. Por tanto, si tenemos un valor finito de $\langle \ln|x|\rangle$ esto significa que $\wp(x = 0) = 0$, o sea, no hay delta centrada en cero. También implica que $\lim_{x\to 0} dF(x) = 0$ (más aún, que $dF(x)$ tiende a cero más rápido que $1/\ln(x)$)

2.3.3 El orden de las normas

Las normas p cuando $1 < p < \infty$ verifican una desigualdad esencial, conocida como *desigualdad de Hölder*, y que puede expresarse de la forma siguiente :

"Dada una medida positiva μ y dos funciones medibles f y g y tales que $\| f \|_p < \infty$ *y* $\| g \|_q < \infty$ (las normas definidas de acuerdo a esa medida) *y donde además $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces :*

$$\int d\mu(x)\, |f(x)g(x)| \;\le\; \| f \|_p \| g \|_q\text{''}$$

La demostración no es difícil, pero es un poco técnica. No la reproduzco aquí (es fácil de encontrar en cualquier libro de Análisis Funcional; p.ej, [17]). Si en particular la medida del espacio es 1 (espacio de probabilidad) se obtiene que :

$$\| f \|_p \le \| f \|_{p'} \;\; ; \;\; p < p' \;\; , \;\; \forall f$$

Así que cualquier variable aleatoria X verifica la siguiente cadena de desigualdades :

$$\| X \|_1 \le \| X \|_p \le \| X \|_{p'} \le \| X \|_\infty \quad , \quad 1 \le p \le p' \le \infty \tag{2.8}$$

2.3.4 $\| \, \|_\infty$ en SS y ESS

En los casos particulares del cálculo de $\| e_{\vec{r}} \|_\infty$ de una variable $e_{\vec{r}}$ que verifique SS y/o ESS las expresiones son muy sencillas y de gran utilidad para cálculos posteriores.

- **SS:**

  Si se tiene SS para $e_{\vec{r}}$ (ec. 2.2) se verifica en particular que :

  $$\| e_{\vec{r}} \|_\infty \;=\; \alpha_\infty \, r^{\tau_\infty} \tag{2.9}$$

  donde, obviamente,

  $$\begin{cases} \alpha_\infty &= \lim_{p\to\infty} [\alpha_p]^{\frac{1}{p}} \\ \tau_\infty &= \lim_{p\to\infty} \frac{\tau_p}{p} \end{cases}$$

- **ESS:**

  Tomando la ecuación 2.4 es inmediato que :

  $$\| e_{\vec{r}} \|_\infty = e^{\bar{a} \,+\, \ln(\mathbf{e}_{\vec{r}}^{2}) \, a} \tag{2.10}$$

  donde :

  $$\begin{cases} \lim_{p\to\infty} \dfrac{\rho(p,2)}{p} &= a \\ \lim_{p\to\infty} \dfrac{\bar{\rho}(p,2)}{p} &= \bar{a} \end{cases} \tag{2.11}$$

Para terminar, hacer notar que la relación de los coeficientes SS de $\| e_{\vec{r}} \|_\infty$ (α_∞ y τ_∞) con los coeficientes de ESS a y $\bar{a}$, y los de SS α_2 y τ_2 es :

$$\begin{cases} \alpha_\infty &= \alpha_2^a e^{\bar{a}} \\ \tau_\infty &= a\,\tau_2 \end{cases} \tag{2.12}$$

2.3.5 La distribución asociada a $\rho(p,2)$ y $\overline{\rho}(p,2)$ lineales

Estudiamos en esta SubSección qué variable aleatoria es compatible con unos $\rho(p,2)$ y $\bar{\rho}(p,2)$ de comportamiento exactamente lineal a partir de un cierto p. Nuestro punto de partida será una variable aleatoria y positiva x distribuída de acuerdo a una distribución desconocida $\rho(x)$. El momento de orden p de la variable se llamará $\langle x^p \rangle$. Supondremos que desde algún p finito, digamos p_0,

$$\langle x^p \rangle = B^{\,ap+b}, \ \ \forall\, p > p_0 \tag{2.13}$$

y B, a y b son algunas constantes fijadas.

Dado esto, construyamos la *función característica*, ϕ , asociada a la distribución de probabilidad.

$$\phi(u) = \langle e^{-2\pi i\, u\, x} \rangle$$

(con mi convención usual). De este modo,

$$\phi(u) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-2\pi i)^p}{p\,!} \, \langle x^p \rangle u^p$$

Ahora podemos desarrollar los primeros p_0 factores de ahí , y para el resto usar la relación (2.13). Así ,

$$\phi(u) = \sum_{p=0}^{p_0-1} \frac{(-2\pi i)^p}{p\,!} \, \langle x^p \rangle u^p \; + \; \sum_{p=p_0}^{\infty} \frac{(-2\pi i)^p}{p\,!} \, B^{\,ap+b} u^p$$

pero del segundo factor es fácil derivar :

$$\phi(u) = \sum_{p=0}^{p_0-1} \frac{(-2\pi i)^p}{p\,!} \, \langle x^p \rangle u^p \; + \; B^{\,b} \, [\, e^{-2\pi i\, B^{\,a}\, u} - \sum_{p=0}^{p_0-1} \frac{(-2\pi i)^p}{p\,!} \, B^{\,ap} u^p \,]$$

de donde se obtiene :

$$\phi(u) = \sum_{p=0}^{p_0-1} \frac{(-2\pi i)^p}{p\,!} \, (\langle x^p \rangle \; - \; B^{\,ap+b}) \, u^p \; + \; B^{\,b} \, e^{-2\pi i\, B^{\,a}\, u}$$

Pero la función característica es la transformada de Fourier de la densidad de probabilidad, luego haciendo la antitransformada de Fourier de esta última relación obtenemos :

$$\rho(x) = (1 - B^{\,b})\,\delta(f) \;+\; \sum_{p=1}^{p_0-1} \frac{1}{p\,!}\,(\langle x^p \rangle \;-\; B^{\,ap+b})\,\delta^p(f) \;+\; B^{\,b}\delta(x - B^{\,a})$$

donde $\delta^p(f)$ significa la derivada p-ésima de la función δ de Dirac. Ahora bien, la densidad de probabilidad ha de ser una medida positiva, por lo que todas las derivadas de δ deben desaparecer [2] . Observando qué es lo que ha de cancelarse se ve que es igual que imponer que (2.13) se da para todo p. De hecho, esto es lo mismo que decir :

$$\rho(x) = (1 - B^{\,b})\,\delta(x) \;+\; B^{\,b}\delta(x - B^{\,a}) \tag{2.14}$$

O sea, sólo hay una distribución bajo esas hipótesis; y además, esa distribución da un peso no nulo al punto $x = 0$.

2.4 Modelos que describen ESS : Apuntes teóricos

La más simple de las teorías desarrolladas para explicar la dependencia en escala de las variables termodinámicas de FDT fue enunciada por Kolmogorv en uno de los famosos artículos de 1941. (ver [18]). En la teoría de Kolmogorov, uno supone que existe un flujo constante de energía entre las estructuras existentes a cada escala en cascada descendente (en el caso de turbulencia, esas estructuras son las "burbujas" turbulentas de un tamaño dado por el parámetro de escala r). Por tanto, la energía promedio contenida en una burbuja de una escala L sería la misma que la contenida a la escala r salvo por una constante de pérdida o rozamiento, que sería siempre la misma entre dos escalas L y r dadas.

Esta teoría resulta insatisfactoria para describir los fluídos turbulentos, pues predice unos coeficientes τ_p y $\rho(p, 2)$ que dependen sólo linealmente en p. Además, ambos coeficientes resultarían no nulos en $p = 1$, en contra de las restricciones físicas[3]. Es posible enmendar esto concentrando la disipación energética en un conjunto más restrictivo que el total con dimensión fractal en general menor. De este modo, los coeficientes que se obtienen son :

[2] Si no fuese así, como siempre se puede construir una función positiva f con un número finito de derivadas arbitrarias en el origen, se podría ajustar convenientemente los valores de esas derivadas para que $\int\, dx\; \rho(x)\, f(x)$ fuese negativo, cuando debería ser positivo si $\rho(x)$ es una densidad de medida positiva.

[3] Puede verse de la definición de la disipación de energía ϵ_r que $\langle \epsilon_r \rangle$ no depende de r, por simple conmutación de la integral de la definición y el tomar valor medio

$$\begin{cases} \rho(p,2) & = & p-1 \\ \tau_p & = & \tau_2(p-1) \end{cases} \tag{2.15}$$

En este contexto, el exponente $-\tau_2$ puede interpretarse como la codimensión de la estructura disipativa del fluído. El evidente problema de esta nueva construcción es la discontinuidad en el origen de los exponentes τ_p y $\rho(p,2)$.

Generalizaciones de esa teoría pueden construirse fácilmente suponiendo que en realidad el flujo no es constante, sino que sigue un proceso estocástico apropiado, estadísticamente independiente de los valores de las energías locales a esas escalas y que sólo depende de la relación entre esas escalas. Puesto que la transferencia entre dos escalas ha de ser la misma tanto si se verifica directamente que si lo hace en cualquier número de pasos intermedios, el proceso estocástico en cuestión ha de ser infinitamente divisible. Como se verá más adelante (Capítulo 4) esto supone construir un multifractal sobre la "imagen".

El más simple de tales modelos es el que fue propuesto por **She & Leveque** (S-L), [19], que establece una jerarquía determinada en las razones de los momentos sucesivos,

$$\frac{\mathbf{e}_{\vec{r}}^{p+1}}{\mathbf{e}_{\vec{r}}^{p}} \propto \left[\frac{\mathbf{e}_{\vec{r}}^{p}}{\mathbf{e}_{\vec{r}}^{p-1}}\right]^{\beta} \parallel e_{\vec{r}} \parallel_{\infty}{}^{1-\beta},$$

para cierta constante β que caracteriza la razón media de escalas en proceso. (Como se sabe, esto corresponde a un proceso Log-Poisson para la razón de escalas; ver [20]). Bajo estas hipótesis se predice un coeficiente $\rho(p,2)$ dado por :

$$\rho(p,2) = ap - b\,(1-\beta^p) \;\; ; \;\; \begin{cases} a & = & \frac{1}{1-\beta} \\ & & \\ b & = & \frac{1}{(1-\beta)^2} \end{cases} \tag{2.16}$$

(El parámetro $\bar{\rho}(p,2)$ no puede ser predicho en estos modelos, porque tiene que ver con la distribución intrínseca a una escala fija; el parámetro $\rho(p,2)$, sin embargo, se ve que juega el papel relacional de mensajero entre las diversas escalas. Esto se verá más evidente en el desarrollo de la Sección 2.5)

Una posible generalización de este modelo se obtiene cuando se introduce un parámetro de ruido (temperatura) que permite distinguir entre las diferentes posibles cascadas que en un She-Leveque conducen de una escala superior a otra inferior dadas. Éste es el modelo de **Castaing** ([21]) :

$$\rho(p,2) = ap - b\,(1 - \frac{\beta^p}{1+pT}) \;\; ; \;\; \begin{cases} a &= (1 - \frac{\beta}{1+T})b \\ b &= \frac{1}{\frac{\beta^2}{1+2T} - 2\frac{\beta}{1+T} + 1} \end{cases} \tag{2.17}$$

2.5 Representación integral de SS

Tomamos como una de las posibles referencias bibliográficas en esta Sección el trabajo de Castaing, [21], en el que implícitamente se supone una normalización adecuada de la variable considerada; por tanto, la dependencia final en p del $\rho(p,2)$ asociado a la nueva variable (el orden del momento) en ese cálculo no tiene la contribución de mayor orden cuando $p \gg 1$, y que es la parte lineal en p. Para poder aplicar esa representación aquí necesitamos proceder del mismo modo. De lo que se deduce de la SubSección 2.3.4 , la parte lineal de los exponentes $\rho(p,2)$ y $\bar{\rho}(p,2)$ viene dada por la $\| e_{\vec{r}} \|_\infty$, y por tanto se ha de normalizar con esta cantidad para eliminar esa dependencia.

Supongamos que nuestra variable verifica tener $\| e_{\vec{r}} \|_\infty$ finito (como es el caso, tanto en Turbulencia como en la variable que definiremos para imágenes); definamos entonces $f_{\vec{r}}$ como :

$$f_{\vec{r}} = e_{\vec{r}} / \| e_{\vec{r}} \|_\infty$$

De este modo es trivial que $0 \le f_{\vec{r}} \le 1$. Además, si $e_{\vec{r}}$ verificaba tener ESS, ec. 2.4, como $\| e_{\vec{r}} \|_\infty < \infty$, los coeficientes a y $\bar{a}$ de la ec. 2.11 asociados a la norma infinito han de ser finitos.

No sólo eso, sino que además $f_{\vec{r}}$ también verifica ESS; sea $\mathbf{f}_{\vec{r}}^{\,p}$ el momento de orden p de $f_{\vec{r}}$; entonces :

$$\mathbf{f}_{\vec{r}}^{\,p} = e^{\bar{\sigma}(p,2) \,+\, \ln(\mathbf{f}_{\vec{r}}^{\,2})\,\sigma(p,2)} \tag{2.18}$$

y donde se tiene que :

$$\begin{cases} \bar{\sigma}(p,2) &= \bar{\rho}(p,2) - \bar{a}p + \frac{2\bar{a}}{1-2a}[\rho(p,2) - ap] \\ \\ \sigma(p,2) &= \frac{\rho(p,2) - ap}{1-2a} \end{cases} \tag{2.19}$$

Observaciones :

1. Es importante hacer notar que, en contra de lo que pudiera parecer, es posible reconstruir la variable $e_{\vec{r}}$ a partir de la variable $f_{\vec{r}}$ salvo por una constante, que evidentemente tiene poco significado a nivel físico y siempre hubiera podido fijarse a 1. Ello es así por la independencia de $\mathbf{e}_{\vec{r}}^{1}$ (ver SubSección 3.3.1) con respecto de r, con lo que usando $\mathbf{f}_{\vec{r}}^{1} = \mathbf{e}_{\vec{r}}^{1}/\| e_{\vec{r}} \|_\infty$, se puede despejar $\| e_{\vec{r}} \|_\infty$ salvo por la constante $\mathbf{e}_{\vec{r}}^{1}$, de donde podríamos entonces conocer $K\| e_{\vec{r}} \|_\infty$ y de ahí $Ke_{\vec{r}} = K\| e_{\vec{r}} \|_\infty f_{\vec{r}}$. En particular, es evidente que esa constante K no cambia el comportamiento de $\rho(p,2)$ y así se puede calcular sin más $\rho(p,2)$ a partir de $\sigma(p,2)$,

$$\rho(p,2) = \frac{1}{2\sigma(1,2)-1}\left[\sigma(1,2)p - \sigma(p,2)\right]$$

(obsérvese que $\sigma(1,2)$ es el exponente que relaciona el inverso de $\| e_{\vec{r}} \|_\infty$ con $\mathbf{f}_{\vec{r}}^{2}$). Por tanto, no se está perdiendo ninguna información relevante por trabajar con esta variable, y en particular lo que se diga para $\sigma(p,2)$ es inmediatamente traducible para $\rho(p,2)$.

2. Es también cierto que si $e_{\vec{r}}$ verificaba SS, entonces $f_{\vec{r}}$ también verifica SS; usando la fórmula de $\| e_{\vec{r}} \|_\infty$ en SS, ec. (2.9) y la definición de $f_{\vec{r}}$, se obtiene :

$$\mathbf{f}_{\vec{r}}^{2} = a_2\, r^{t_2}$$

(basta con describir este momento, pues en particular tenemos ESS), y donde :

$$\begin{cases} a_2 &= \frac{\alpha_2}{\alpha_\infty^2} &= \alpha_2^{1-2a}\, e^{-2\bar{a}} \\ \\ t_2 &= \tau_2 - 2\tau_\infty &= \tau_2(1-2a) \end{cases} \tag{2.20}$$

usando la ec. (2.12) para determinar la relación de los coeficientes α_∞ y τ_∞ con a, $\bar{a}$, α_2 y τ_2

De forma natural surge un esquema para relacionar la distribución estadística de las variables que poseen ESS; lo más simple, recuperando la idea de Kolmogorov, es suponer que existe una determinada constante α_{rL} que relaciona la transferencia entre dos escalas r y L de modo que :

$$e_{\vec{r}} \;=\; \alpha_{rL} e_{\vec{L}}$$

(la igualdad no ha de ser entendida punto a punto, sino a través del proceso de transferencia), pero esto hace que inmediatamente :

$$f_{\vec{r}} \;=\; f_{\vec{L}}$$

de donde :

$$\rho_{e_{\vec{r}}}(x) \;=\; \frac{1}{\alpha_{rL}}\, \rho_{e_{\vec{L}}}(\tfrac{x}{\alpha_{rL}})$$

y :

$$\rho_{f_{\vec{r}}}(x) \;=\; \rho_{f_{\vec{L}}}(x)$$

Se supone, adicionalmente, que α_{rL} no depende de las escalas r y L concretas escogidas, sino más bien de su cociente. Como se puede ver, en términos de las variables normalizadas la relación adquiere un aspecto muy sencillo. El cálculo de $\sigma(p,2)$ para estas últimas indica que $\sigma(p,2) = 0$, puesto que de la igualdad de funciones de densidad se ve que no hay dependencia de los momentos en la escala; esto implica que $\rho(p,2) \propto p$, lo cual puede comprobarse inmediatamente, pues si $e_{\vec{r}} \;=\; \alpha_{rL} e_L$, entonces :

$$\mathbf{e}_{\vec{r}}^{\,p} \;=\; \alpha_{rL}^p \mathbf{e}_{\vec{L}}^{\,p}$$

y por tanto $\alpha_{rL} \;=\; \frac{\mathbf{e}_{\vec{r}}^{\,p}}{\mathbf{e}_{\vec{L}}^{\,p}}$, en particular para $p = 2$; despejando en la relación anterior se obtiene :

$$\mathbf{e}_{\vec{r}}^{\,p} \;=\; \frac{\mathbf{e}_{\vec{L}}^{\,p}}{[\;\mathbf{e}_{\vec{L}}^{\,2}\;]^{p/2}}\,[\;\mathbf{e}_{\vec{r}}^{\,2}\;]^{p/2}$$

Fijada la escala L esto nos dice $\rho(p,2) \;=\; p/2$, como asegurábamos. El esquema es demasiado banal y poco satisfactorio. Una generalización natural es suponer que la α_{rL} ya no es una constante, sino una variable aleatoria. (Ver [22])

Éste es el punto de partida en los trabajos de Castaing (también usado en otros posteriores, como el de Dubrulle, [23]). Sea $\rho_{f_{\vec{r}}}(x)$ la función de densidad de probabilidad de la variable $f_{\vec{r}}$; sean dos escalas colineales $\vec{r}$, $\vec{L}$ y tales que $r < L$. Se propone entonces :

$$\rho_{f_{\vec{r}}}(x) = \int d\ln\alpha \; G_{rL}(\ln\alpha)\,\frac{1}{\alpha}\,\rho_{f_{\vec{L}}}(\tfrac{x}{\alpha}) \tag{2.21}$$

(por ser ahora α una variable aleatoria, no se simplifica trivialmente en las variables normalizadas[4]) y que además para tres escalas colineales $\vec{r}$, $\vec{L}$ y $\vec{M}$, $r < L < M$:

$$G_{rL} \otimes G_{LM} = G_{rM}$$

donde $\bigotimes$ representa el producto de convolución. Por razonamientos acerca de la cascada de escalas análogos a los que usó Kolmogorov, se establece que G_{rL} depende no de r y L independientemente, sino sólo a través de $s \propto \ln\frac{r}{L}$. *Esto es una particularización que obligará a que $f_{\vec{r}}$ tenga que seguir SS, como se verá más adelante.* Nos referiremos a la fórmula ec. (2.21) como *representación integral de la SS.*(Una representación más general es discutida en la Sección 2.6)
Tomando la ec. (2.21), podemos ver qué relación guardan $\mathbf{f}_{\vec{r}}^{\,p}$ y $\mathbf{f}_{\vec{L}}^{\,p}$. Así pues :

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_{\vec{r}}^{\,p} &= \int dx\, x^p \int d\ln\alpha\; G_{rL}(\ln\alpha)\,\frac{1}{\alpha}\,\rho_{f_L}(\tfrac{x}{\alpha}) \\
&= \int d\ln\alpha\; G_{rL}(\ln\alpha)\,\alpha^p\,\mathbf{f}_{\vec{L}}^{\,p} \\
&= \mathbf{f}_{\vec{L}}^{\,p} \int dy\; G_{rL}(y)\, e^{py}
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Por tanto, el cociente de los momentos a esas escalas da :

$$\frac{\mathbf{f}_{\vec{r}}^{\,p}}{\mathbf{f}_{\vec{L}}^{\,p}} = \int dy\; G_{rL}(y)\, e^{py}$$

Pero como ya hemos dicho previamente G_{rL} es una función de $s \propto \ln\frac{r}{L}$, así pues tenemos que el cociente de una función de r (o sea, $\mathbf{f}_{\vec{r}}^{\,p}$) con una

[4] La razón fundamental al final para usar las variables normalizadas, aparte de ser una necesidad para la estimación numérica de los densidades de probabilidad, es porque de ese modo la dependencia en r se concentra en G_{rL}; de otro modo, también habría que considerar los límites de integración

función de L ($\mathbf{f}_{\frac{\vec{r}}{L}}^{\,p}$) es una función de $\frac{r}{L}$. La única posibilidad compatible con esto es que :

$$\mathbf{f}_{\vec{r}}^{\,p} = a_p\, r^{t_p} \tag{2.23}$$

o sea, que los momentos de esta variable normalizada sean leyes de potencias en r; en definitiva, la variable normalizada verificaría SS (ec. 2.2)

Falta aún explicitar que condiciones son necesarias para que exista un núcleo G_{rL} que sirva para representar SS; éstas serán explicitadas en la Sección 2.6, que aborda el problema de la forma más general. Para los modelos de She-Leveque y de Castaing, sin embargo, es sencillo construir los núcleos, lo cual es muy interesante de cara a explicar la construcción de imágenes por medio del proceso estocástico multiplicativo que éstos definen. Sin embargo, hay en apariencia una contradiccion teórica entre este esquema y el comportamiento previsto para la variable $e_{\vec{r}}$ en el infinito...

Efectivamente, tomando la fórmula (3.4) se concluye evidentemente que para la variable $f_{\vec{r}}$, cuando $r \to \infty$

$$\rho_{f_\infty}(x) \;=\; \delta(x-1)$$

lo cual significa que ;

$$\lim_{r\to\infty} \mathbf{f}_{\vec{r}}^{\,2} \;=\; 1$$

Pero, por otra parte por la ec. (2.23) está claro que si r tiende a infinito, $\mathbf{f}_{\vec{r}}^{\,2}$ sólo puede tender a 0 (si t_2 es negativo) o a infinito (si t_2 es positivo).

Para resolver esta aparente contradicción se presentan tres opciones sencillas :

1. Únicamente es aplicable SS en un cierto rango de distancias. Nada tiene que ver con un problema de falta de estadística como el apuntado en la Sección 3.4; con un muestreo suficientemente grande llegaríamos a ver que a ciertas escalas los momentos se desvían del comportamiento predicho por la fórmula ec. 2.21 o sea, que sólo hay un cierto intervalo de r donde esta descripción es adecuada. Como consecuencia, no sería válida SS en general, sino tan sólo es una buena aproximación en ese intervalo apropiado. ESS, por otro lado, es más fiable y presumimos que sería más estable y más propicia a calibrar correctamente a lo largo de todas las escalas; no poseemos evidencia en este sentido, empero.

2. La variable r tiene un margen de variación limitado naturalmente, y por ello el momento $\mathbf{f}_{\vec{r}}^{\,2}$ jamás llega a alcanzar el valor 1 o sólo como caso extremo. Quizá de algún modo se pudiera explicar con la curvatura de las imágenes, de modo que, al ser en realidad angular nuestra variable r, tiene un verdadero máximo valor.

3. En realidad la variable $e_{\vec{r}}$ no es acotada. Esta posibilidad no descarta la aplicabilidad del modelo de She y Leveque y de otros modelos en los que los coeficientes τ_p, $\rho(p,2)$ divergen linealmente con p, pues la no acotación podría deberse al factor α_p. La representación integral seguiría siendo válida igualmente, aunque se debería de ser cuidadoso con los límites de integración. Éste debe ser el caso, seguramente, en el estudio de fluídos turbulentos. En todo caso, como se ve, no tiene mucha importancia para el análisis de las leyes de escala, que no tienen que ver con α_p.

2.6 Representación integral para ESS

Es posible generalizar la fórmula la relación ec. (2.21) para que pueda describir una relación de ESS para la variable $f_{\vec{r}}$ con cualquier exponente $\sigma(p,2)$, ec. (2.18). Tan sólo hay que encontrar el $G_s(\mathrm{y})$, si ello es posible, que verifique que :

$$\int_{-\infty}^{0} dy\; G_s(y)\, e^{py} \quad = \quad e^{s\mathrm{k}\,\sigma(p,2)} \tag{2.24}$$

para todo valor posible de s; y donde k es una constante, que se podria haber omitido (se contendría en s), pero ha sido explícitamente separada porque es la forma que toma el caso ya considerado, ec. (2.21). En el supuesto de que una tal $G_s(y)$ pudiera ser construida, ella constituye el kernel de la representación de ESS generalizada,

$$\rho_{f_{\vec{r}}}(x) = \int d\ln\alpha\; G_s(\ln\alpha)\, \frac{1}{\alpha}\, \rho_{f_{\vec{L}}}(\tfrac{x}{\alpha}) \tag{2.25}$$

sin más que tomar :

$$s = \frac{1}{k}\,[\ln \mathbf{f}_{\vec{r}}^{\,2} \;-\ln \mathbf{f}_{\vec{L}}^{\,2}] \tag{2.26}$$

Es inmediato comprobar que esto reestablece la relación de ESS: De modo análogo a como que se hizo en la Sección 2.5, se obtiene :

$$\frac{\mathbf{f}_{\vec{r}}^{\;p}}{\mathbf{f}_{\vec{L}}^{\;p}} \;=\; \int dy\; G_s(y)\; e^{py}$$

y usando (2.24) y el valor de s inmediatamente se llega a :

$$\mathbf{f}_{\vec{r}}^{\;p} \;=\; \frac{\mathbf{f}_{\vec{L}}^{\;p}}{[\mathbf{f}_{\vec{L}}^{\;2}]^{\sigma(p,2)}}\; [\mathbf{f}_{\vec{r}}^{\;2}]^{\sigma(p,2)}$$

y como nuestra variable verificaba ESS, ec. (2.18), la expresión $\frac{\mathbf{f}_{\vec{L}}^{\;p}}{[\mathbf{f}_{\vec{L}}^{\;2}]^{\sigma(p,2)}} = e^{\bar{\sigma}(p,2)}$ no depende de la escala L elegida como referencia. De este modo, conocida la distribución de $f_{\vec{L}}$ a una escala de referencia L, usando la fórmula ec. (2.25) podemos reconstruir la distribución a cualquier otra escala, ya que los momentos p la determinan únicamente.

Está claro entonces que esta fórmula permite una representación integral compacta de toda la estructura ESS. Los datos mínimos que son necesarios para construirla son la función de distribución a una escala L (determinada pero arbitraria en elección), $\rho_{f_{\vec{L}}}(x)$; los exponentes $\sigma(p,2)$ y la función de r que define $\mathbf{f}_{\vec{r}}^{\;2}$. Además ha de ser cierto que nuestro $\sigma(p,2)$ permita la construcción de un núcleo $G_s(y)$ según las condiciones de la ec. (2.24), lo cual impone ciertas restricciones sobre las posibles formas de $\sigma(p,2)$ (por ejemplo, ha de tener curvatura constante en signo, hacia abajo), que por otra parte ya debían verificarse en el anterior esquema, ec. (2.21), aunque no se explicitó entonces.

Es interesante destacar que si $\mathbf{f}_{\vec{r}}^{\;2}$ verifica SS, entonces trivialmente se tendrá SS para todos los momentos (ya que se tiene ESS) y además la fórmula ec.(2.26) para s pasa a ser :

$$s \;=\; \frac{t_2}{k}\; \ln \frac{r}{L} \tag{2.27}$$

(donde t_2 es el exponente de r para $\mathbf{e}_{\vec{r}}^{\;2}$, como en la ec. 2.23) que es la misma que se usa en la Sección 2.5, $s \propto \ln \frac{r}{L}$. En realidad la generalización que aquí se propone no es más que establecer que s es un cociente de funciones de r y de L que no tienen por qué ser leyes de potencias.

Capítulo 3

SS y ESS en Imágenes Naturales

3.1 Introducción

Nuestro objetivo es, por tanto, tratar de proponer una variable intensiva con rango local r que posea las propiedades de SS o de ESS, para aprovecharnos de todo el conocimiento teórico que fue desarrollado en el contexto de la Turbulencia Completamente Desarrollada en particular y de las leyes de escala en general.

Tras varios intentos, hemos propuesto una variable (que denominaremos Varianza Local de Bordes, VLB) que trata de capturar el promedio de la densidad lineal de bordes (salto brusco de luminosidad) en un punto dado y a un tamaño (escala) determinada. La definición, por mor de tener propiedades razonables a nuestros requerimientos, viene profundamente inspirada por analogía con la disipación local de energía definida en FDT. Y por ello mismo pone en relieve el carácter fractal del colectivo de imágenes, pues esta variable posee, como se verá, las propiedades de Autosimilaridad (SS) y de Autosimilaridad Extendida (ESS) (esta última con mayor rango de validez). Parte de estos resultados fueron expuestos en [24].

3.2 Definición de VLB

La variable **Varianza Local de Bordes** será denotada $e_{\vec{r}}$ y se define del modo siguiente: Dado un punto $\vec{x}$ de la imagen, su valor es :

$$e_{\vec{r}}(\vec{x}) = \frac{1}{r}\int_0^r ds\ \left[\frac{\partial c}{\partial r}(\vec{x}+s\vec{u}_r)\right]^2 \tag{3.1}$$

donde $\vec{u}_r$ es el vector unitario en la dirección definida por $\vec{r}$ (horizontal, vertical u otra), y la derivada parcial se toma a lo largo de esa dirección. Aquí, c representa el contraste de luminosidades (intensidades luminosas) de la imagen. Se ensayó también con el logaritmo de la intensidad luminosa, aunque en conjunto fue mucho menos satisfactoria que esta definición.

Una primera **interpretación** de la variable es que mide la densidad de saltos de contraste luminoso más o menos bruscos (de los cuales da cuenta $|\frac{\partial c}{\partial r}(\vec{x})|$), pesándolos tanto más cuanto más grande sea esta variación. De este modo, nuestra variable es un cierto promedio lineal de bordes luminosos. Es muy importante reseñar que los bordes evaluados son **perpendiculares** (transversos) a la dirección que define $e_{\vec{r}}$.

A diferencia de otras magnitudes usuales, no trata de separar los bordes bruscos (que delimitan los objetos) de los suaves (característicos de las texturas o pequeños saltos de luminosidad que se dan en la superficie de los objetos); por el contrario los integra a todos convenientemente escaleados. De este modo trata de conservar una cierta estructura fractal que se cree poseen las imágenes.

Por último hay que hacer notar que esta variable es una **variable orientada** (hay que fijar la dirección de los segmentos). Cuando sepamos un poco más acerca de ella veremos que una definición no dependiente de la orientación resultaría más interesante; sin embargo, tal definición tiene el inconveniente de ser mucho más exigente con la estadística (se necesita un volumen de datos mayor para determinar sus propiedades). Todo esto se discute en la Sección 3.10 .

3.3 Propiedades *a priori* de la VLB

La misma definición de $e_{\vec{r}}$ nos permite predecir algunas propiedades de su distribución de probabilidad, no importa cuál sea la distribución de luminosidades del colectivo de imágenes sobre el que se defina.

Recurrentemente haremos uso de la siguiente propiedad de $e_{\vec{r}}$, que es inmediata a partir de la definición, ec. (3.1): Sea una dirección unitaria $\vec{u}_r$; sean r, $s > 0$ y sean $\vec{r} = r\vec{u}_r$, $\vec{s} = s\vec{u}_r$. Para cualquier punto $\vec{x}_0$ de una imagen se verifica que :

$$e_{\vec{r}+\vec{s}}(\vec{x}_0) \;=\; \frac{r}{r+s} e_{\vec{r}}(\vec{x}_0) \;+\; \frac{s}{r+s} e_{\vec{s}}(\vec{x}_0+\vec{r}) \tag{3.2}$$

lo cual es inmediato por la linealidad de la integral que aparece en la definición.

3.3.1 Valor constante de $\mathbf{e}_{\vec{r}}^{\,1}$

Primeramente, hay que destacar que el valor de $\mathbf{e}_{\vec{r}}^{\,1}$ no depende de r. Usando la definición de $e_{\vec{r}}$, ec. (3.1),

$$\mathbf{e}_{\vec{r}}^{\,1} = \frac{1}{V}\int_V d^2\vec{x}\;\frac{1}{r}\int_0^r ds\,[\frac{\partial c}{\partial r}(\vec{x}+s\vec{u}_r)]^2\,;= \;\frac{1}{r}\int_0^r ds\;\frac{1}{V}\int_V d^2\vec{x}\;[\frac{\partial c}{\partial r}(\vec{x}+s\vec{u}_r)]^2$$

así ,

$$\mathbf{e}_{\vec{r}}^{\,1} = \frac{1}{r}\int_0^r ds\;\frac{1}{V}\int_V d^2\vec{x}\;[\frac{\partial c}{\partial r}(\vec{x})]^2 \;= \frac{1}{V}\int_V d^2\vec{x}\;[\frac{\partial c}{\partial r}(\vec{x})]^2$$

que es independiente de r. (V representa el volumen de integración)[1]

Esto tiene consecuencias directas en los coeficientes de la ESS, concretamente :

$$\rho(1,2) = 0$$

la cual se añade a otras relaciones[2] triviales :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \rho(0,2)=0 & ; & \rho(2,2)=1 \\ \bar{\rho}(0,2)=0 & ; & \bar{\rho}(2,2)=0 \end{array}\right. \tag{3.3}$$

[1]El lector experimentado en el estudio de campos con dimensiones anómalas se habrá dado cuenta de que en la demostración se ha supuesto que el soporte de la derivada de $c(\vec{x})$ tiene dimensión máxima. Efectivamente, así ha de ser, pero es mejor postponer ese tipo de consideraciones a los desarrollos del Capítulo 4

[2]No se está diciendo en ningún momento que $\rho(p,2)$ o $\bar{\rho}(p,2)$ sean funciones continuas de p; tan sólo cuáles son sus valores en unos puntos concretos para cualquier colectivo posible de imágenes, naturales o no. De hecho, en los modelos de las Secciones (6.2.1) y (6.2.2) las funciones no son continuas. Pero si uno obtiene una densidad de probabilidad absolutamente continua, entonces $\rho(p,2)$ y $\bar{\rho}(p,2)$ son por supuesto continuas, y esos puntos de paso obligado implican importantes ligaduras.

3.3.2 Comportamiento asintótico de $e_{\vec{r}}$ cuando $r \to \infty$

De la suposición de ergodicidad que se cree que poseen las imágenes naturales, está claro que cuando el camino tomado en la definición de $e_{\vec{r}}$, ec. (3.1), tiende a ser infinitamente largo, el promedio que define $e_{\vec{r}}$ es cada vez menos dependiente de el punto base $\vec{x}$ tomado para calcularlo, así que en el límite toma un valor constante a lo largo y ancho de la imagen; por tanto, cuando $r = \infty$, $e_{\vec{r}}$ toma el valor constante :

$$e_{\infty}(\vec{x}_0) = \frac{1}{V}\int_V d^2\vec{x}\ [\frac{\partial c}{\partial r}(\vec{x})]^2 \quad \forall \vec{x}_0$$

que, de hecho (y obviamente no por coincidencia) es el valor medio $\mathbf{e}_{\vec{r}}^{1}$, que es independiente de r, como se destacó antes. Por tanto, si denotamos la densidad de probabilidad de e_{∞} como $\rho_{e_{\infty}}(x)$, entonces :

$$\rho_{e_{\infty}}(x) \ = \ \delta(x - \mathbf{e}_{\vec{r}}^{1}) \tag{3.4}$$

3.3.3 Comportamiento asintótico de $e_{\vec{r}}$ cuando $r \to 0$

Éste es más simple, puesto que de la ec. (3.1) es claro que :

$$\lim_{r \to 0} e_{\vec{r}}(\vec{x}) \ = \ e_0(\vec{x}) \ = \ [\frac{\partial c}{\partial r}(\vec{x})]^2 \tag{3.5}$$

En las imágenes reales eventualmente habrá saltos de luminosidad tan bruscos que no sean diferenciables siquiera (por ejemplo, cuando se produce una transición desde un objeto a su exterior), así que es natural pensar que, salvo por los problemas de discretización, la distribución de e_0 sea no acotada, siendo el valor infinito uno posible.

Parece, por tanto, que la distribución de $e_{\vec{r}}$ pasa de no ser acotada en absoluto, cuando $r = 0$, a ser acotada y constante, cuando $r = \infty$. Nos interesaría saber que se puede decir sobre ella cuando r es un valor finito.

3.3.4 Propiedades de acotación de $\| e_{\vec{r}} \|_{\infty}$

Usando la descomposición señalada en la ec. (3.2), es inmediato que :

$$\begin{aligned} &\frac{r}{r+s}\, min(\, e_{\vec{r}}\,) \ + \ \frac{s}{r+s}\, min(\, e_{\vec{s}}\,) \ \leq \ min(\, e_{\vec{r}+\vec{s}}\,) \ \leq \\ &\quad max(\, e_{\vec{r}+\vec{s}}\,) \ \leq \ \frac{r}{r+s}\, max(\, e_{\vec{r}}\,) \ + \ \frac{s}{r+s}\, max(\, e_{\vec{s}}\,) \end{aligned} \tag{3.6}$$

luego podemos particularizar para el caso $r = s$, de donde obtenemos que :

$$min(\, e_{\vec{r}}\,) \;\leq\; min(\, e_{2\vec{r}}\,) \;\leq\; max(\, e_{2\vec{r}}\,) \;\leq\; max(\, e_{\vec{r}}\,)$$

análogamente se deduce que para todo $n \in \mathbf{N}$ que :

$$min(\, e_{\vec{r}}\,) \;\leq\; min(\, e_{n\vec{r}}\,) \;\leq\; max(\, e_{n\vec{r}}\,) \;\leq\; max(\, e_{\vec{r}}\,)$$

y es fácil extrapolar en general que si $r < s$, entonces :

$$min(\, e_{\vec{r}}\,) \;\leq\; min(\, e_{\vec{s}}\,) \;\leq\; max(\, e_{\vec{s}}\,) \;\leq\; max(\, e_{\vec{r}}\,) \tag{3.7}$$

así que se pueden extraer dos conclusiones :

1) Es plausible que la varianza de la distribución de probabilidad disminuya cuando la escala se hace mayor.

2) Como quiera que $\| e_{\vec{r}} \|_\infty = max(\, e_{\vec{r}}\,)$, se concluye que $\| e_{\vec{r}} \|_\infty$ es una función monótona decreciente de r (pero esto no significa que $e_{\vec{r}}$ tenga $\| e_{\vec{r}} \|_\infty$ finito a cada r para cualquier distribución de luminosidades que se propusiera : quizá esa norma sea $+\infty$ a cada escala)

Retomemos ahora la ecuación ec. (3.2); llamemos $\vec{L} = \vec{r} + \vec{s}$; así pues, $L = r + s > r$. (**Observación:** Recuérdese que por construcción todos estos vectores están alineados y tiene el mismo sentido) Por tanto podemos escribir :

$$e_{\vec{L}}(\vec{x}_0) \;=\; \frac{r}{L} e_{\vec{r}}(\vec{x}_0) \;+\; \frac{L-r}{L} e_{\vec{L}-\vec{r}}(\vec{x}_0 + \vec{r})$$

De donde uno puede establecer inmediatamente la siguiente cadena de desigualdades :

$$\frac{r}{L} e_{\vec{r}}(\vec{x}_0) \;\leq\; e_{\vec{L}}(\vec{x}_0) \;\leq\; \frac{r}{L} e_{\vec{r}}(\vec{x}_0) \;+\; \frac{L-r}{L} \| e_{\vec{L}-\vec{r}} \|_\infty$$

Definiendo la función $H(r) \;=\; r \, \| e_{r\vec{u}_r} \|_\infty$ (con $\vec{u}_r$ el vector unitario en la dirección de todos estos vectores), de las desigualdades anteriores obtenemos que :

$$H(r) \;\leq\; H(L) \;\leq\; H(r) \;+\; H(L-r)$$

de donde se pueden extraer algunas conclusiones más :

3) La función $H(r)$ es creciente en r. (Primera desigualdad, ya que $r < L$)

4) Esta función tiene un crecimiento acotado (por una de crecimiento lineal si $H(0) = 0$.) (Segunda desigualdad)

5) (Suponiendo que algún $H(r) < \infty$) La posible divergencia de $\| e_{\vec{r}} \|_\infty$ en $r = 0$ es como mucho tan mal comportada como la de $\frac{1}{r}$. Esto se debe a que al ser $H(r)$ estrictamente creciente, entonces está acotada por arriba en un entorno del origen; y como $H(r) > 0$, está acotada por abajo, luego $H(0)$ está bien definido, no hay divergencia para $H(r)$. Se concluye recordando que $H(r) = r \| e_{\vec{r}} \|_\infty$

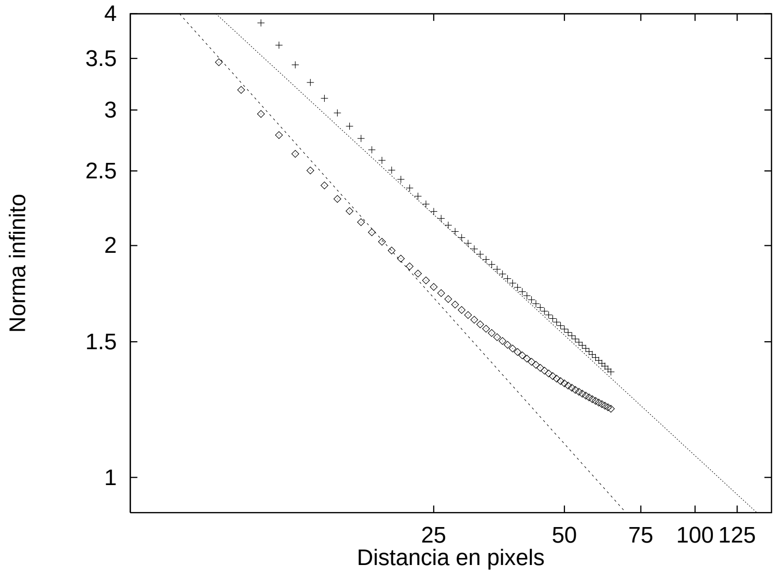


Figura 3.1: *Divergencia en $r = 0$ de $\| e_{\vec{r}} \|_\infty$.*
Rombos: Horizontal ; Cruces: Vertical. El gráfico es Log-Log

La figura (3.1) nos muestra la gráfica de $\| e_{\vec{r}} \|_\infty$ (estimado de los $\mathbf{e}_{\vec{r}}^p$ usando la relación de ESS, ecuación (2.10), que ya se explicará) frente a r en escala logarítmica; se han representado los de las variables VLB horizontal y vertical. Se ve que un ajuste lineal de la zona de r pequeño es razonable, lo cual significa que en tal zona $\| e_{\vec{r}} \|_\infty$ es aceptablemente similar a una ley de potencias. El ajuste por regresión lineal dio un exponente en la ley de potencias de -0.63 para la VLB horizontal y de -0.52 para la vertical, lo cual está de acuerdo con los argumentos teóricos anteriores.

Aunque el anterior gráfico procede de una estimación grosera, sirve para ilustrar un punto que es clave en toda la derivación, y es que para toda escala $r > 0$, $\| e_{\vec{r}} \|_\infty < \infty$. Esto nos permitirá, en su momento, acercarnos al modelo de She & Leveque.

Resultados experimentales

Todos los resultados experimentales se basan en el colectivo de imágenes que se detalla en la Sección 3.11

3.4 Limitaciones naturales del rango de distancias

Nuestras imágenes distienden aproximadamente $15^o \times 15^o$, que en ellas equivale a 256×256 pixels. El colectivo lo forman 45 de tales imágenes; ver Sección 3.11 para los detalles.

En la computación experimental de nuestras variable $e_{\vec{r}}$ hemos necesitado imponer un *cut-off* inferior y otro superior por las razones técnicas que ahora se exponen.

3.4.1 *Cut-off* inferior :

La determinación del *cut-off* inferior en sí misma ha sido objeto de cierta especulación. Por un lado, el gran crecimiento de la variable a medida que r disminuye hace que los momentos considerados (hasta $p = 40$) sean realmente gigantescos comparados con los que se obtiene en un amplio rango de r's mayores. Esto hace que uno debiera considerar órdenes de magnitud muy diferentes y por comodidad es mejor imponer un mínimo (que nosotros hemos tomado de 8 pixels).

También es cierto que la imagen tiene una resolución limitada y se podría esperar que hubiese problemas si uno fuese a escalas tan bajas como para que el "granulado" fuese perceptible. Por último, estimamos el valor numérico de las derivadas por incrementos de la luminosidad entre puntos muy próximos, o sea, entre pixels adyacentes, y por ello mismo si la distancia entre pixels es considerada "infinitesimal", se debe trabajar a escalas mínimas suficientemente mayores que ésta.

De cara a determinar si el efecto de los dos regímenes observado al tratar de ajustar SS (ver Sección 3.5.1) era debido a la presencia de un *cut-off* inferior producido por la falta de resolución, se sometió a las imágenes a un proceso de reducción de resolución como se describe en la Sección 3.17. En tal caso, el comportamiento de $e_{\vec{r}}$ sobre las imágenes reducidas sería comparable en distancias pequeñas, identificando r's en cada imagen por el número de pixels que en ella representa, independientemente de cual fuese la verdadera distancia física recorrida. Así, por ejemplo, se identifican en la gráfica de la figura 3.2 los puntos con 1 pixel de cada imagen, a pesar de que sobre la imagen real 1 pixel de la imagen comprimida en un factor 16 equivale la distancia de 2 pixels de la comprimida por 8, a 4 de la comprimida por 4, a 8 de la comprimida por 2 y a 16 de la imagen original.

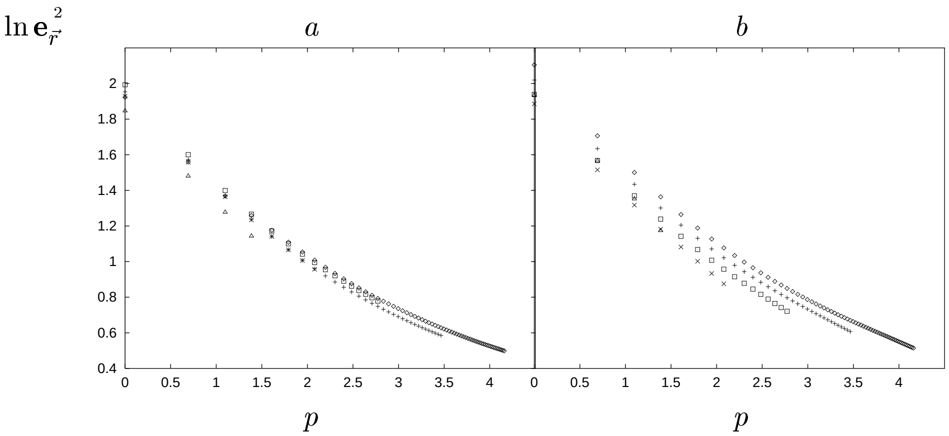


Figura 3.2: *Comparación de* $\mathbf{e}_{\vec{r}}^{2}$ *a través de colectivos a diferente resolución. a: Horizontal; b: Vertical. Rombos: Imagenes originales (bloques de 1 pixel); Cruces: Compresión en bloques de 2 pixels. Cuadrados: Bloques de 4 pixels. Aspas: Bloques de 8 pixels. Triángulos: Bloques de 16 pixels.*

Las figuras muestran que, dejando a un lado las fluctuaciones en el nivel medio (que se ven como un pequeño desplazamiento por una constante de las gráficas arriba o abajo) el momento de orden 2 es el mismo en esas escalas efectivas, lo cual nos indica que por el comportamiento a r pequeño viene determinado por la resolución y no por ninguna característica intrínseca de la imagen (que usando estas escalas efectivas se vería modificada).

Por ello, **se hace necesario** fijar un *cut-off* **inferior**, que será de al menos **16 pixels** para eliminar los efectos de granulado de la imagen; no obstante, en ESS se ha visto que ya 8 pixels es bastante. En todo caso, nunca se considerarán r de valor inferior a 8 pixels. Como último comentario, este *cut-off*, al contrario que el superior **no puede ser mejorado** con una ampliación de la estadística, o mejora muy lentamente. (Esta afirmación es una observación experimental.)

3.4.2 *Cut-off* superior :

El *cut-off* superior se debe al empobrecimiento de la estadística cuando uno llega a escalas comparables con el tamaño total de la imagen. Se debe tener en cuenta que nuestra variable $e_{\vec{r}}$ es un promedio a lo largo de un camino de tamaño r prefijado. Cuando r sea comparable a la máxima longitud de la imagen, el número de caminos posibles será cada vez menor y por tanto las anomalías estadísticas serán cada vez mayores.

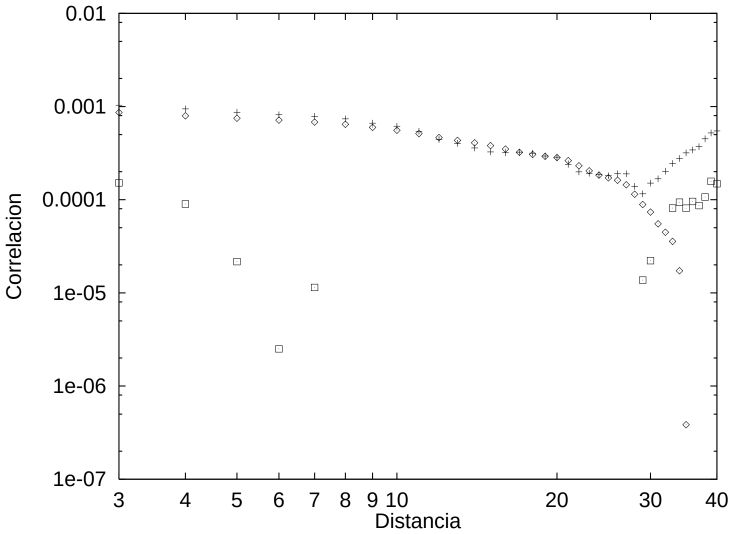


Figura 3.3: *Determinación del cut-off superior de la correlación luminosa Rombos: Correlación luminosa a dos puntos horizontal sobre una única imagen. Cruces: Sobre un cuarto de esa imagen. Cuadrados: Sobre un dieciseisavo. Ambos ejes son representados logarítmicamente*

De cara a dar una estimación fiable de la escala en la cual se producen estos efectos (y a partir de la cual no se debería aceptar los valores estimados de los momentos de $e_{\vec{r}}$) se propuso una sencilla prueba consistente en calcular la correlación luminosa a dos puntos.

La correlación luminosa a dos puntos calculada sobre una sola imagen presentaba una cola de decaimiento exponencial, que se desvía del comportamiento calculado experimentalmente sobre grandes conjuntos de datos, y que debería de ser lineal en el logaritmo de la distancia. Esto es una consecuencia de este empobrecimiento de la estadística. Para comprobar que ésta era efectivamente la causa, se tomaron cuartos y dieciseisavos de la imagen original, observando que entonces la saturación tenía lugar en escalas que eran la mitad y la cuarta parte de la original, respectivamente.

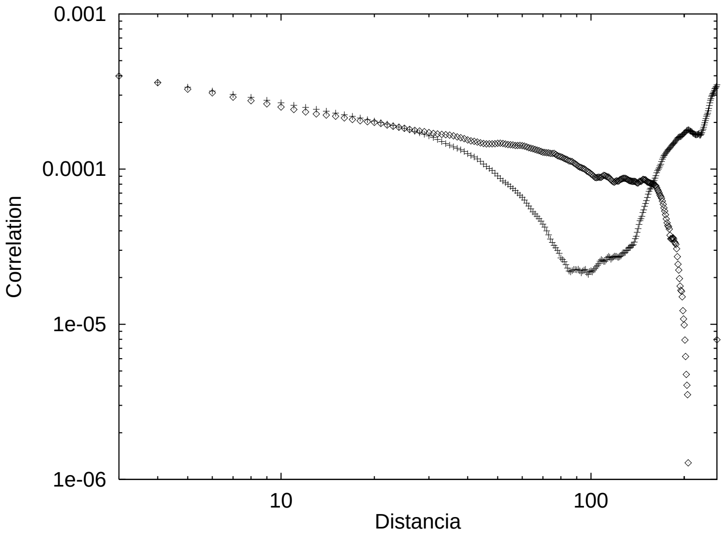


Figura 3.4: *Correlaciones luminosas a dos puntos promediadas sobre todo el colectivo.*
Rombos: Horizontal; Cruces: Vertical. Se han tomado ambos ejes logarítmicamente

Por definición de la correlación luminosa ha de ser una función positiva. Además, si el espetro de potencias $S(\vec{f})$ es proporcional a $f^{-(2-\eta)}$, entonces la correlación ha de ser de la forma $r^{-\eta}$ (donde r es la distancia). Podemos, por tanto, determinar en qué momento los efectos saturativos han arruinado este comportamiento. Como se ve en la figura 3.3 , este fenómeno se produce a escalas típicamente en torno a un 10% de la longitud máxima de la imagen que se tome, lo cual supone unos 30 pixels para una imagen entera de las que usamos.

Al promediar sobre las 45 imágenes el efecto de saturación se presenta considerablemente más tarde, alrededor de los 80 - 90 pixels en horizontal y quizá un poco menos en vertical(ver figura 3.4). Por ello consideraremos que podemos tomar una estadística fiable si no pasamos de este cut-off. Siendo un poco más conservadores, tomaremos como fiables distancias de hasta unos 70 pixels, aunque en ocasiones hemos usado magnitudes calculadas más allá de este valor para observar en ellas el efecto de saturación directamente.

3.5 Comprobación experimental de SS y ESS

3.5.1 1) SS :

En primer lugar, se trató de verificar si se producía SS. La figura 3.5 resume la situación para la VLB horizontal y vertical (**Nota :** Sólo trabajaremos con éstas, aunque eventualmente otras orientaciones serían posibles)

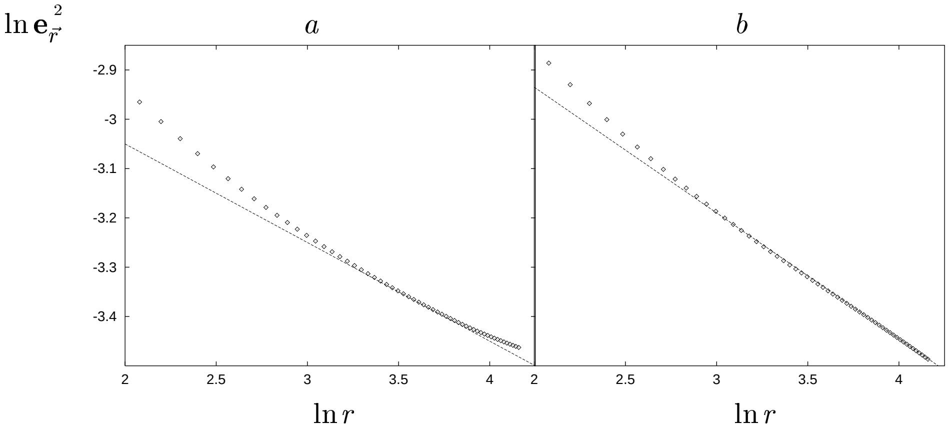


Figura 3.5: $\ln \mathbf{e}_{\vec{r}}^2$ *como función de* $\ln r$
a: Horizontal; b: Vertical. Se observan dos regiones con comportamientos lineales muy diferenciados

La gráfica de la figura 3.5 representa el logaritmo neperiano del momento de orden 2 frente al logaritmo neperiano de r (distancia medida en

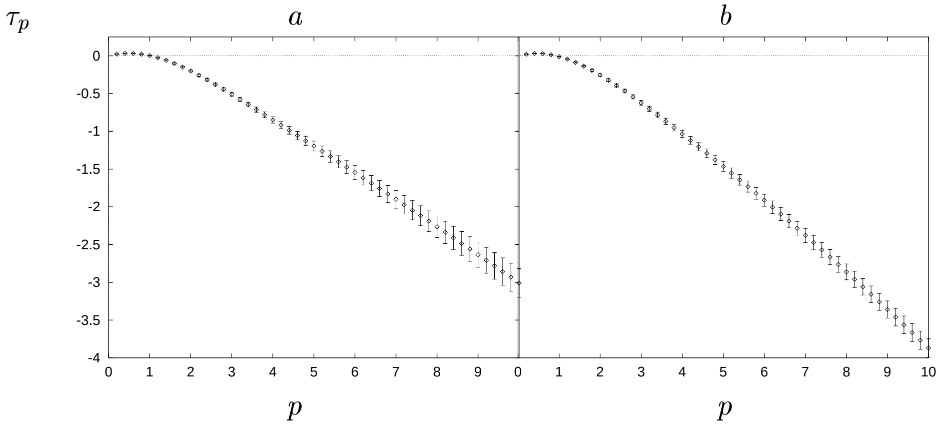


Figura 3.6: *Coeficientes τ_p en el ajuste sistemático de SS. a: Horizontal, b: Vertical*

pixels) entre el *cut-off* inferior, 8 pixels ($\ln 8 \approx 2.08$) y el superior, 64 pixels. ($\ln 64 \approx 4.16$) (Para detalles sobre la elección de los *cut-offs* ver Sección 3.4) Se verifica SS (ec. (2.2)) si la gráfica es una línea recta.

Se observa que la zona inicial y final de la grafica parecen poder ser ajustadas independientemente con diferentes líneas rectas. Las pendientes para el momento horizontal son de -0.32 y de -0.20 para los tramos inicial y final respectivamente; y para el vertical son de -0.35 y -0.26 . En ambos casos, la zona de transición parece situarse en los 16 pixels, aproximadamente.

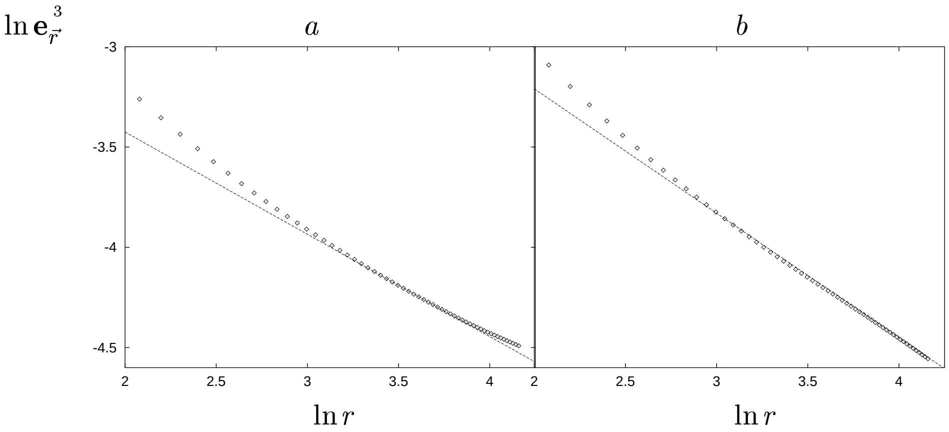


Figura 3.7: *Comprobando SS para el momento de orden 3.*
a: Horizontal; b: Vertical

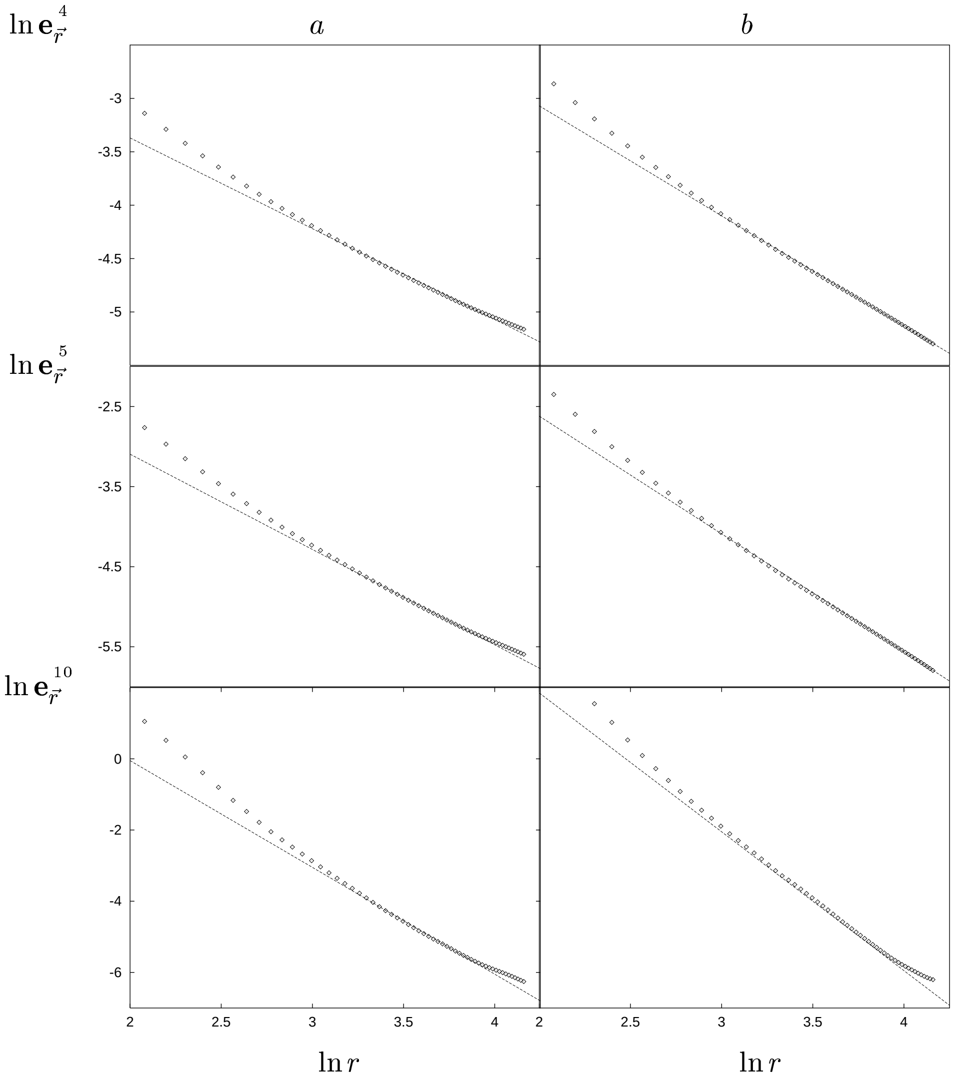


Figura 3.8: *Comprobando SS para los momentos de orden 4, 5 y 10.*
a: Horizontal; b: Vertical

Las figuras 3.7 y 3.8 muestran el ajuste de diversos momentos, en los cuales las dos regiones continúan estando presentes, y con una delimitación en escalas similar a lo apuntado con el momento de orden 2. Es por tanto probable que alguno de los dos comportamientos sea espurio y por ello aislable. De hecho, por los razonamientos que se han expuesto en la Sección 3.4, la primera parte del gráfico es espuria (no universal). Por tanto, se ha hecho un ajuste sistemático de la fórmula ec. (2.2) tomando como rango de validez desde $r = 32$ hasta $r = 64$ pixels. De este modo se ha obtenido la función τ_p que es representada en la figura 3.6. Sin embargo, a mayores órdenes de momento el *cut-off* superior empeora, como también puede verse por el aumento de las barras de error con p en esa figura.

La situación, pues, respecto a SS es que **se observa SS**, toda vez que se aíslen los efectos enmascaradores debidos a los *cut-offs*. Habrá que estudiar a continuación ESS, y si se revela más robusta, todos los cálculos que puedan ser derivados con esta última serán llevados con ella, usando SS sólo cuando sea absolutamente imprescindible (como p.ej., en el caso del análisis multifractal del Capíulo 5)

3.5.2 2) ESS :

La figura 3.9 es una gráfica representativa de las usadas para comprobar la posibilidad de ESS; por la ec. (2.4) el logaritmo del momento de orden p debe ser representable como una función lineal del logaritmo del de orden 2, con pendiente $\rho(p, 2)$ y término indendiente $\bar{\rho}(p, 2)$. A continuación se grafica el logaritmo neperiano del momento de orden 3 frente al del de orden 2.

Se observa en la gráfica de regresión, figura 3.9, que el ajuste lineal de los logaritmos es bueno, sin que se observe ninguna zona de pendiente diferente en el rango de r tomado. Aquí no es aparente ningún efecto de cambio de comportamiento, al contrario que en SS. Para reafirmar esto, se pueden observar las gráficas de diversos momentos escogidos. (figura 3.10)

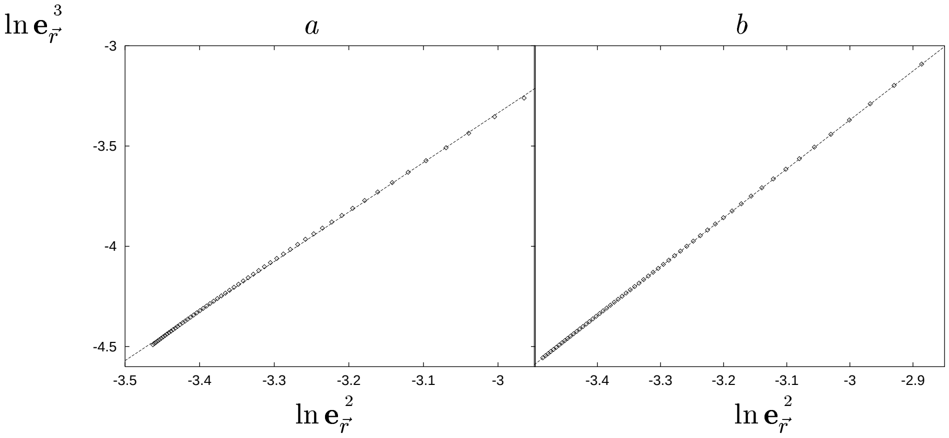


Figura 3.9: *Ajustando el momento de orden 3 respecto del 2 en ESS. a: Horizontal; b: Vertical*

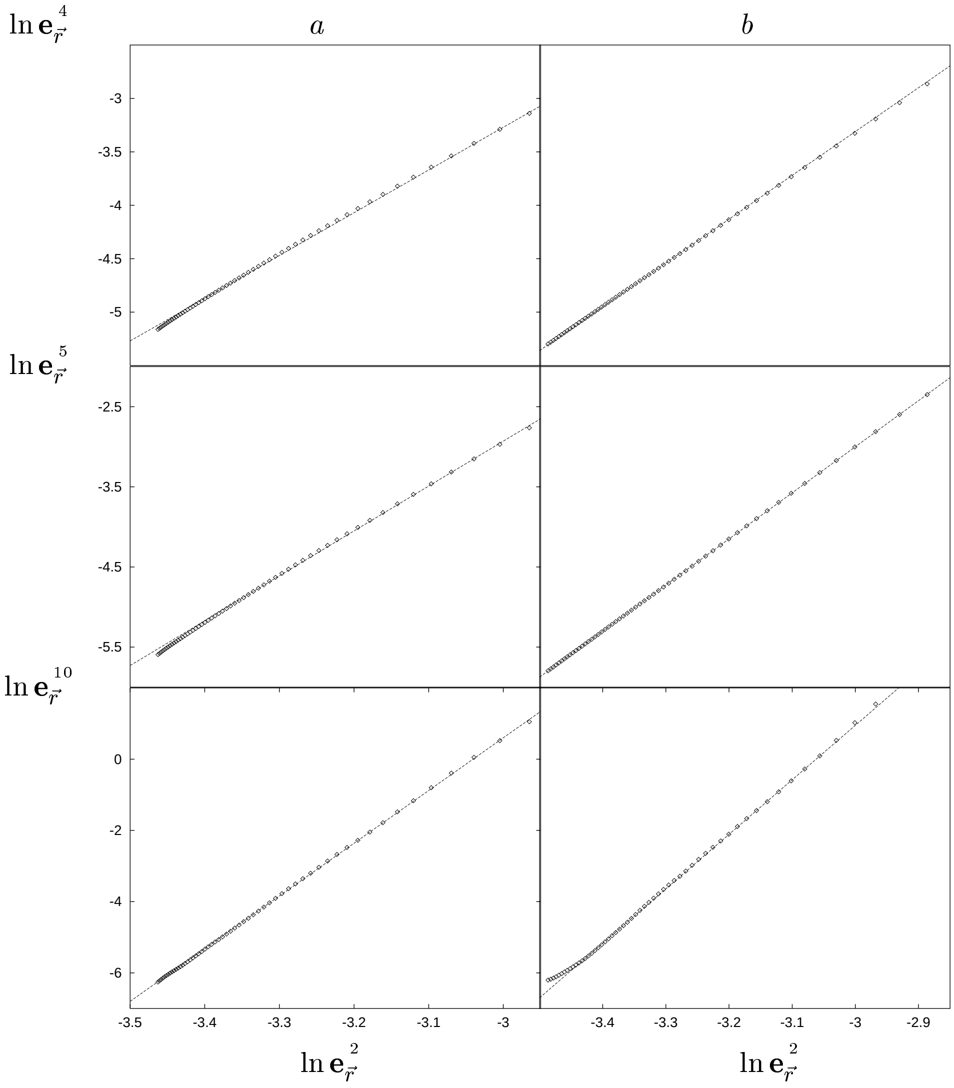


Figura 3.10: *Comprobando ESS para los momentos de orden 4, 5 y 10. a: Horizontal; b: Vertical*

En este caso parece viable un verdadero ajuste por una única recta de las diversas regresiones representadas, aunque es de señalar que en el extremo de la gráfica correspondiente a los r mayores, una pequeña desviación saturativa se observa, creemos que influída por la proximidad del *cut-off* superior.

La mejora en el ajuste siguiendo ESS respecto a SS, y en particular la desaparición de los dos regímenes en r no tiene por qué extrañar: SS implica ESS, por tanto ESS es más fácil de cumplir y de ahí que el ajuste tenga que ser mejor o igual que el otro: por lo que se ve, de alguna manera el efecto de tamaño finito se distribuye igualmente a todas las escalas, y así los coeficientes ajustados de ESS parecen más fiables

En todo caso, la evidencia experimental encuentra más aceptable ESS que SS, y por tanto trabajaremos con la primera. Es posible que aumentando la resolución de las imágenes tuviera mayor rango de aplicabilidad SS; por otro lado, determinados supuestos teóricos (los que emanan de las conclusiones del Capítulo 4) encuentran justificable SS y podría ser la verdadera naturaleza de los estadísticos; pero como nuestro enfoque es más amplio, nada nos impediría, en las conclusiones, particularizar para el caso de tener SS.

Por tanto, aceptamos que **nuestra variable posee ESS**.

Es interesante conocer los coeficientes $\rho(p,2)$ y $\bar{\rho}(p,2)$ como funciones de p. Sus gráficas experimentales se reflejan en las figuras 3.11 y 3.12 .

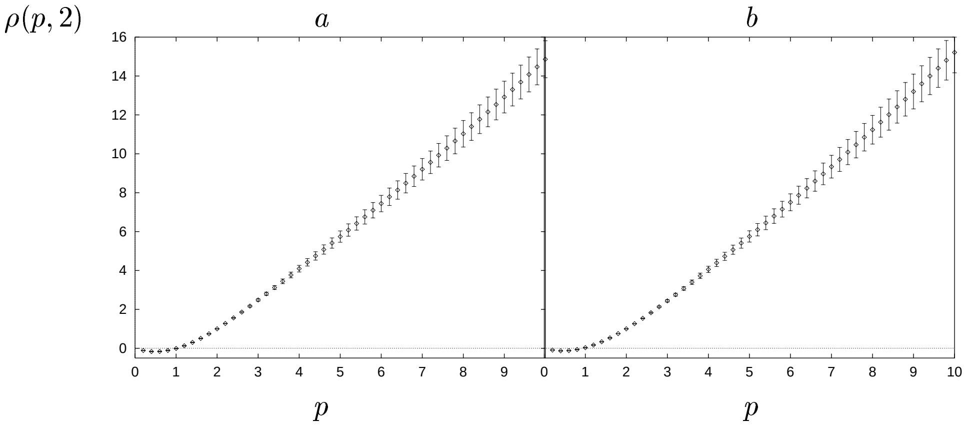


Figura 3.11: *Función $\rho(p,2)$ experimental.*
a: Horizontal; b: Vertical

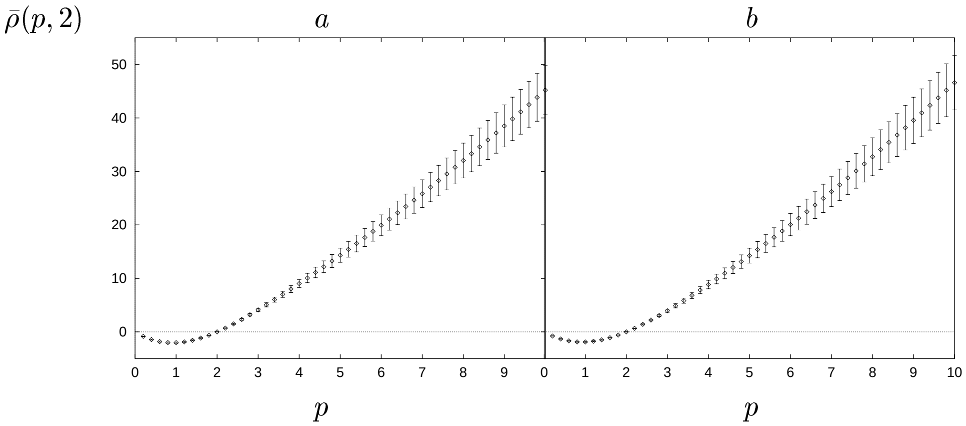


Figura 3.12: *Función $\bar{\rho}(p,2)$ experimental.*
a: Horizontal; b: Vertical

A partir de $p = 5$, el comportamiento es muy próximo al lineal (como se ve en la parte final de las gráficas) y por tanto no aporta gran cosa graficar esa parte (Los modelos sencillos que construiremos después, en el Capítulo 6, poseerán también este comportamiento asintótico lineal).

Dos propiedades emergen como importantes acerca de estos gráficos: son lineales en el infinito y tienden a cero cuando p tiende a cero. Ambas sirven para determinar interesantes propiedades de nuestra variable.

3.5.3 Acotación de la VLB

Ahora, podemos aplicar algunos de los resultados teóricos del Capítulo anterior a nuestro caso.

1. 1) De la Subsección 2.3.1, se concluye que la variable aleatoria **VLB es una variable acotada**: usando la ecuación (2.4) concluímos que :

$$\| e_{\vec{r}} \|_p = e^{[\bar{\rho}(p,2) \, + \, \ln[\mathbf{e}_{\vec{r}}^2] \, \rho(p,2)]/p}$$

   La observación experimental (ver SubSección 3.5.2) muestra que $\rho(p,2)$ y $\bar{\rho}(p,2)$ exhiben un comportamiento asintótico lineal , así que existen los límites :

$$\begin{cases} a &= \lim_{p\to\infty} \frac{\rho(p,2)}{p} \\ \bar{a} &= \lim_{p\to\infty} \frac{\bar{\rho}(p,2)}{p} \end{cases}$$

   Por tanto, según la ec. 2.10, $\| e_{\vec{r}} \|_\infty$ es un valor finito; y por la definición de la norma ∞, $e_{\vec{r}} \leq \| e_{\vec{r}} \|_\infty$. Por tanto, $e_{\vec{r}}$ es acotada.

2. De la Subsección 2.3.2 podemos concluir que la distribución de $e_{\vec{r}}$ a partir de los datos experimentales verifica que $\langle \ln e_{\vec{r}} \rangle$ es finita, pues :

$$\lim_{p\to 0} \| e_{\vec{r}} \|_p = e^{\lim_{p\to 0}[\bar{\rho}(p,2) \, + \, \ln[\mathbf{e}_{\vec{r}}^2] \, \rho(p,2)]/p}$$

   Observacionalmente, (SubSección 3.5.2) $\rho(p,2)$ y $\bar{\rho}(p,2)$ tienen derivada empírica definida desde la derecha en $p = 0$; o sea,

$$\begin{cases} \lim_{p\to 0} \frac{\rho(p,2)}{p} &= a_0 \\ \lim_{p\to 0} \frac{\bar{\rho}(p,2)}{p} &= \bar{a}_0 \end{cases} \tag{3.8}$$

donde tanto a_0 como $\bar{a}_0$ son finitos, y además negativos con nuestros datos (pendiente negativa cerca del origen). Por lo tanto,

$$\langle \ln e_{\vec{r}} \rangle \;=\; \bar{a}_0 \;+\; \ln[\mathbf{e}_{\vec{r}}^{2}]\, a_0 \tag{3.9}$$

y así $\langle \ln e_{\vec{r}} \rangle$ es finita (y además negativo). Por tanto, sabemos que $\wp(e_{\vec{r}} = 0) = 0$

3.6 Contraste experimental de los modelos de ESS

Las ecs. (2.16) y (2.17) nos permiten hacer una comprobación directa sobre la función $\rho(p,2)$ que obtenemos experimentalmente, buscando los parámetros (β en el caso de S-L; β y T en el caso de Castaing) que hacen un mejor ajuste a mínimos cuadrados de estos datos.

Identificando el $c(x)$ que aparece en la definición de $e_{\vec{r}}$, ec. (3.1), con el contraste luminoso, se observa experimentalmente que puede hacerse un ajuste muy bueno de la curva $\rho(p,2)$ usando el esquema de S-L, ec. (2.16).

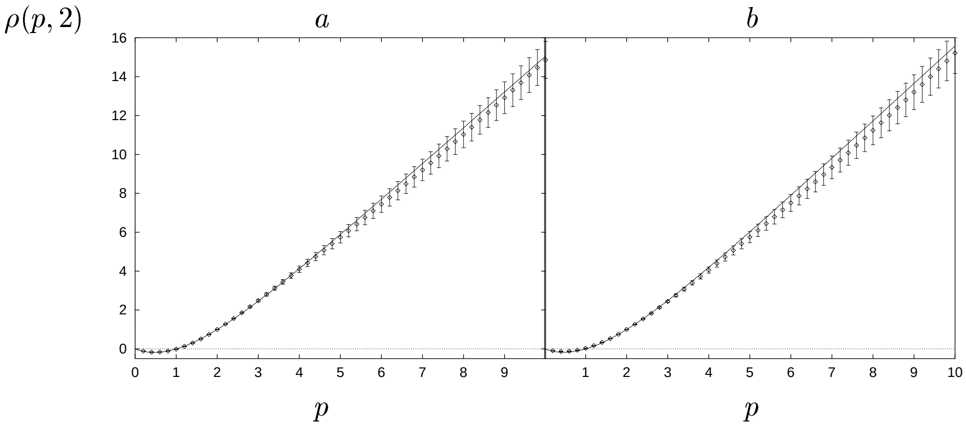


Figura 3.13: *Ajustes de las curvas experimentales de $\rho(p,2)$ según She-Leveque. a: Horizontal; b: Vertical*

En la figura 3.13 puede verse el resultado del ajuste. (Todos los detalles acerca de los ajustes que se comentan a conntinuación se pueden ver en la Sección 3.14)

Los valores obtenidos de β para $e_{\vec{r}}$ fueron de :

Horizontal : $\beta_{40} = 0.50 \pm 0.03$
$\beta_{10} = 0.46 \pm 0.05$
Vertical : $\beta_{40} = 0.50 \pm 0.04$
$\beta_{10} = 0.48 \pm 0.05$

donde β_{40} designa el valor estimado tomando todos los datos hasta $p = 40$, y β_{10} el que sale usando hasta $p = 10$; como se ven, son compatibles, y β_{40} tiene una menor incertidumbre, al usar más datos.

La gráfica de $\rho(p, 2)$ construído según S-L con ese β constituye un ajuste aceptable de los datos, que es lo que se muestra en la figura 3.13.

Puesto que el ajuste a S-L es tan bueno en esta caso, el ajuste a Castaing no puede ser mucho mejor, ya que en la fórmula de $\rho(p, 2)$ del modelo de Castaing, ec. (2.17), uno recupera la ec. (2.16) fijando $T = 0$; así que S-L está incluído en este esquema. De hecho el ajuste experimental arroja unas temperaturas $T \approx 10^{-2}$.

Muy diferente, sin embargo, es la situación cuando se define la variable $e_{\vec{r}}$ usando el logaritmo de la intensidad luminosa; en tal caso el ajuste a la S-L es peor, dando un error absoluto unas 1000 veces superior (en las mismas unidades que el equivalente anterior) para un mejor $\beta \approx 0.66$ pesando y sin pesar con las barras de error. Para este sistema es mejor un ajuste a un $\rho(p, 2)$ como el de Castaing, ec. (2.17), dando errores absolutos similares al S-L del caso anterior y unos valores de los parámetros de $\beta \approx 0.8$ y $T \approx 0.13$, aunque aquí varía bastante de la variable en dirección vertical a la horizontal.

3.7 Contraste de la representación integral

3.7.1 *A la Castaing*

Retomando la ec. (2.21), se puede escribir en términos de las variables $\ln f_{\vec{r}}$ de una forma muy simple.

$$\begin{array}{rcl} \rho_{\ln f_{\vec{r}}}(x) & = & \int dy \; G_{rL}(y) \; \rho_{\ln f_{\vec{L}}}(x-y) \\ , & = & G_{rL} \otimes \rho_{\ln f_{\vec{L}}}(x) \end{array} \tag{3.10}$$

o sea, la convolución de G_{rL} con la densidad de la variable $\ln f_{\vec{L}}$. De aquí es teóricamente muy simple obtener la función G_{rL} a partir de los datos: Sin más que hacer la transformada de Fourier de la fórmula anterior, se puede despejar :

$$\hat{G}_{rl}(u) \; = \; \hat{\rho}_{\ln f_{\vec{r}}}(u) / \hat{\rho}_{\ln f_{\vec{L}}}(u) \tag{3.11}$$

y ahora haciendo la antitransformada acabaríamos. Los datos $\rho_{\ln f_{\vec{r}}}(x)$ y $\rho_{\ln f_{\vec{L}}}(x)$ son fáciles de obtener, así que toda la operación parece muy directa. Tiene la ventaja adicional de no necesitar suponer nada especial sobre G_{rL}, que así puede ser cualquiera, incluso el de la representación integral general; serían los propios datos quienes nos dirían cómo es el núcleo.

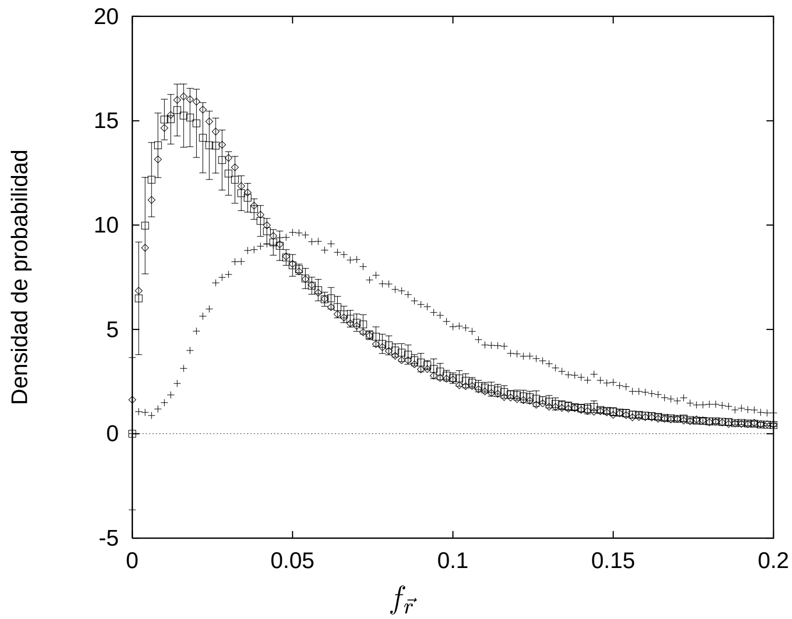


Figura 3.14: *Verificación de la representación integral de SS*
Las cruces definen la densidad a la escala $L = 64$; los rombos, a la escala $r = 16$ y los cuadrados la función definida al transformar la de escala 64 siguiendo un G_{rL} de parámetro $\beta = 0.5$, y $s(r, L) = A \ln \frac{r}{L}$. A fue estimado a ojo, $A \approx -1.5$

Desafortunadamente, el importante grado de error en los histogramas (ver Sección 3.15) introduce suficiente incertidumbre como para que este método tan directo sea mal comportado y no sea posible en la práctica usarlo para despejar G_{rL} ; posiblemente la situación cambiaría aumentando la estadística de imágenes y mejorando así en consecuencia la resolución de los histogramas con los que construímos las funciones de distribución empíricas.

En este estado de cosas, a lo único que hemos podido recurrir es a una aplicación directa de la fórmula ec. (2.21) y comprobar si la función de densidad empírica de la variable $f_{\vec{L}}$ se transforma apropiadamente en la de $f_{\vec{r}}$, para una elección de la función G_{rL} . Para reproducir los resultados de Castaing, uno ha de suponer que el proceso multiplicativo infinitamente divisible es Poisson Compuesto (esto es, un proceso de Poisson determina cuál es el número de veces que otro suceso elemental se verifica, supuesto que cada ocurrencia es independiente de las anteriores). Por tanto,

$$G_{rL}(x) \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{s^n}{n!} F^{\otimes n}(x) \tag{3.12}$$

donde $s = A \ln \frac{r}{L}$, $F(x)$ es el suceso elemental y $F^{\otimes n}(x)$ significa la convolución de $F(x)$ n veces consigo misma; $F^0(x) \equiv \delta(x)$ por convenio. She y Leveque queda incluído en este contexto del modo más simple : $F(x) \equiv \delta(x - \ln\beta)$ para S-L.

Hemos fijado la constante A de forma que $A \approx -1.5$. En realidad se vio probando que A era conveniente que estuviera entre 1 y 2 en nuestro caso, y esta elección de parámetros es la que ha resultado más satisfactoria a la hora de transformar las funciones de densidad de una escala a otra para diversos pares de escalas (r,L) propuestas; ciertamente, es caprichosa la fijación de A así. El valor de β se fijó aproximado a los obtenidos en la interpolación de $\rho(p,2)$, $\beta \approx 0.5$; ver Sección 3.6 . No se ha intentado una minimización sistemática para determinar estos valores, sino simplemente comprobar por otro método lo ya obtenido en aquella Sección. Los datos de los histogramas son muy ruidosos (las barras de error tienen un radio de más del 10% del valor máximo en el entorno de éste), y la estimación permite un cierto grado de relajo en la fijación de esos valores dando resultados cualitativamente iguales. A pesar de todo lo dicho, el resultado es muy satisfactorio.(ver figura 3.14)

3.7.2 Representación integral general

Se ha trabajado también con la representación integral más general de ESS, que es la que se explica en la Sección 2.6. La forma para G_S es la misma que se da en la ec. (3.12), sólo que aquí s se define como en ec. (2.26). Concretamente, como los momentos e^{py} con este núcleo son :

$$\int_{-\infty}^{0} dy \; G_S(y)\, e^{py} \;=\; e^{s(\beta^p - 1)}$$

se obtiene que $k = \beta^2 - 1$ y por tanto :

$$s \;=\; \frac{1}{1-\beta^2}\;\ln\left[\frac{\mathbf{f}_{\vec{L}}^{\;2}}{\mathbf{f}_{\vec{r}}^{\;2}}\right]$$

(se ha invertido el orden en la fracción para presentar todas las cantidades como positivas). Los primeros intentos de aplicar directamente esta fórmula en los cálculos resultaron muy insatisfactorios, como consecuencia de la gran imprecisión en la evaluación de $\mathbf{f}_{\vec{r}}^{\;2}$. Como se detalla en la Sección 3.8, hay un grado de incertidumbre muy grande en la determinación experimental de los histogramas, debido a la dificultad de establecer con precisión cuál es el valor de $\| e_{\vec{r}} \|_\infty$, que resulta sistemáticamente subestimado, y tanto más cuanto menor es la escala r que se trata. De este modo, el valor que etiquetamos como $f_{\vec{r}} = 1$ en el histograma es en realidad un valor menor. Despreciando la contribución de la cola (que sabemos que es despreciable hasta los momentos que consideramos, pues eso es lo que introduce el error en $\| e_{\vec{r}} \|_\infty$), podemos considerar que en realidad estamos calculando momento de una variable :

$$f_{\vec{r}}^{\;*} \approx \kappa_r f_{\vec{r}}$$

con $\kappa_r \geq 1$ y decreciente con r. De este modo, si el orden p de un momento que consideremos no es muy alto,

$$< [f_{\vec{r}}^{\;*}]^p > \approx\; \kappa_r^p\, \mathbf{f}_{\vec{r}}^{\;p}$$

Por otra parte es inmediato extender la fórmula que define s para cualquier orden p en la hipótesis de S-L; dado que en tal caso $\sigma(p,2) = \frac{1-\beta^p}{1-\beta^2}$, entonces :

$$s \;=\; \frac{1}{1-\beta^p}\;\ln\left[\frac{\mathbf{f}_{\vec{L}}^{\;p}}{\mathbf{f}_{\vec{r}}^{\;p}}\right] \tag{3.13}$$

Si ahora definimos $\Omega_p = \ln\frac{<[f_L^{\;*}]^p>}{<[f_{\vec{r}}^{\;*}]^p>}$ (que es lo que podemos calcular directamente de los histogramas experimentales), se obtiene que :

$$\Omega_p \;=\; (1-\beta^p)s \;+\; p\Lambda$$

y donde $\Lambda = \ln\frac{\kappa_L}{\kappa_r}$, una constante que mide el grado de distorsión experimental relativa de los histogramas a las escalas L y r. Resulta entonces que es posible despejar de los datos experimentales (Ω_p) los valores de β, s y

Λ una vez fijadas las escalas L y r. Tomando los tres primeros múltiplos enteros de un momento p_0 dado, se obtiene :

$$\begin{cases} \Omega_{p_0} &= (1-\beta^{p_0})s + p_0\,\Lambda \\ \Omega_{2p_0} &= (1-\beta^{2p_0})s + 2p_0\,\Lambda \\ \Omega_{3p_0} &= (1-\beta^{3p_0})s + 3p_0\,\Lambda \end{cases}$$

de donde inmediatamente :

$$\begin{cases} \beta &= [\frac{2\Omega_{2p_0}-\Omega_{p_0}-\Omega_{3p_0}}{2\Omega_{p_0}-\Omega_{2p_0}}]^{1/p_0} \\ \\ s &= \frac{2\Omega_{p_0}-\Omega_{2p_0}}{[1-\beta^{p_0}]^2} \\ \\ \Lambda &= \frac{\Omega_{p_0}-(1-\beta^{p_0})s}{p_0} \end{cases} \tag{3.14}$$

Lo cual nos permite hacer una mejor estimación de $s(r,L)$; por ende, aproximamos mejor el verdadero valor de $\ln\left[\frac{\mathbf{f}_{\vec{L}}^2}{\mathbf{f}_{\vec{r}}^2}\right]$. Este método nos da una primera intuición de los errores cometidos por el trunque de la cola del histograma, lo cual viene medido por el parámetro $\Lambda = \ln\frac{\kappa_L}{\kappa_r}$. Si la escala L es suficientemente grande, debido a que la distribución desplaza su máximo a la derecha, es de esperar que el error en la estimación del máximo sea pequeño y así $\kappa_L \approx 1$; por otro lado, $t_r = \frac{1}{\kappa_r}$ (luego $t_r < 1$) es el punto donde se truncó el histograma teórico, es el máximo experimental de la verdadera variable $f_{\vec{r}}$; y así :

$$t_r \approx e^{\Lambda}$$

Como se indicó, no se pueden tomar valores de p_0 muy grandes, por la significación de la cola, ni muy pequeños, por problemas de precisión finita en los histogramas.

Datos experimentales : Se tomaron las escalas $r = 16$ y $L = 64$. Se observó que la zona en la que los parámetros estimados de este modo eran más estables correspondía al entorno de $p_0 \approx 0.5$, y que este valor era donde s alcanzaba el máximo valor posible. Para ese p_0 los valores obtenidos fueron los siguientes :

$f_{\vec{r}}$ **horizontal :**

s = 2.018
Λ = -0.273
β_{exp}= 0.614

$f_{\vec{r}}$ **vertical :**

s = 2.715
Λ = -0.438
β_{exp}= 0.644

Lo cual, incluso en la hipótesis más favorable de $t_L \approx 1$, nos da que :

Horizontal : $t_r = 0.761$
Vertical : $t_r = 0.645$

que supone un error importante en la estimación de esa cola[3] (del 23.9% en el primer caso y del 35.5% en el segundo). Mientras que s y Λ son prácticamente constantes en un entorno de $p_0 = 0.5$, la variación en β es apreciable, y los valores estimados con otros p_0 cercanos son muy similares a $\beta \approx 0.5$. Por ello no usaremos la estimación de β que nos da este método, sino que tomaremos un $\beta = 0.5$ de nuestra estimación anterior por medio de $\rho(p, 2)$.

En la figura fig. 3.15 se refleja el resultado para $\beta = 0.5$ usando la estimación de s calculada previamente para $f_{\vec{r}}$ horizontal y para las escalas citadas, $r = 16$ y $L = 64$

En esa figura se ve que finalmente se puede conseguir dar una buena estimación de los histogramas sin introducir elementos extraños, como es la A de la SubSección anterior, cuyo valor habría que justificar. Precisamente, como SS es un caso particular de esta representación más general, y así necesariamente s verifica la ec. (2.27), con $k = \beta^2 - 1$, luego :

$$s \;=\; \frac{t_2}{1-\beta^2}\;\ln\frac{L}{r}$$

El A que propusimos a ojo en el caso horizontal fue de $A = -1.5$; para $\beta = 0.5$ esto implica ($t_2 \;=\; -A\,(1-\beta^2)$) :

[3]Más detalles sobre las consecuencias de esto se dan en la Sección 3.8.

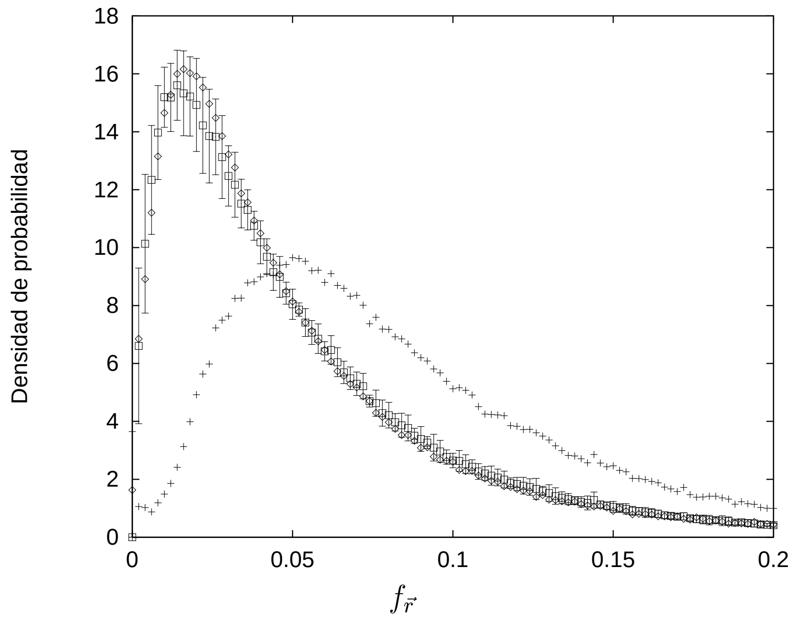


Figura 3.15: *Verificación de la representación integral de ESS*
Las cruces definen la densidad a la escala L=64; los rombos, a la escala r=16 y los cuadrados la función definida al transformar la de escala 64 siguiendo un G_{rL} *de parámetro* $\beta = 0.5$*, y con s estimado por* $s = \frac{1}{1-\beta^2} \ln[\mathbf{f}_{\vec{L}}^{\,2} / \mathbf{f}_{\vec{r}}^{\,2}]$

$$t_2 \;=\; 1.125$$

para esta VLB. Denotando como de costumbre τ_2 el exponente SS de la variable $e_{\vec{r}}$, es trivial demostrar que :

$$t_2 \;=\; -\frac{1+\beta}{1-\beta}\,\tau_2$$

por lo que para $\beta = 0.5$, $t_2 \;=\; -3.\,\tau_2$, o sea, $\tau_2 = -0.375$, que no es muy diferente del medido experimentalmente para la región de r pequeño (ver figura 3.5), pero si del de r grande. Quizá una mejor estadística, que permitiera reforzar la hipótesis de SS, permitiría mejorar esta estimación; pero en cualquier caso, si SS es correcta tendríamos (dentro de un razonable margen) que poder predecir el valor de A.

3.8 Problemas numéricos de la variable normalizada

La determinación experimental de la variable $f_{\vec{r}}$ tiene un gran obstáculo a tener en cuenta, y es la dificultad en dar una estimación suficientemente precisa de $\| e_{\vec{r}} \|_\infty$, lo cual es absolutamente indispensable de cara a construir esta variable, que además se muestra muy sensible a errores en este particular. La razón por la que es tan difícil estimar correctamente el valor de $\| e_{\vec{r}} \|_\infty$ es bastante simple; obsérvese la figura 3.8.

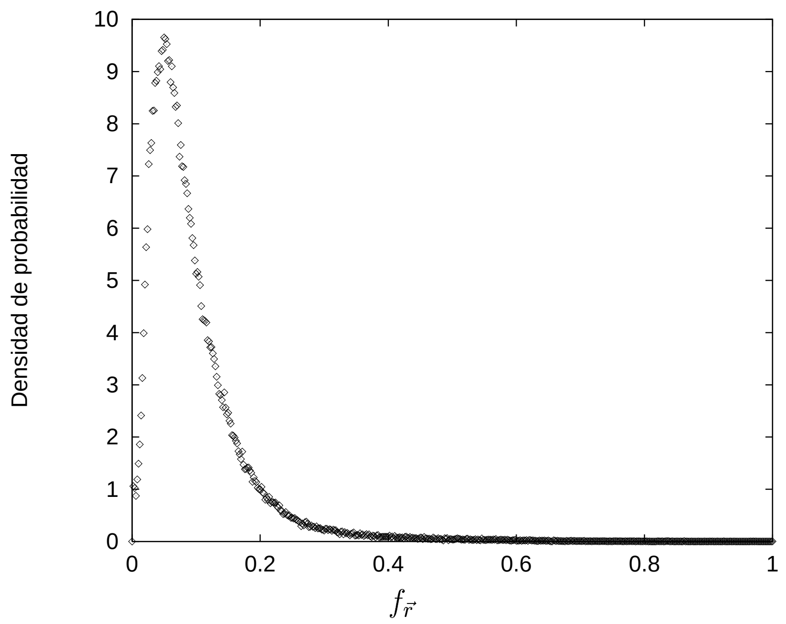


Figura 3.16: *La larga cola de la distribución de probabilidad. Escala $r = 64$ pixels; variable $f_{\vec{r}}$ horizontal*

Esta figura representa el histograma que se ha estimado empíricamente para la variable normalizada a la escala $r = 64$ para la dirección horizontal; como ésta está relacionada con la variable $e_{\vec{r}}$ a través de una constante multiplicativa, esta función de densidad y la correspondiente a la variable $e_{\vec{r}}$ tienen la misma forma. La figura presenta una larga cola hasta su máximo (1 para la variable $f_{\vec{r}}$, $\| e_{\vec{r}} \|_\infty$ para $e_{\vec{r}}$); de la figura está claro que los valores comprendidos entre el 40% del valor máximo y éste tienen un probabilidad de aparición muy pequeña. Por ello, la probabilidad de que en un conjunto aleatorio de medidas uno llegue a tomar una suficientemente próxima al verdadero valor máximo puede ser excesivamente pequeña como para que la estimación directa sea fiable.

Por otro lado, sabemos que al aumentar la escala de la variable la estadística se reduce rápidamente, por lo que es de esperar en cuanto a este argumento que la estimación del máximo ($\| e_{\vec{r}} \|_\infty$) sea tanto peor cuando mayor sea la escala r que consideremos. Sin embargo, también es cierto que a medida que r aumenta el mayor peso de la distribución se desplaza hacia la derecha, como cabría de esperar de los argumentos teóricos de la SubSecciones 3.3.2 y 3.3.4, y que además es observado experimentalmente. De todos modos, en la competición de ambos mecanismos parece ganar el primero, por la aparición de cortes y oscilaciones de la estimación directa (ver figura 3.17)

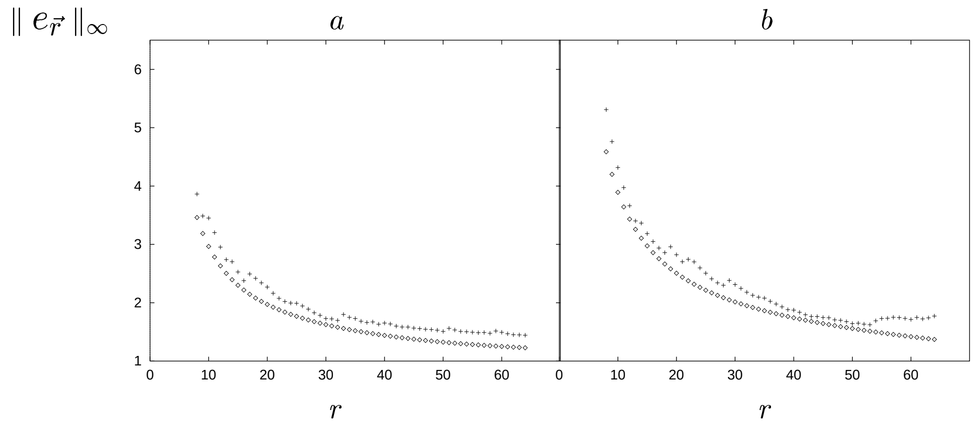


Figura 3.17: *Valores estimados de* $\| e_{\vec{r}} \|_\infty$
Rombos: Estimación ESS; Cruces: Estimación directa. a: Horizontal; b: Vertical

Otro modo de evaluar $\| e_{\vec{r}} \|_\infty$ es aplicar la fórmula ec. (2.10); esta estimación tiene la ventaja de que si se evalúa con poco error las constantes a y $\bar{a}$, como el momento de orden 2 de $e_{\vec{r}}$ se puede obtener con bastante precisión (es un momento de un orden relativamente bajo) se podría estimar de modo preciso el verdadero valor del $\| e_{\vec{r}} \|_\infty$ y con una observación indirecta, de forma muy elegante. Lo malo de este método es que por razón de la exponencial que define la relación, los errores se propagan exponencialmente y por tanto la calibración de las pendientes asintóticas ha de ser muy precisa. De hecho, observando la gráfica de la figura 3.17 se ve que esta estimación es peor que la directa (queda por debajo)

Hay que destacar cuán importante es la buena calibración de $\| e_{\vec{r}} \|_\infty$. Piénsese que un error del 20% en su estimación a una escala desplazaría relativamente el histograma una cantidad similar a la izquierda, con importantes consecuencias a la hora de tratar de aplicar la fórmula ec. (2.21), y quizá pueda esto explicar el fracaso del método directo basado en la ec. (3.11).

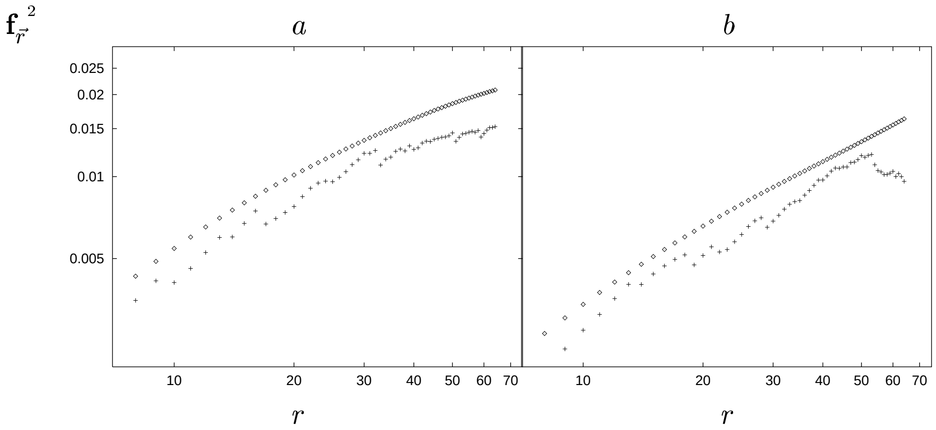


Figura 3.18: *Valores estimados de* $\mathbf{f}_{\vec{r}}^{\,2}$
Rombos: Estimación ESS; Cruces: Estimación directa. a: Horizontal; b: Vertical. La gráfica está representada con ejes logarítmicos

Incluso la gráfica del momento de orden 2 de $f_{\vec{r}}$, $\mathbf{f}_{\vec{r}}^{\,2}$, calculado directamente de los histogramas (ver figura 3.18) presenta un fuerte nivel de oscilaciones, sin duda de carácter estadístico por culpa de lo malo de la estimación, haciéndose inviable la comprobación de SS para esta variable. En la misma gráfica, calculando $\mathbf{f}_{\vec{r}}^{\,2}$ con el segundo momento de $e_{\vec{r}}$ dividido por la estimación ESS de $\| e_{\vec{r}} \|_\infty$ al cuadrado no se producen quiebros. La situación, sin embargo, empeora pues el checkeo directo de la existencia de ESS sobre los momentos de $f_{\vec{r}}$ así obtenidos da como resultado que no hay tal propiedad a partir de $p \simeq 10$, cuando teóricamente está garantizada por ec. (2.19)(figura 3.19). Tenemos comprobado que este efecto es menos importante cuando se amplía la estadística (se aumenta el tamaño del ensemble), lo cual es lógico, puesto que eliminamos el primer orden de la dependencia en p y vamos al orden siguiente, lo cual requiere medidas más y más finas.

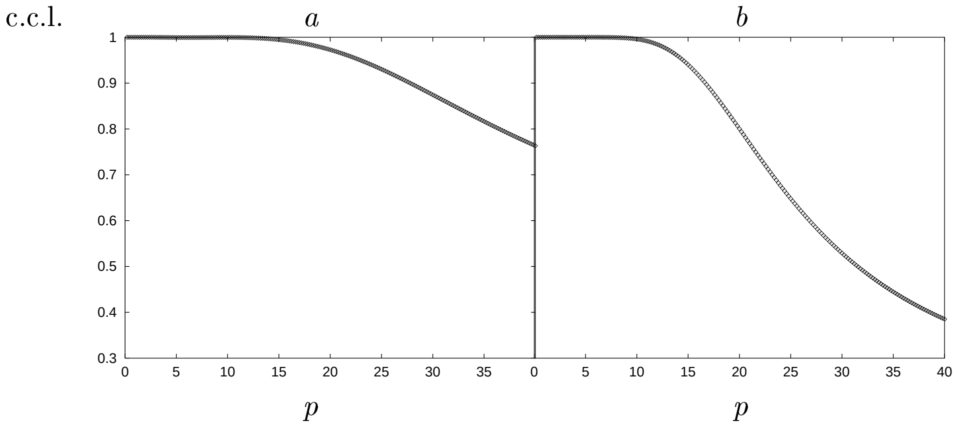


Figura 3.19: *Coeficientes de regresión lineal del ajuste de la ESS para* $f_{\vec{r}}$. *a: Horizontal; b: Vertical. Se observa que en un entorno de* $p = 15$ *la regresión lineal empieza a perder sentido; de hecho, el ajuste momento a momento revela que en torno a* $p = 10$ *el momento está ya demasiado perturbado y la regresión es imposible*

No obstante, se puede aplicar directamente la fórmula ec. (2.19) para determinar el valor de $\sigma(p,2)$ sin más que conocer el valor de la pendiente asíntotica de $\rho(p,2)$. En la figura 3.20 se ha representado esta función.

El gráfico no es demasiado satisfactorio, pero hay que tener en cuenta que al intentar apreciar el segundo orden en un desarrollo de $\rho(p,2)$ en p, las barras de error se disparan para esta estimación. Además, está claro que los exponentes de ESS obtenidos no son muy fiables, presentando un cierto sesgo sistemático del que no pueden dar cuenta las barras de error. El coeficiente, para el caso de tener un $\rho(p,2)$ de acuerdo al modelo de She & Leveque (ec. 2.16), sería :

$$\sigma(p,2) \;=\; \frac{1 \;-\; \beta^p}{1 \;-\; \beta^2}$$

que es también representado en la misma gráfica. Las barras de error son tan inmensas que, al menos en el caso vertical, engloban esa posibilidad; y en el caso horizontal no queda muy alejado.

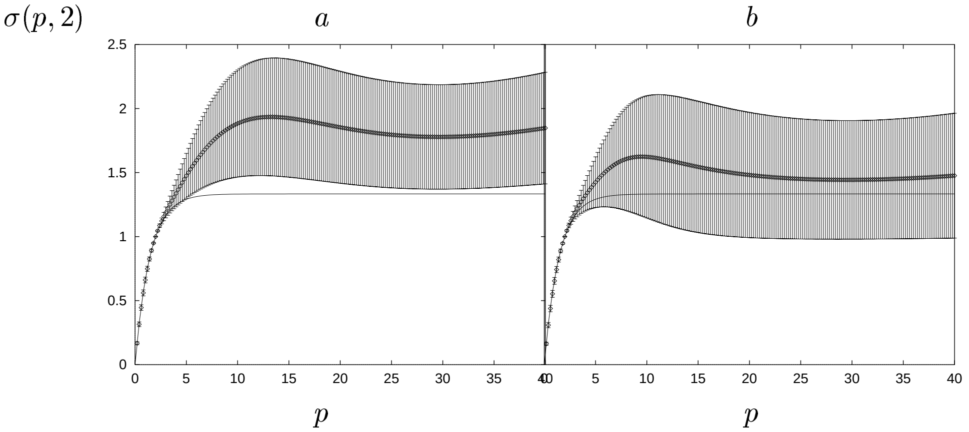


Figura 3.20: *Valor estimado del coeficiente* $\sigma(p,2)$
Se representa con las barras de error estimadas y comparado con la predicción de She & Leveque, $\beta = 0.5$. *a: Horizontal; b: Vertical.*

3.9 *Whitening* y VLB

Se ha dicho que quizá con la estadística de una variable que caracterice a los bordes convenientemente elegida y la función de correlación luminosa a dos puntos se pudiera llegar a reconstruir la estadística de las imágenes naturales. Si la estadística de las VLBs presenta una propiedad tan interesante como es la ESS podríamos llegar a dar una descripción relativamente simple de la de imágenes. La cuestión que surge es si son completamente independientes estas dos características, o bien a través de la estadística de las VLBs (y quizá con pequeñas suposiciones) uno podría llegar a desarrollar toda la estadística del ensemble de imágenes naturales.

Para intentar comprender esto, y para avanzar en lo que pudiera ser una futura expansión teórica de la densidad de probabilidad de este ensemble, tomamos como punto de partida un ensemble gaussiano al que se le incorporó como función de correlación la conocida. En este ensemble se calculó analíticamente la función marginal de probabilidad de tener una VLB de escala r a lo largo de una dirección dada en un punto concreto. Para una función de correlación cualquiera la expresión general es complicada y desagradable, aunque reproduce fácilmente los límites conocidos ($r \to 0$ y $r \to \infty$). La expresión de la función característica (transformada de Fourier

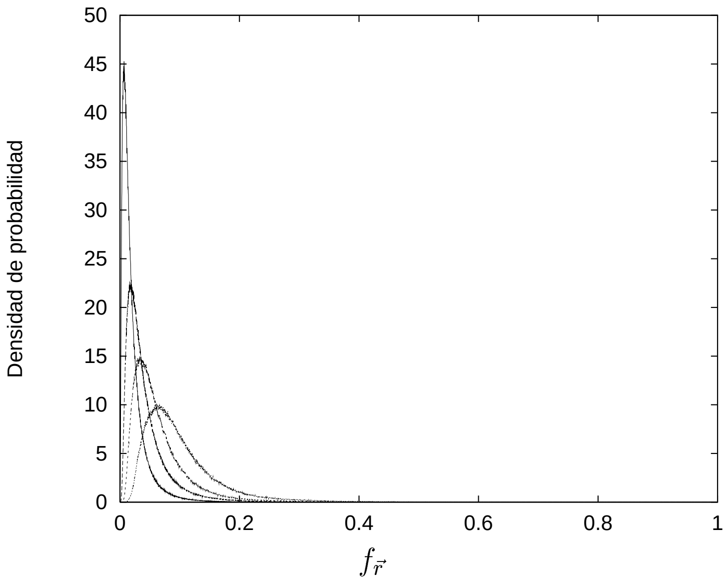


Figura 3.21: *Histogramas de $f_{\vec{r}}$ a diferentes escalas tras whitening. A mayor escala, más pequeño es el máximo. En la figura se representan los histogramas de la variable horizontal a las escalas r = 8, 16, 32 y 64 pixels.*

de la densidad de probabilidad) es :

$$\hat{\rho}_{e_{\vec{r}}}(u) \;=\; e^{-\frac{1}{2}\,\chi(u)}$$

con :

$$\chi(u) \;=\; r\int_{-\infty}^{\infty} dy\;\ln[1\;+\;\frac{4\pi i}{r}\,\Omega_r(y)] \tag{3.15}$$

donde :

$$\Omega_r(y) \;=\; \int_{-r}^{r} dw\, C_2(w)\, e^{2\pi i w y}$$

y $C_2(r)$ no es más que la segunda derivada respecto de su argumento de la función de correlación a dos puntos $C(r)$, que es función sólo del módulo del desplazamiento, r. Por supuesto se supone existe tal derivada, y en caso de no tomar una correlación ni siquiera contínua hay que rehacer el cálculo desde el principio, pues para llegar a esta fórmula (ec. (3.15)) se hacen límites que precisan de esa continuidad.

Resulta interesante ver que si se decorrela el ensemble de imágenes previamente (esto es, se hace whitening), entonces la distribución de $e_{\vec{r}}$ es independiente de r e igual a la de la ec. (3.4), o sea, una δ de Dirac.

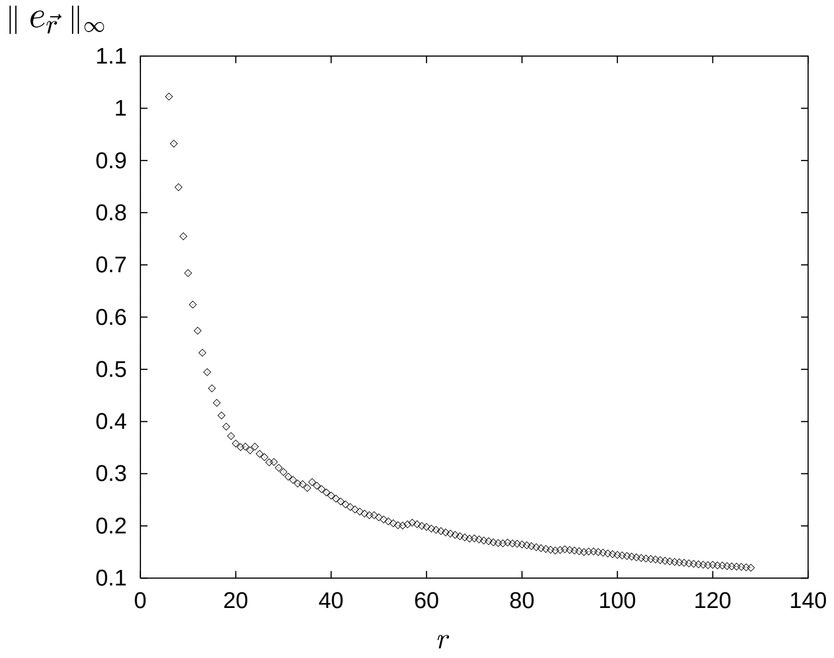


Figura 3.22: $\| e_{\vec{r}} \|_\infty$ *empírico tras el proceso de decorrelación*

Por ello, aunque no más sea a efectos de rechazar la hipótesis de ensemble gaussiano de imágenes resulta conveniente aplicar el whitening. Por otra parte, se ha visto experimentalmente que tras esta decorrelación la variable $e_{\vec{r}}$ obtenida de ese ensemble sigue poseyendo ESS , lo cual parece una propiedad más esencial. Más aún, la curva de $\rho(p, 2)$ podría ser ajustada de acuerdo con las ley propuesta por She-Leveque con un parámetro β ligeramente diferente de 0.5, aunque las barras de error son muy considerables: esto podría ser muy importante, si se confirmase que $\beta \approx 0.5$ tras la decorrelación: indicaría que las propiedades de la VLB dependen exclusivamente de la estadística de orden superior y no de la estructura redundante de la imagen. Nuestra variable sería una buena descripción de la estructura intrínseca de las imágenes.

Empero, el proceso numérico para la elaboración de las imágenes blanqueadas ha revelado ser una fuente importante de imprecisión, por lo que se requiere un análisis muy detallado y laborioso antes de dar una opinión firme, posiblemente con imágenes de mayor tamaño para evitar *aliasing*. Lo que en cualquier caso queda claro es que sí que depende la variable de r, con lo que se rechaza la hipótesis gaussiana. (ver figuras 3.21 y 3.22)

3.10 Extensiones de la definición de la VLB

3.10.1 La variable bidimensional

La generalización más obvia de nuestra definición consiste en tomar la integral que define $e_{\vec{r}}$ en dos dimensiones, eliminando al mismo tiempo la dependencia en la orientación. Así, definiríamos nuestra variable como :

$$e_{\vec{r}}(\vec{x}) \;=\; \frac{1}{|B_{r/2}(\vec{x})|}\int_{B_{r/2}(\vec{x})} d^2\vec{x}\,'\;|\nabla c|^2(\vec{x}\,') \tag{3.16}$$

donde $B_{r/2}(\vec{x})$ es, como siempre, la bola de centro $\vec{x}$ y radio $r/2$, con una norma dada; y $|B_{r/2}(\vec{x})|$ su área. En las computaciones experimentales, por comodidad, es usual tomar estas bolas como cuadrados centrados en el punto.

Las **ventajas** de tal definición son obvias: detectaría la presencia de bordes en un área, sin privilegiar ninguna dirección. De cara al análisis multifractal (a ser desarrollado sobre imágenes en el Capítulo 5), tiene la ventaja de permitir considerar la imagen como un todo, en vez de restringirse a los subespacios de las líneas, como se tendría que hacer con la definición unidimensional.

Los **inconvenientes** son de naturaleza eminentemente experimental, pero no por ello ignorables: el número de bolas independientes que pueden tomarse sobre un muestreo de imágenes dado decrece cuadráticamente con el radio r de tales bolas (frente al decaimiento lineal en r que supone tomar intervalos). Esto quiere decir que de cara a una determinación indirecta de las propiedades de la imágenes a través de los momentos de esta variable, resultará imposible llegar a considerar momentos y distancias relativamente grandes con esta definición. De hecho, el *cut-off* superior disminuye tremendamente (ver figuras)

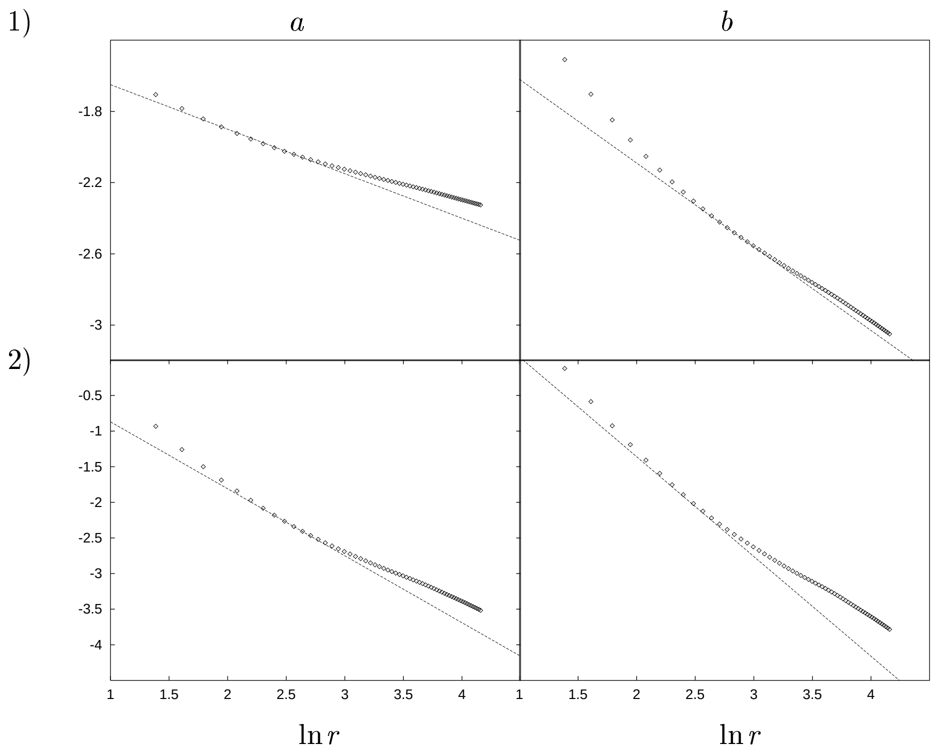


Figura 3.23: *Comprobando SS (2D) para los momentos de orden 2, 3, 4 y 5.*

1.a: $\ln \mathbf{e}_{\vec{r}}^{2}$; *1.b:* $\ln \mathbf{e}_{\vec{r}}^{3}$
2.a: $\ln \mathbf{e}_{\vec{r}}^{4}$; *2.b:* $\ln \mathbf{e}_{\vec{r}}^{5}$

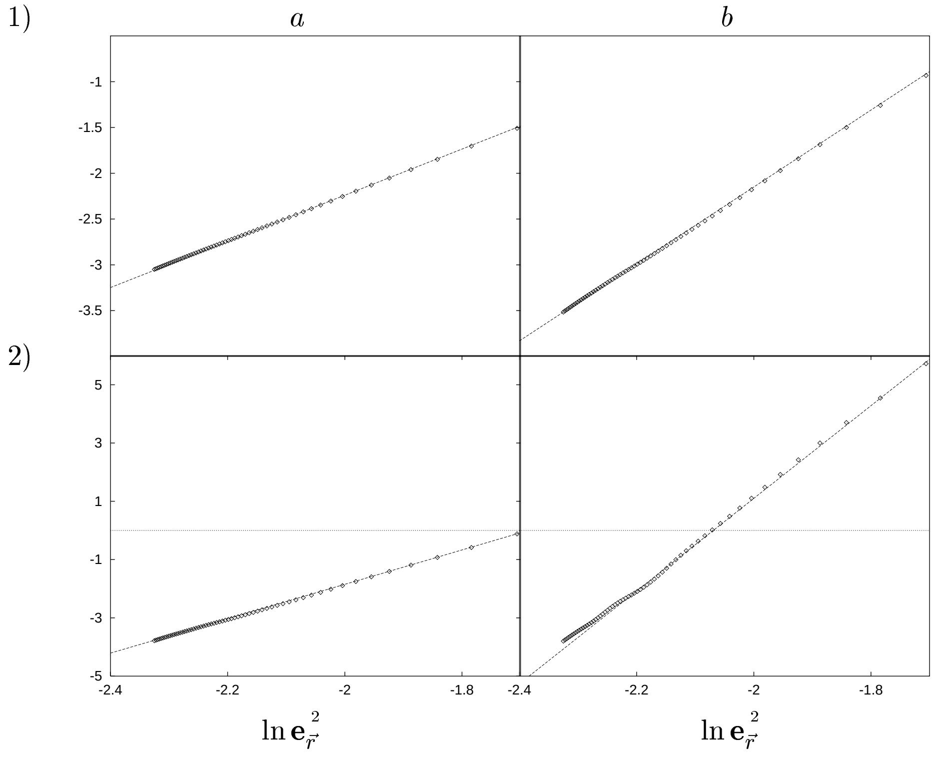


Figura 3.24: *Comprobando ESS (2D) para los momentos de orden 3, 4, 5 y 10.*

1.a: $\ln \mathbf{e}_{\vec{r}}^{3}$; *1.b:* $\ln \mathbf{e}_{\vec{r}}^{4}$
2.a: $\ln \mathbf{e}_{\vec{r}}^{5}$; *2.b:* $\ln \mathbf{e}_{\vec{r}}^{10}$

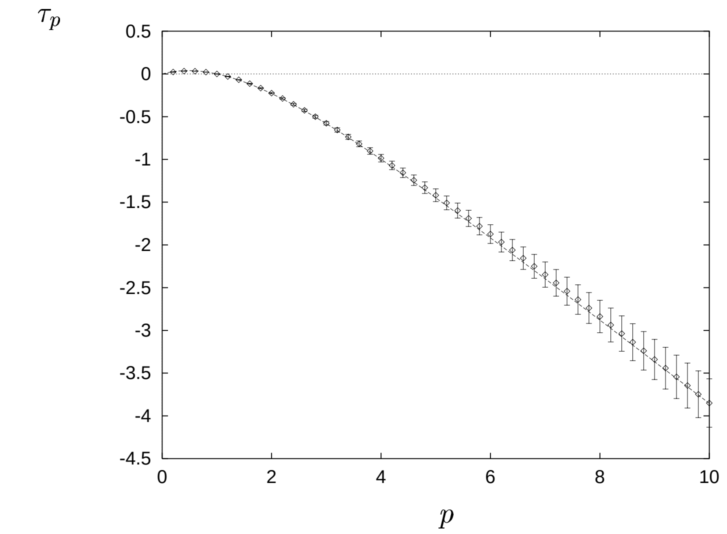


Figura 3.25: *Función τ_p 2D experimental y comparación con S-L*
$\tau_2 = -0.22 \pm 0.4$, $\beta = 0.53 \pm 0.5$

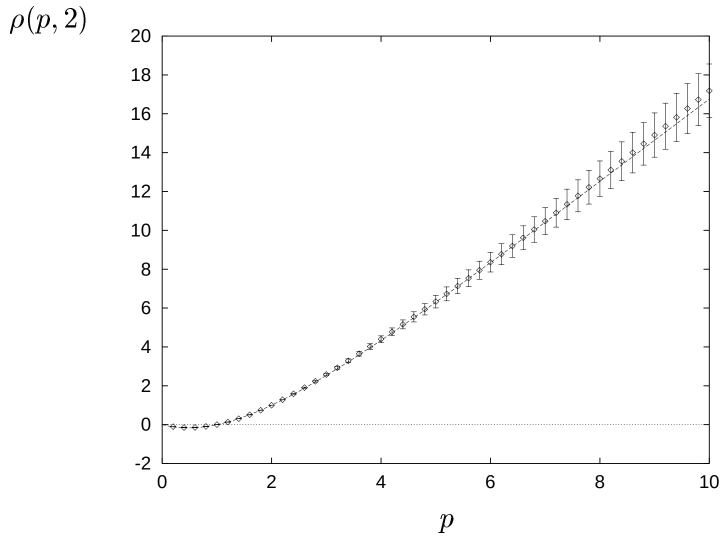


Figura 3.26: *Función $\bar{\rho}(p, 2)$ 2D experimental y comparación con S-L*
$\beta = 0.53 \pm 0.5$

En la figura 3.23 se han representado el logaritmo de diversos momentos frente al logaritmo de r para esta nueva definición de la VLB. El rango de r tomado se ha ampliado por abajo, comenzando en $r = 4$ pixels, puesto que con esta definición parece que se mejora el *cut-off* inferior. No es de extrañar: 4 pixels corresponde, en esta variable, a promediar el valor de $|\nabla c|^2$ sobre 16 puntos (frente al promedio a 4 puntos que supondría la variable unidimensional). Lamentablemente, el empeoramiento del *cut-off* superior es dramático: hace falta una gran fuerza de voluntad para acertar con la región pretendidamente universal del ajuste. Sabemos, no obstante, que se corresponde con esa zona pues se ha podido comprobar la evolución de la gráfica al aumentar la estadística. Así las cosas, la región universal de validez observada para SS distiende aquí un segmento tan pequeño como el que va desde los 8 hasta los 20 pixels.

Es razonable creer que estos problemas son debidos a la falta de estadística, y que con un número mayor de imágenes y/o de mayor tamaño se podría soslayar. Esta es una dirección próxima de trabajo. Es llamativo, no obstante, que ESS parece verificarse con una tremenda robustez (ver figura 3.24).

Se ve que, sin problemas, ESS resulta aceptable en todo el rango desde los 4 hasta los 40 pixels, incluso para momentos tan grandes como $p = 10$. Nuevamente, parece que ESS se transmite a todas las escalas de la forma apropiada, más allá de los efectos de tamaño finito.

En la figura 3.26 se representan los coeficientes calculados para $\rho(p, 2)$ entre p=0 y p=10. Sin ningún género de dudas puede ajustarse según el modelo de She & Leveque, con un parámetro β muy próximo a 0.5, como en los casos unidimensionales. Más aún, los coeficientes τ_p computados en la escasa región de validez contrastada para SS (figura 3.25) corresponden también al modelo de She & Leveque, con barras de error razonablemente pequeñas (revelando estabilidad y universalidad de esta propiedad a lo largo del promedio en imágenes) y con un parámetro libre τ_2 realmente próximo a -0.25.

Todo ello conduce a pensar que la variable bidimensional participa de la misma estructura que la unidimensional, como se verá más claro en el Capítulo 5 ; sin embargo, la exigencia de muestreo estadístico hace que la evidencia indirecta sea muy restringida sobre el colectivo estudidado.

3.10.2 La variable modulada

Otra posible mejora de la definición de $e_{\vec{r}}$ consiste en introducir una función ψ interpoladora o suavizadora en la integral, para disminuir los problemas creados a la escala baja por la resolución. La redefinición, en su versión unidimensional, sería como sigue :

$$e^{\psi}_{\vec{r}}(\vec{x}) \;=\; \frac{1}{r}\int_{-\infty}^{\infty} ds\;[\frac{\partial c}{\partial r}]^2(\vec{x}+s\vec{u}_r)\;\psi(\frac{s}{r}) \tag{3.17}$$

Es evidente que si $\psi(s) \equiv \chi_{[0,1]}(s)$ (la función indicatriz del intervalo $[0,1]$) se recupera la anterior definición de $e_{\vec{r}}$. Esta definición tiene la ventaja de que se aproxima a lo que llamaremos **análisis de singularidades** y permite eliminar el molesto *cut-off* inferior. No obstante, tiene la desventaja de que de nuevo se empeora el *cut-off* superior por culpa de las colas de ψ. En principio podrían ser admisibles ψ con media nula (las cuales, en particular, tendrán regiones positivas y negativas), con tal de incluir la integral de la ec. (3.17) dentro de un valor absoluto para garantizar la positividad de $e^{\psi}_{\vec{r}}$ y poder tomar cualquier momento de esta variable. No obstante, comportamientos oscilantes (ondiculares) empeoran más aún la situación respecto al *cut-off* superior. En las figuras 3.27 y 3.28 se muestran los resultados referentes a SS en esta variable, donde ψ es una gaussiana de dispersión 1 pixel.

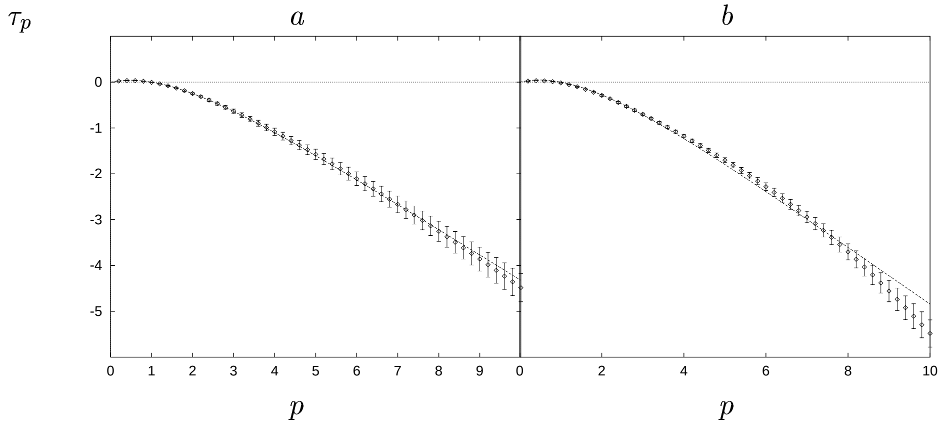


Figura 3.27: *Coeficientes* τ_p *para* $e^{\psi}_{\vec{r}}$
a: Horizontal, b: Vertical
$\beta_h = 0.55 \pm 0.6$, $\tau_{h,2} = -0.25 \pm 0.2$; $\beta_v = 0.5 \pm 0.5$, $\tau_{v,2} = -0.28 \pm 0.3$

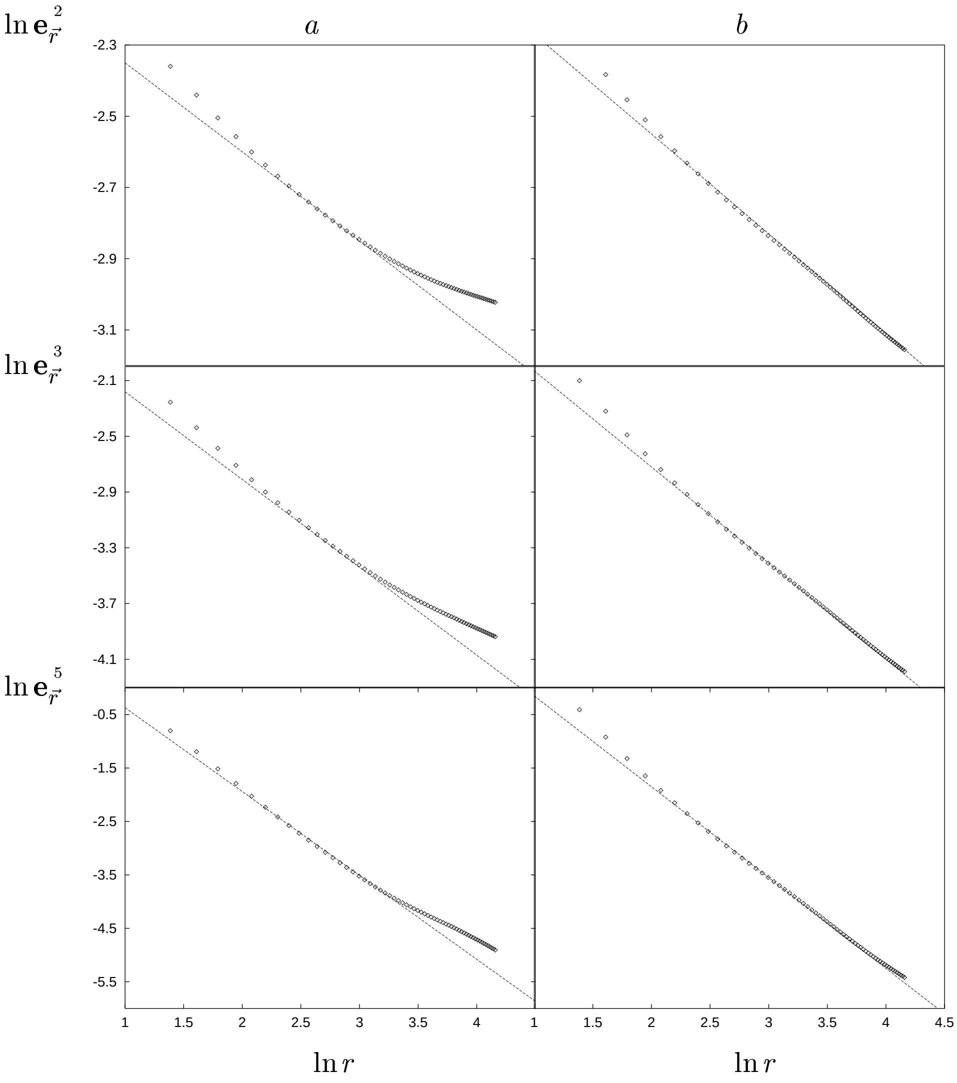


Figura 3.28: *Comprobando SS para los momentos de orden 2, 3 y 5.*
a: Horizontal; b: Vertical

En las figuras se ha representado esas curvas para un rango de $r = 4$ hasta 64 pixels, de nuevo mayor que en las figuras con la anterior definición. De este modo se hace claro la sensible mejora del *cut-off* inferior, que aún está presente, atenuado. Lamentablemente, este proceder lleva aparejado un empeoramiento del *cut-off* superior, que ha dado en manifestarse acusadamente en la variable horizontal.

Nuevamente, la situación es tremendamente mejor en el caso de ESS (figuras 3.30 y 3.29). Los parámetros β y τ_2 hallados están en consonancia con los resultados anteriores.

En conclusión, éste parece un buen método para tratar de regularizar el régimen de escalas bajas, que nunca es mejorado por un aumento de la estadística, al ser un efecto del carácter discreto de los saltos de luminosidad entre pixels vecinos en una imagen real. He aquí que tenemos ya un método para concentrarse en la región universal de la curva: modular la función, para evitar dependencia en la discretización, y aumentar la estadística, para evitar (hasta el tamaño máximo de las imágenes) los efectos de tamaño finito. Nada tiene esto de sorprendente, pues al fin y al cabo este mecanismo de modulacion no es más que un **filtro de paso bajo** (*low pass filter*)

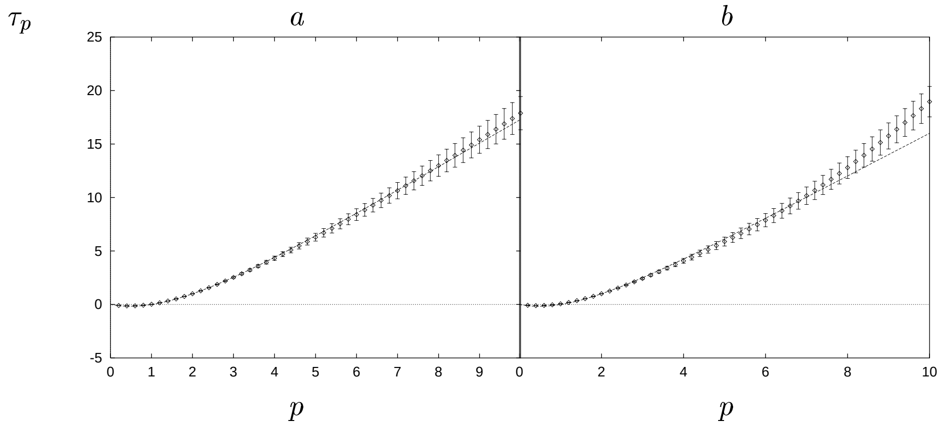


Figura 3.29: *Coeficientes* $\rho(p, 2)$ *para* e_r^ψ
a: Horizontal, b: Vertical. $\beta_h = 0.55 \pm 0.6$, $\beta_v = 0.5 \pm 0.5$

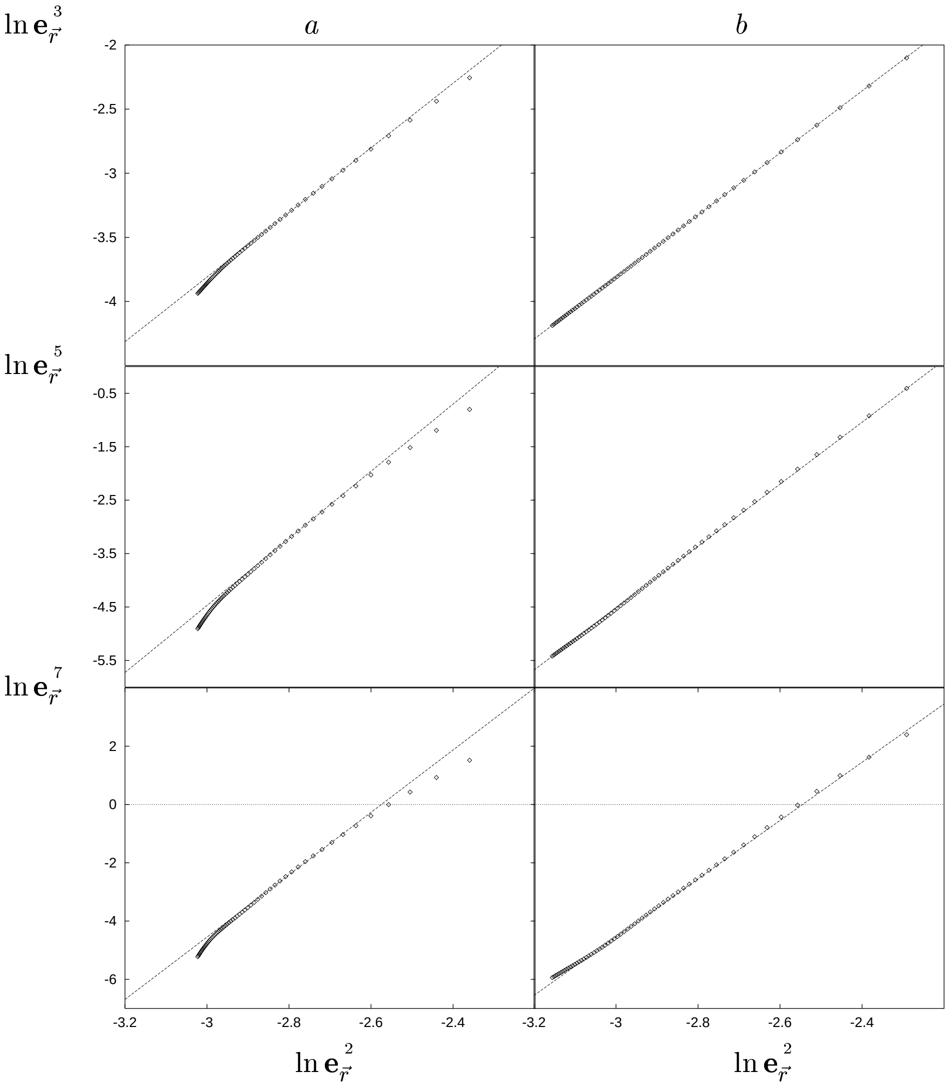


Figura 3.30: *Comprobando ESS para los momentos de orden 3, 5 y 7. a: Horizontal; b: Vertical*

3.10.3 Funciones multiafines

Hasta ahora, el tipo de variables estudiadas puede ser comprendido dentro del estudio de las llamadas **medidas multifractales**, y que será abordado en el próximo Capítulo. Tales variables vienen definidas a través de una densidad de medida positiva que ha de ser integrada en un segmento o área de un tamaño para ver los comportamientos de escala. Éste es el tipo de variable que describe nuestra $e_{\vec{r}}$ o la disipación local de energía ϵ_r en fluídos turbulentos.

Sin embargo, cabría preguntarse si no se podría definir sobre las imágenes variables más simples que fuesen análogas a la variación local de velocidades ($\delta_r v$) que se definía para fluídos turbulentos. En concreto, nos interesaría hallar un campo $f(\vec{x})$ que fuese un **campo multiafín** (como por ejemplo se explicita en [25]). Esto significa que si definimos la variación local de f en el punto $\vec{x}$ como :

$$\delta_{\vec{r}} f(\vec{x}) \;=\; |f(\vec{x}) - f(\vec{x}+\vec{r})|$$

(nuevamente esta definición está orientada, según el segmento $\vec{r}$), el campo presenta leyes de escala en cada punto $\vec{x}$, o sea,

$$\delta_{\vec{r}} f(\vec{x}) \underset{r \ll 1}{\approx} \alpha(\vec{x})\, r^{h(\vec{x})}$$

También se dice, en este caso, que el campo f tiene **exponente de Hölder** $h(\vec{x})$ en el punto $\vec{x}$.

A la postre, existe una equivalencia entre poseer exponentes de Hölder para todos los puntos y que la variable $\delta_{\vec{r}} f$ posea AutoSimilaridad (en el sentido de la ecuación 2.2); una vez más se remite al lector al Capítulo 4 donde se explora este aspecto para las variables de tipo medida multifractal.

Es conocido que en situaciones simples existe una conexión inmediata entre campos multiafines y medidas multifractales (puede consultarse el excelente libro de Arneodo et al., [26], para éste y otros aspectos que se comentan a continuación). En fluídos turbulentos esto permite construir la relación dinámica, ec. 2.1, entre el campo multiafín de velocidades y la medida multifractal relacionada con la disipación de energía local.

En nuestro caso, si el campo de contrastes luminosos $c(\vec{x})$ fuese un campo escalar multiafín, sin más los campos de sus derivadas direccionales serían multiafines, pero por razón de la derivación los exponentes de estos últimos son una unidad menores en cada punto, así que en lo que a escala se refiere, $\delta_{\vec{r}} c \;\sim\; r \delta_{\vec{r}} c'$ (c' siendo el campo de derivadas de $c(\vec{x})$).

También es cierto que si $f(\vec{x})$ es un campo multiafín y $F(y)$ es una función del tipo llamado **bi-Lipschitz**[4] , entonces el campo $F(f(\vec{x}))$ es también multiafín con los mismos exponentes que $f(\vec{x})$. En particular, como "elevar al cuadrado" es una función bi-Lipschitz en todos los puntos salvo en el origen, da lo mismo hablar de c' que de su cuadrado, que es lo que aparece en la definición de $e_{\vec{r}}$.

Usando los razonamientos de Arneodo se ve que promediar sobre una bola de radio r una función multiafín tiene las mismas propiedades de escala que la función. Juntando todo lo dicho anteriormente, concluiríamos que, si se supone que $c(\vec{x})$ es un campo multiafín, se establecería el equivalente de la **relación dinámica para imágenes**:

$$\delta_{\vec{r}} c \ \sim \ r e_{\vec{r}} \tag{3.18}$$

(se establece que tienen la misma dependencia en la escala r, aunque es necesaria una variable aleatoria no dependiente de la escala para escribir una igualdad). Esto nos hace pensar que $c(\vec{x})$ podría ser un campo multiafín, puesto que definitivamente $e_{\vec{r}}$ exhibe propiedades de escala.

Desafortunadamente esto no es cierto. En realidad desde el principio consideramos esta posibilidad, pero los resultados experimentales fueron paupérrimos y era imposible hablar de SS y ESS. Tan sólo con mucha posteridad se planteó la posibilidad de que la parte irregular o responsable del comportamiento de escala se viera enmascarada por una parte regular, una componente espuria.

Siguiendo la derivación de Arneodo, nuestra señal podría verificar, en un punto $\vec{x}_0$ dado, que :

$$\delta_{\vec{r}} c(\vec{x}_0) \underset{r \ll 1}{\approx} \quad P_0(r) + \alpha_0 r^{h_0}$$

donde $P_0(r)$ es una expansión polinómica que depende del punto. Así, aquellos puntos con exponentes más singulares vendrán dominados por el segundo sumando, irregular y revelador de estructura microscópica; pero aquellos en que la parte irregular tenga exponente más alto podrían verse enmascarados por la componente de largo alcance que describe el polinomio.

Como vehículo para desembarazarse de la parte regular, Areneodo propone modular el campo multiafín con una ondícula, de modo similar a como definíamos la variable $e_{\vec{r}}$ modulada, pero eligiendo esta ondícula de modo que anule los momentos enteros de órdenes inferiores al máximo exponente

[4]Ver el Apéndice Teórico para los detalles

irregular de nuestro campo escalar. Así, define los coeficientes de proyección $T_\Psi c(\vec{x}_0, \vec{a})$ como :

$$T_\Psi c(\vec{x}_0, \vec{a}) \;=\; \frac{1}{a} \left| \int_{-\infty}^{\infty} ds \;\; c(\vec{x}_0 + s\vec{u}_a)\; \Psi(\frac{s}{a}) \right|$$

donde $\vec{u}_a = \vec{a}/a$ como es habitual. Puede demostrarse (ver, por ejemplo, el libro de Daubechies, [27]) que la parte irregular de c en $\vec{x}_0$ tiene exponente h_0 si y solo si al tomar una función Ψ tal que $\int dx\; x^N \Psi(x) = 0$ para todo $N \leq h_0$ se verifica que $T_\Psi c(\vec{x}_0, \vec{a}) \sim a^{h_0}$

Por tanto, parece que podría bastar con trabajar en torno a $T_\Psi c(\vec{x}_0, \vec{a})$ en vez de a $\delta_{\vec{r}} c$. Hemos probado a hacer esto usando $\Psi(x) = \frac{d^2}{dx^2} e^{-x^2/2}$ y los resultados han sido satisfactorios, aunque por limitaciones numéricas y de tamaño de las imágenes no podemos tomar momentos muy grandes. Por último, hemos comprobado que la relación dinámica, ec. 3.18, se verifica substituyendo $\delta_{\vec{r}} c$ por $T_\Psi c(\vec{x}_0, \vec{r})$.

3.10.4 Otras definiciones

En la SubSección anterior se ha apuntado la propiedad de las funciones bi-Lipschitz de no alterar los exponentes de singularidad de los campos escalares multiafines. Por un proceso de paso al límite se podría hacer el mismo tipo de transformaciones sobre densidades multifractales. En definitiva, si tenemos una variable ϵ_r definida por

$$\epsilon_r(\vec{x}) \;=\; \frac{1}{|B_r(\vec{x})|} \int_{B_r(\vec{x})} d\vec{y}\; g(\vec{y})$$

donde $g(\vec{y})$ sería la densidad (positiva) de medida, entonces cabe esperar que la variable ϵ_r^F, definida igualmente pero substityendo $g(\vec{y})$ por $F(g(\vec{y}))$, y donde F fuera una función bi-Lipschitz (y que respetara la positividad, aunque esto tampoco sería estrictamente necesario) tuviera las mismas propiedades de escala.

Experimentalmente se ha comprobado para unos pocos casos que, efectivamente, esto es cierto. En particular se han ensayado versiones de $e_{\vec{r}}$ donde en vez de poner el cuadrado de la derivada (o de su módulo, en la versión 2D) se ha puesto tan sólo el módulo. Todas estas definiciones exhibían SS y ESS, y podían ser descritas dentro del esquema de She & Leveque, con $\beta \approx 0.5$. No obstante lo cual cada variable tiene sus virtudes y sus defectos desde el punto de vista del análisis numérico: así, tomar el módulo de la derivada mejora ostensiblemente el *cut-off* inferior, hasta hacerlo casi desaparecer, pero al precio de empeorar en mayor grado el superior.

Poco caso tiene probar académicamente una u otra definición. Según el tipo de aplicación en que se quiera usar, habrá definiciones más convenientes por razón del procesado numérico, pero el principio teórico es el mismo. Un principio teórico que habla de estructuras microscópicas organizadas jerárquicamente, las cuales es cada vez más necesario ocuparse de analizar.

Metodología

3.11 Descripción del ensemble de imágenes

Nuestro colectivo está integrado por 45 imágenes de 256×256 pixels, subtendiendo $15^o \times 15^o$ en todas ellas. Este conjunto se debe a la generosa cesión por parte de Daniel Ruderman[5] para la elaboración de este trabajo. Las imágenes están tomadas en el interior de un bosque caducifolio de Nueva Jersey (EE. UU.), y en las escenas se ven árboles, troncos, hojarasca en el suelo, arroyos a diferentes distancias con rocas inscritas en ellos, etc.

Las características técnicas más relevantes de las fotos son las siguientes :

- Las imágenes fueron tomadas con una cámara CCD con 8 bits de profundidad de color por color. Se ha sometido a las imágenes a una reducción cromática adecuada para obtener unos perfiles de luminosidad objetivos. Se han tenido en cuenta los efectos de saturación de la respuesta de la cámara para producir una estimación fiable de las luminancias relativas en cada escena. Por último, para eliminar diversas fuentes de ruido, se han tomado 32 fotos de la misma escena y se ha promediado las luminancias calibradas, obteniendo de ese modo una profundidad de color efectiva para la luminancia de hasta 13 bits por pixel.

- Las imágenes poseían una resolución de 640×480 pixels para una célula de 35 mm. La distancia focal del sistema lente-objetivo fue de 35 mm. Se recortó el cuadrado central de 256×256 pixels para evitar efectos de borde, que por tanto distiende una porción de ángulo sólido de aproximadamente $15^\circ \times 15^\circ$, como ya se ha indicado.

[5] Daniel Ruderman es investigador en el Salk Institute, en La Jolla, San Diego (EE. UU.)

- En todo momento se ha mantenido el objetivo enfocando al infinito. Se ha procedido de esta manera para no sesgar con poses determinadas el colectivo. Se justifica esto en el sentido de que se trata de entender los mecanismos de percepción visual previos a la atención, la cual evidentemente sí sesgaría las escenas.

- El azimuth de la cámara se ha mantenido con un margen de variación muy pequeño, para preservar la sensación de verticalidad.

- Se ha evitado introducir correlaciones espurias creadas por la presencia de sombras. Para ello, los entornos considerados son por lo general umbríos

- Se ha evitado la presencia de zonas de gran luminosidad. Esto evita que la distribución de luminosidades se vea sesgada por la presencia de pocos puntos con un gran valor. Además, esto evita que se sature la impresión

Figura 3.31: *Imagen representativa (71_ 1) del ensemble de Ruderman*

El formato electrónico de las imágenes es una representación estándar decimal a 4 bytes de la luminancia de cada pixel. Para más detalles, consultar el artículo original de Ruderman ("The statistics of natural images", [16])

3.12 Determinación de SS y ESS

3.12.1 Cálculo de $\mathbf{e}_{\vec{r}}^{p}$

$\mathbf{e}_{\vec{r}}^{p}$ se computó directamente sobre las imágenes, promediando sobre el total de valores. Para cada escala r el punto base $\vec{x}_0$ que aparece en la definición de $e_{\vec{r}}$ (ec. (3.1)) variaba en la dirección en que se tomaba la derivada desde el borde izquierdo para VLBs horizontales, superior para VLBs verticales; hasta una distancia r del borde contario. Esto se hacía lógicamente para poder evaluar con sentido la integral que define $e_{\vec{r}}$, pero inevitablemente conduce a una disminución del número de puntos a medida que r crece. En la otra dirección se tomaron coordenadas libremente. Se variaba de 1 pixel en 1 pixel, computando así todas los posibles valores que podrían extraerse del ensemble, y así incluyendo el efecto de solapes de bordes cuyos puntos base estuviesen contenidos dento del mismo intervalo de anchura r en la dirección tomada para derivar.

Se tomaron todas las escalas de $e_{\vec{r}}$ posibles entre 8 y 64 pixels, de 1 pixel en 1 pixel. Para p se tomaron todos los valores posibles entre $p = 0.2$ y $p = 40$, con una diferencia de 0.2 entre un valor y el siguiente; así se obtuvo una tabla de 56 (en escalas) $\times$ 200 (en momentos) valores de $\mathbf{e}_{\vec{r}}^{p}$.

3.12.2 Valoración de SS

Para contrastar SS, se tomó para cada p fijo los 56 valores de $\ln \mathbf{e}_{\vec{r}}^{p}$ conocidos y se hizo regresión lineal de éstos frente a $\ln r$, tomando r desde $r = 32$ hasta $r = 64$, y de forma que los valores seleccionados estuviesen equiespaciados logaritmicamente. De ese modo, para cada p se obtuvo un coeficiente τ_p, que es lo que se representa en la figura 3.6. La elección $r = 32$ como punto de partida fue para excluir la región de r pequeño, que acusa el efecto de la resolución finita. Para confirmar visualmente la bondad del ajuste, se representaron las gráficas 3.5 , 3.7 y 3.8 (SubSección 3.5.1), confirmando que en ese rango SS es satisfactorio.

3.12.3 Valoración de ESS

Análogamente a lo descrito para SS, se tomó cada p fijo y se hizo la regresión lineal de $\ln \mathbf{e}_{\vec{r}}^{p}$ frente a $\ln \mathbf{e}_{\vec{r}}^{2}$, con todo los 56 valores posibles (todos los r desde $r = 8$ hasta $r = 64$). También aquí se hizo ajuste visual, como se detalla en la SubSección 3.5.2. Por otro lado, los coeficientes $\rho(p,2)$ y $\bar{\rho}(p,2)$ (las figuras 3.11 y 3.12) no son más que la pendiente y el término independiente del ajuste por regresión a cada p.

3.13 Cálculo de las barras de error de $\rho(p,2)$ y $\bar{\rho}(p,2)$

Para determinar las barras de error de los datos experimentales se separon las imágenes en 9 grupos de 5 , computándose para cada grupo los valores de $\mathbf{e}_{\vec{r}}^{p}$ independientemente, igual que en la SubSección 3.12.1 . Sobre cada grupo se computó el valor de $\rho(p,2)$ y el de $\bar{\rho}(p,2)$ al igual que antes (SubSección 3.12.3); esto nos da 9 funciones $\rho(p,2)$ diferentes, y otras tantas de $\bar{\rho}(p,2)$. Con estos 9 valores para cada punto p se calculó la dispersión sobre el valor central; este valor era el correspondiente al ajuste de la ESS de los momentos obtenidos al promediar las 45 imágenes conjuntamente, que es lo que se calculó en la SubSección 3.12.3 , y las dispersiones nos dan el valor de la barra de error en cada punto p para cada función.

3.14 Ajuste de $\rho(p,2)$ según She-Leveque: Determinación de β

Para ajustar la curva experimental de $\rho(p,2)$, se probó con dos tipos de ajuste que presentan pequeñas variaciones aunque esencialmente dan el mismo valor de β . Ambos ajustes se realizaron tomando una función de coste correspondiente al error cuadrático medio según la siguiente definición :

$$E_{\beta} \;=\; \sum_{i=1}^{p_m \cdot p_f} \frac{1}{b_i} \left[\rho(p_i,2) - \rho_{\beta}(p_i,2)\right]^2 \Big/ \sum_{i=1}^{200} \frac{1}{b_i}$$

donde :

- E_{β} es el error que estamos computando.
- p_m es el valor del máximo p en el ajuste, según sea en cada caso; hemos tomado $p_m = 10$ y $p_m = 40$.

- p_f es el número de puntos en que se muestrea cada intervalo $(p, p+1)$, así que $1/p_f$ es el paso elemental que tomamos en p . En nuestro caso, $p_f = 5$, luego el paso elemental fue de 0.2 .
- p_i es cada uno de los p que estamos muestreando ($p_i = i/p_f$)
- $\rho(p_i, 2)$ es el dato experimental para cada p_i
- $\rho_\beta(p_i, 2)$ es el valor de $\rho(p, 2)$ en ese p_i siguiendo la ec. (2.16)
- b_i es el peso que se le asigna a cada punto experimental, y que es diferente de un ajuste a otro : en uno de ellos se toma $b_i = 1$ para todo i y en el otro es igual a la barra de error en ese punto. Con este último método se trata de permitir menores desviaciones en aquellos puntos que presentan un menor error experimental y en los que, por tanto, tenemos una mayor certidumbre de su valor. Puesto que los valores de β resultaron casi idénticos, nos referiremos en exclusiva a este último

Se efectuó una minimización numéricamente de E_β variando el β en cada uno de los casos, arrojando los valores para β que son referidos en la SubSección 3.6.

Se computó una estimación del error cometido en la determinación de β, de forma simple: si denominamos $\Delta_{\Delta\beta}\rho(p, 2) \equiv |\rho_{\beta+\Delta\beta}(p, 2) - \rho_\beta(p, 2)|$, se busca $\Delta\beta$ tal que :

$$\frac{1}{p_m \cdot p_f} \sum_{i=1}^{p_m \cdot p_f} [\Delta_{\Delta\beta}\rho(p_i, 2)]^2 = \frac{1}{p_m \cdot p_f} \sum_{i=1}^{p_m \cdot p_f} bi^2 \equiv B^2$$

Aproximando

$$\Delta_{\Delta\beta}\rho(p, 2) \approx |\frac{\partial}{\partial\beta}\rho_\beta(p, 2)|\Delta\beta$$

lo cual es cierto para valores de $\Delta\beta$ pequeños, se obtiene inmediatamente que $|\Delta\beta| \approx \frac{B}{A}$, donde $A^2 = \frac{1}{p_m \cdot p_f} \sum_{i=1}^{p_m \cdot p_f} [\frac{\partial}{\partial\beta}\rho_\beta(p_i, 2)]^2$. Con esto calculamos la incertidumbre de β ya referida.

3.15 Cálculo de histogramas y de $\| e_{\vec{r}} \|_\infty$ empírica

Para calcular los histogramas, se tomaron las mismas 56 escalas que anteriormente (desde 8 hasta 64 pixels). Para cada escala primero se determinó el valor empírico de $\| e_{\vec{r}} \|_\infty$, sin más que muestrear sistemáticamente todos los puntos $\vec{x}_0$ posibles de las 45 imágenes, como antes, calculando en cada punto $e_{\vec{r}}(\vec{x}_0)$ y anotando el máximo valor encontrado. Una vez conocido ese valor para cada escala r, fijada ésta se construyeron los histogramas por el procedimiento de computar sistemáticamente de nuevo todo $e_{\vec{r}}(\vec{x}_0)$, dividir lo obtenido por el $\| e_{\vec{r}} \|_\infty$ computado, y al valor así obtenido, que de seguro está entre 0 y 1, asignarle a una caja de 4097 en que se fraccionó el intervalo [0,1]. Esto último quiere decir que se construyó un vector de 4097 componentes, cada una de las cuales representaba el números de sucesos registrados con un valor de $f_{\vec{r}}$ comprendido en el intervalo apropiado; así, una vez conocida la "caja" correspondiente a un valor, se aumentaba la componente correspondiente de este vector de frecuencias en 1. Finalmente, se normalizó el vector de frecuencias absolutas para convertirlo en el de relativas, esto es, las componentes sumaran 1.

Para computar las barras de error, se procedió análogamente a lo efectuado en la Sección 3.13 , separando las imágenes en 9 grupos de 5, computando del mismo modo que antes los histogramas de cada uno de esos grupos y estimando gracias a ellos la dispersión en torno al valor central (el histograma del párrafo anterior).

3.16 Propagación de las barras de error

3.16.1 Verificación de la representación integral

Para verificar las relaciones ecs. (2.21) y (2.25) se tomaron los histogramas a las escalas r y L; en el caso más extremo fueron $r = 16$, $L = 64$; más bajo de 16 pixels el histograma tenía un problema de insuficiente muestreo, por ser el pico de la distribución muy próximo a cero y la pendiente del lado izquierdo muy abrupta; esto además perjudicaba a la rutina de aplicación de ambas fórmulas (2.21 y 2.25) si no se aumentaba el muestreo. Finalmente se dejó así, sin ir a escalas menores, por un compromiso con el tiempo de computación y del tamaño máximo de muestreo en los histogramas, que no sabemos cuál es, pero que evidentemente depende de la cantidad de muestras que tengamos.

Se transformó el histograma de la escala L usando la relación que define la representación integral de ESS de cada caso, computando de forma numérica las integrales con los puntos que se tenían. Para ello, se extrapoló linealmente para obtener los $\{\rho_{\ln f_{\vec{r}}}(x)\}_{\forall\, r}$ a partir de nuestros histogramas y poder así usar la expresión de la ec. (3.10), que es directa y aplicable en ambos casos. Los histogramas de $\ln f_{\vec{r}}\ \forall\, r$, por necesidad de excluir el caso $f_{\vec{r}} = 0$, tienen 4096 puntos, lo cual justifica lo aparentemente caprichoso de la cifra anterior, puesto que ésta es potencia de 2 y ser así inmediato efectuar FFT (Fast Fourier Transform), que es lo que uno necesita en la aplicación directa de la expresión de la ec. (3.11). Como se dijo antes, esto último resultó un fiasco por el nivel de ruido de los histogramas.

Una vez obtenidos los $\{\rho_{\ln f_{\vec{r}}}(x)\}_{\forall\, r}$, el cálculo de $\rho_{\ln f_{\vec{r}}}(x)$ tomando como dato de partida tanto $\rho_{\ln f_{\vec{L}}}(x)$ como el β que genera G_S (s según la representación integral de SS o según la de ESS) es inmediato; tomando esa función sólo queda finalmente hacer la extrapolación en sentido contrario para obtener $\rho_{f_{\vec{r}}}(x)$. En todo caso, esto sólo nos permitiría ver cuánto se parecen los valores medios, pero sin aportar información acerca del error.

3.16.2 Barras de error en la representación integral

Para este cálculo se utilizó de nuevo la separación de 9 grupos de imágenes usada anteriormente, y para cada grupo se tomaron los histogramas a las escalas $r = 16$ y $L = 64$.

Lo que en la figura 3.14 se representa en las barras de error no es el error propagado en la aplicación de la fórmula, sino cuán fiable es la hipótesis de que esa fórmula sea válida. Ello se entiende por el procedimiento de elaboración de las barras de error, que se explica seguidamente.

En cada grupo se computó la función de diferencias entre el $\rho_{\ln f_{\vec{r}}}(x)$ real y el estimado por el procedimiento detallado antes (SubSección 3.16.1). Con las 9 funciones de diferencias se calculó una función de media cuadrática, que es lo que se representa como barras de error. De este modo, lo que uno trata de verificar es la bondad de la hipótesis de existencia de un núcleo integral como G_S, eliminando parcialmente con este método los sesgos sistemáticos que en la elaboración de los histogramas afectasen tanto a $\rho_{f_{\vec{r}}}(x)$ como a $\rho_{f_{\vec{L}}}(x)$. Aunque los histogramas sean realmente muy ruidosos, se puede determinar con barras de error muy estrechas si la transformación es buena o no, por este motivo. El resultado es que las barras son pequeñas y engloban perfectamente la función experimental $\rho_{f_{\vec{r}}}(x)$ tanto con un kernel como con el otro.

3.17 Reducción de la resolución de las imágenes

Para analizar la posible presencia de un *cut-off* inferior en las imágenes, se las sometió a un proceso de reducción de la resolución o *agrupación por bloques*. Dicho proceso consistió en que, una vez fijado el tamaño b de los bloques de resolución (y donde b debía dividir la escala sobre la que se agrupaba), se produjeron a partir de nuestro *ensemble* de 45 imágenes otros dos ensembles con idéntico numero de imágenes cada uno, uno correspondiendo a una reducción en horizontal y el otro a reducir en vertical.

La reducción, por tanto, se hizo sólo en una dirección, dejando la otra intacta para perder la menor cantidad posible de estadística. El valor de luminosidad asignado a un bloque de la imagen contraída fue el promedio de las luminosidades que quedaban comprendidas en él. Este proceso garantiza que la luminosidad media permanece constante, y si las imágenes son invariantes de escala, si nos referimos a estadísticos que sólo operan en la dirección contraída, la estadística ha de ser la misma (por supuesto que la relación con la otra dirección varía).

Se produjeron reducciones con $b = 2, 4, 8$ y 16, y se aprovecharon esas imágenes para computar los $e_{\vec{r}}$ en las direcciones contraídas, precísamente, con los resultados reflejados en la SubSección 3.4.1.

Capítulo 4

Multifractalidad: Teoría y Geometría

4.1 Medidas multifractales

4.1.1 Perspectiva histórica. Ideas intuitivas

El concepto de multifractal es de reciente aparición tanto en la Física como la Matemática moderna: los primeros desarrollos en torno a esta idea datan de mediados de los años 80. Unido a la complejidad de la materia y lo especializado de su campo de aplicación, es fácil de entender la falta de un texto unificador y aclaratorio sobre el tema: en muchos sentidos, esta teoría está en proceso de definición.

La necesidad de esta nueva idea surge como medio para estudiar el comportamientos de variables muy estocásticas y caóticas, y donde se observan ciertos efectos de *periodicidad* e *invariancia de escala* (en sentido estadístico) que, sin embargo, no pueden ser tratados considerando el espacio de valores de estas variables como un fractal convencional (por ejemplo, por presentar leyes de escala anómalas). Uno piensa, entonces, que tales variables definen un **multifractal**: una reunión de varios fractales, donde cada uno de ellos se transforma de forma distinta bajo cambios de escala y cuya combinación justifica un comportamiento invariante de escala pero más complejo de lo habitual.

Rigurosamente, para poder definir un multifractal es preciso contar con una función que permita diferenciar puntos según el comportamiento que ella tenga en unos y otros. Nuestro tratamiento parte de las llamadas **medidas**

multifractales, que son la base de cualquier función que eventualmente pudiera ser considerada como generadora de un multifractal.

4.1.2 Definición

Caracterización microscópica

Una **medida multifractal** μ *es una medida positiva*[1] *soportada sobre un conjunto* $F \subset \Re^d$ *de dimensión fractal* D *y tal que cada punto* $\vec{x} \in F$ *presenta una ley de escala local respecto a la medida de Lebesgue* λ *natural de* $\Re^d$ *de exponente* $h(\vec{x})$*.*

Con esto se quiere decir lo siguiente: para cada punto $\vec{x}$ donde μ no se anula se verifica que existen dos funciones acotadas $\alpha(\vec{x})$, $h(\vec{x})$ tales que :

$$\mu(B_r(\vec{x})) \underset{r \ll 1}{\approx} \alpha(\vec{x})\, r^{h(\vec{x})} \tag{4.1}$$

o, más estrictamente, que :

$$\lim_{r \to 0} \frac{\ln[\mu(B_r(\vec{x}))]}{\ln r} = h(\vec{x}) \tag{4.2}$$

y :

$$\lim_{r \to 0} r^{-h(\vec{x})} \mu(B_r(\vec{x})) = \alpha(\vec{x}) \tag{4.3}$$

donde $B_r(\vec{x})$ representa la bola de centro $\vec{x}$ y radio r, con alguna de las distancias habituales en $\Re^d$ que se podrían inducir con la medida de Lebesgue lineal.

Observaciones:

- El rango de exponentes h permitidos es acotado; por lo general, nos interesarán medidas tales que $h_{min} \leq h(\vec{x}) \leq h_{max}$ $\forall \vec{x} \in F$.

- En particular, si la medida μ es positiva se tiene que $0 < h(\vec{x})$ $\forall\, \vec{x}$. Ello viene implicado por la monoticidad de la medida, a saber: si dos conjuntos A , B verifican $A \subset B$, entonces $\mu(A) \leq \mu(B)$. Aplicado esto a bolas de radios r, r' conduce, en virtud de la ec. 4.1, a que $r^{h(\vec{x})} \leq r'^{\,h(\vec{x})}$, por lo que se concluye.

[1]Precisando más, esta medida está definida sobre la σ-álgebra Boreliana especializada al soporte de μ y además se considera que μ es σ-finita

- Por tanto, nos interesan medidas tales que $h_{min} \geq 0$. Si además $F \equiv \Re^d$, en tal caso μ es absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue de $\Re^d$; por tanto, es aplicable el teorema de Radon-Nykodin[2] y así tiene sentido hablar de la densidad de medida, $\frac{d\mu}{d\lambda}(\vec{x})$. Esta función ha de ser por construcción c.p.t. (λ) continua. Esto no implica bajo ningún concepto que α ni h sean funciones continuas; incluso se puede probar, tras la Caracterización Macroscópica, que $h(\vec{x})$ es c.p.t. discontinua, como veremos. La evidencia experimental abunda en este sentido (ver figura 4.1)

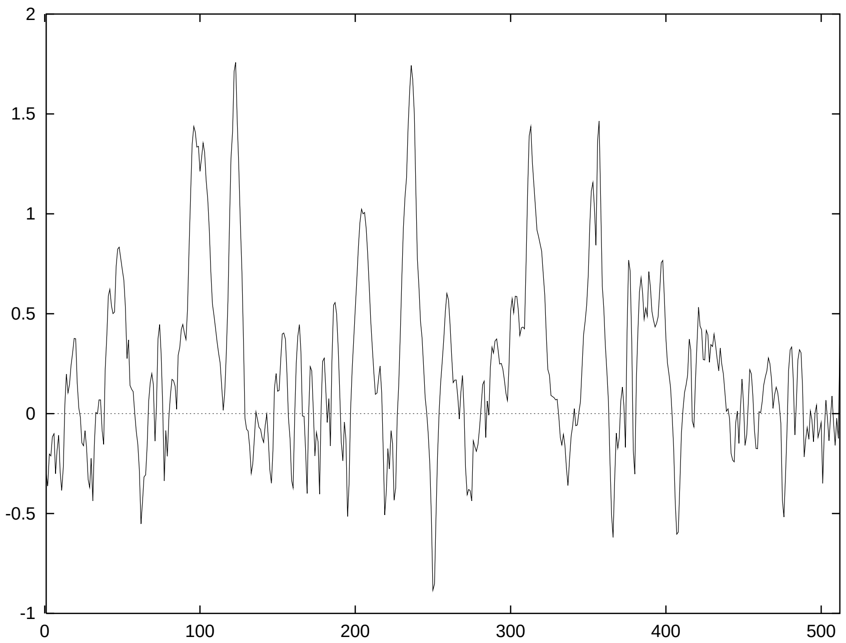


Figura 4.1: *Función $h(\vec{x})$ a lo largo de una línea en la imagen de Lena Sjööblom*

- La función $\frac{d\mu}{d\lambda}$ vendrá generada por un proceso estocástico. Esto nos permitirá introducir el concepto de *ergodicidad* para referirnos a la medida.

[2]Que es poco más que una generalización rigurosa de la fórmula de cambio de variables; ver [17]

- Conviene resaltar, por último, que valores de la función exponente $h(\vec{x})$ menores que la dimensión del espacio, d, implican que la función de densidad $\frac{d\mu}{d\lambda}$, considerada como función multiafín, tiene una singularidad en el punto $\vec{x}$.

  Ello es así porque la integral de una función multiafín con exponente h_0 en un punto $\vec{x}_0$ sobre la bola $B_r(\vec{x}_0)$ escala como r^{h_0+d} (ver [26]), y eso es por definición $\mu(B_r(\vec{x}_0))$; así que si llamamos h_μ a la función de exponentes de μ y $h_{d\mu}$ a los de su densidad, se tiene que $h_{d\mu}(\vec{x}) = h_\mu(\vec{x}) - d\,\forall\,\vec{x}$. Por tanto, donde $h_\mu < d$ se tendrá que la densidad tiene exponente negativo.

Caracterización macroscópica

La caracterización microscópica no basta para producir un multifractal en el sentido que tiene interés desde el punto de vista experimental. Se necesitan ciertas propiedades de isotropía y homogeneidad, en un sentido estadístico, que no pueden ser definidas fijándose exclusivamente en el comportamiento local.

Consideraremos que la función $\frac{d\mu}{d\lambda}(\vec{x})$ ha sido generada a través de un proceso estocástico. Las propiedades macroscópicas que pediremos a este proceso son dos:

- **Ergodicidad:** O sea: es equivalente calcular promedios de la variable $\frac{d\mu}{d\lambda}(\vec{x})$ fijando el punto $\vec{x}$ para distintas realizaciones del proceso (para diferentes imágenes) que promediar en una única realización cambiando el punto base $\vec{x}$ (o sea, a lo largo de toda la imagen) siempre que ésta sea suficientemente grande. Esto es equivalente a decir que hay *invariancia (exacta) de traslación en sentido estadístico* para este proceso.

- **Invariancia de escala:** El proceso ha de ser tal que una transformación de homotecia de razón k sobre el espacio $\Re^d$ ha de transformar $\frac{d\mu}{d\lambda}(\vec{x})$ en una variable homotética de sí misma (en distribución) y razón k^{-d}. Esto es equivalente a decir que el proceso tiene una *invariancia (conforme) de escala en sentido estadístico*

Una medida μ verificando tanto la caracterización microscópica como la macroscópica se denomina *Medida Multifractal*[3] .

[3] Se podría utilizar una caracterización macroscópica diferente, tratando de eludir el

4.2 Aspectos Geométricos y Topológicos

(A) *Un multifractal puede ser descompuesto como reunión de variedades fractales* F_h

Efectivamente, se puede definir:

$$F_h = \{\vec{x} \in F \,:\, h(\vec{x}) = h\} \tag{4.4}$$

En definitiva, clasificamos los puntos por el tipo de singularidad que presentan. Debido al carácter terriblemente caótico e impredictible de la señal $h(\vec{x})$ los conjuntos tienen una estructura fraccionada, *fractal*[4]

Por definición, las variedades tienen intersección nula.

Llamaremos **espectro de dimensiones** del multifractal a la función $D(h)$ definida por ser $D(h)$ la dimensión fractal (*Hausdorff*) de F_h.

(B) *Cada una de las variedades* F_h *es densa en* F [5]

Esto es inmediato por la caracterización macroscópica: por la ergodicidad, un abierto suficientemente grande de U está estadísticamente distribuido de forma idéntica que la variable estocástica; por tanto, debe contener todas y cada una de las variedades, pues éstas caracterizan la distribución. Por la invariancia de escala, un abierto por pequeño que sea posee la misma estadística que éste tan grande. Por tanto, contiene puntos de cada una de las F_h; es decir, hay puntos de cada F_h arbitrariamente próximos a uno dado.

(C) (Como corolario del punto anterior) μ *no tiene puntos aislados salvo que sea un monofractal* (i.e., sólo haya un exponente h)

Por la propiedad de densidad enunciada en el punto anterior, todo punto de F es límite de sucesiones de puntos en F_h para todo h; pero si un punto $\vec{x}$ es aislado, las únicas sucesiones que pueden converger

carácter estocástico de esta definición (ver Falconer, [28]); sin embargo, la que se presenta en esta tesis tiene la ventaja de permitir entender mejor el sentido físico de las hipótesis, que se verifican sin necesidad de mayor explicación tanto en Turbulencia Completamente Desarrollada como en Imágenes Naturales

[4] No es éste el lugar para discutir qué es y cómo se caracteriza un fractal. El lector interesado es referido al libro de Falconer, [28]. Los aspectos más importantes de la teoría fractal son enunciados en el Apéndice Teórico, en la Sección A.2

[5] "denso" en el sentido de la topología inducida por la de $\Re^d$ en F. Ésta es una topología métrica por construcción.

a él son las que son constantemente iguales a $\vec{x}$ a partir de un cierto momento. Esto implica que $\vec{x} \in F_h$ para todo h, o sea, que las variedades tendrían intersección no nula, lo cual es contradictorio a menos que sólo haya un h posible.

(D) *La función $h(\vec{x})$ es discontinua en todo F o bien μ define un monofractal*

Sea un punto $\vec{x}$ no aislado y supongamos que $h(\vec{x})$ es continua en un entorno de él. Sea B una bola cerrada que contiene a $\vec{x}$ y tal que h es continua sobre toda ella. Por tanto, $B \cap F_h$ es un cerrado, pues F_h es la antiimagen por una función continua (en este dominio) de un cerrado. Por la densidad de F_h, $F_h \cap B$ es no vacío y además $F_h = B$, y esto es verdad para todo exponente h, lo cual es imposible al ser todas las variedades disjuntas, a menos que sólo haya un h posible. Luego o sólo hay un h o la función no puede ser continua, que es lo que se quería probar.

(E) Definamos $\rho_h(h)$ como la probabilidad, tomando un punto al azar dentro de una imagen, de que tal punto estuviera en F_h. Establecemos aquí la siguiente **conjetura**:

$$\log \rho_h(h) = aD(h) + b \tag{4.5}$$

para ciertas constantes a y b.

En realidad, esto es prácticamente equivalente a suponer que ρ_h *viene determinado exclusivamente por las características geométricas del multifractal, esto es, por el espectro de dimensiones $D(h)$.*

La forma de verlo es simple: supongamos que

$$\rho_h(h) \; = \; N_D \, G(D(h)) \tag{4.6}$$

donde $N_D \; = \; [\int dh \, G(D(h))]^{-1}$ es la constante de normalización, que por la definición es un funcional de $D(h)$. Entonces supongamos que construimos un nuevo multifractal consistente en intersectar el original con una variedad M de dimensión $d - \Delta d$. Las dimensiones de las nuevas variedades, $F'_h \equiv F_h \cap M$, serán casi por todo de dimensión $D'(h) \; = \; D(h) - \Delta d$, siempre que este número sea positivo; si fuese negativo aún podría interpretarse como que las variedades tienen dimensión cero (son puntos) y tienen una cierta probabilidad dada por ese factor de aparecer en esa intersección. Pero la distribución ρ_h debería ser la misma para este multifractal, pues la elección de la variedad interceptante M es independiente. Así pues se espera que :

$$N_{D'}G(D'(h)) \;=\; N_D G(D(h))$$

o, lo que es lo mismo, definiendo $K(\Delta d) \equiv N_D/N_{D'}$ (que es una constante), que

$$G(D(h) - \Delta d) \;=\; K(\Delta d) G(D(h))$$

y que tal cosa se verificase para todo Δd posible. La única función G que verifica eso es la exponencial, así que $G(x) \equiv Ae^{ax}$. Aplicando esto a (4.6) se llega de inmediato a (4.5), donde $b = \ln[AN_D]$

Esta propiedad es muy interesante, y será verificada numéricamente en el Capítulo 5.

4.3 Función de partición y funciones relacionadas

4.3.1 La función de partición

Es habitual en la literatura matemática concerniente a multifractales definir la llamada función de partición $Z_p(r)$ a cada escala r; dicha función está diseñada para capturar aspectos geométricos esenciales del multifractal y su interpretación en ese contexto es inmediata. Sin embargo, en el contexto de los sistemas físicos resulta normalmente más conveniente o accesible otro tipo de función, como nuestra ϵ_r.

Afortunadamente, la relación entre ambas es simple y exhiben leyes de escala del mismo tipo: de hecho, hay una relación directa entre los exponentes de SS de una y otra. Por completitud y facilitar la lectura de los dispersos textos en la materia escribiré los desarrollos de ambas, para que el lector pueda pasar fácilmente de una representación a la otra.

La **función de partición** se define del modo siguiente: Se toma un número finito $N(r)$ de bolas disjuntas de radio r contenidas en un conjunto acotado y de modo que cada uno intersecte de forma no vacía a F y que la recubran al máximo posible; a un tal recubrimiento se le denomina **recubrimiento óptimo**. Sea $\{U_i\}_{i=1,\ldots,N(r)}$ esa colección de bolas. Llamemos U a la unión de todas ellas y sea $q_i = \mu(U_i)/\mu(U)$. Se define $Z_p(r)$ como :

$$Z_p(r) = \sum_{i=1}^{N(r)} q_i^p \tag{4.7}$$

Esta función de partición presenta, en los caso de interés, una ley de escala bien definida:

$$Z_p(r) \underset{r\ll 1}{\approx} \alpha_p r^{\bar{\tau}_p} \tag{4.8}$$

Como veremos, $\bar{\tau}_p$ es calculable directamente a partir del espectro de dimensiones del multifractal.

Hay que destacar que, por definición, $\bar{\tau}_1 = 0$ de forma trivial. Un poco más sutil es que $\bar{\tau}_0 = -D$; ello se debe a que $Z_0(r) = N(r)$, el número de bolas del recubrimiento optimal. Cuando r es muy pequeño, $N(r) \propto r^{-D}$ (ver Apéndice Teórico, Sección A.2), pero no tiene nada de particular porque es precisamente una de las formas de evaluar la dimensión fractal de un conjunto.

4.3.2 Relación entre $\bar{\tau}_p$ y $D(h)$

Éste es un hecho bien conocido (ver [26, 10]), y es un sencillo ejercicio de cálculo: supongamos que r es suficientemente pequeño; entonces cada $\mu(U_i)$ comenzará a comportarse como r_i^h para ciertos h_i. Podemos por tanto, sustituir la expresión de $Z_p(r)$ por la siguiente:

$$Z_p(r) \underset{r\ll 1}{\propto} \int dh\, \rho_h(h) \langle \alpha_h^q \rangle\, r^{-D(h)} r^{hp} \tag{4.9}$$

donde $\rho_h(h)$ es la distribución de probabilidad de los exponentes h, α_h denota la función $\alpha(\vec{x})$ restringida a la variedad F_h y los paréntesis triangulares denotan promedio a lo largo de esa variedad. El factor $r^{-D(h)}$ nos da la dependencia en r del número de puntos del fractal concreto F_h implicados, $N(r)$, del mismo modo que se dijo antes, y aparece porque el promedio de α_h está normalizado.

A partir de aqui, la conclusión es simple: Cuando r tiende a cero, por el teorema del punto de silla la integral viene dominada por el ínfimo del exponente de r:

$$Z_p(r) \underset{r\ll 1}{\propto} r^{\inf_h \{ph - D(h)\}} \tag{4.10}$$

pero al tiempo ese exponente debía ser $\bar{\tau}_p$. Por tanto, $\bar{\tau}_p$ es la transformada de Legendre de $D(h)$.

Es interesante observar, para concluir, que $-D = \tau_0 = \inf_h\{-D(h)\}$; por tanto $\sup_h\{D(h)\} = D$.

4.3.3 Construcción de la variable ϵ_r y su relación con $Z_p(r)$

La variable ϵ_r, que surge de forma natural en el estudio de la Turbulencia Completamente Desarrollada (ver Capítulo 2) y en nuestro análisis de la estadística de Imágenes Naturales (donde la denotamos $e_{\vec{r}}$, ver Capítulo 3), está definida de modo muy simple en términos de una medida multifractal μ asociada a cada problema. En todo caso se ve que :

$$\epsilon_r(\vec{x}) = \frac{1}{|B_r(\vec{x})|}\int_{B_r(\vec{x})} d\mu \ \sim r^{-d}\mu(B_r(\vec{x})) \tag{4.11}$$

donde $|B_r(\vec{x})|$ representa el volumen de esa bola, que evidentemente escala como r^d; así que prescindiendo de una constante geométrica dependiente de la distancia que usemos para definir la bola escribiremos equivalentemente r^d para ese volumen d-dimensional.

Como ya hemos visto, los momentos de esta variable exhiben leyes de escala bien definidas (SS):

$$\langle \epsilon_r^p \rangle = \alpha_p r^{\tau_p} \tag{4.12}$$

La relación que guardan estos momentos respecto a $Z_p(r)$ es bastante sencilla desde aquí: cuando r sea suficientemente pequeño, $Z_p(r)$ se aproxima a $N(r)$ veces el valor del promedio sobre la imagen de la potencia p-ésima de la medida de la bola de radio r, o sea, a $\langle[\mu(B_r(\vec{x}))]^p\rangle_{\vec{x}}$; por tanto despejando:

$$\langle \epsilon_r^p \rangle \ = r^{-pd}\,\langle[\mu(B_r(\vec{x}))]^p\rangle_{\vec{x}} \underset{r\ll 1}{\propto} \ r^{D-pd}Z_p(r) \tag{4.13}$$

así que:

$$\tau_p = \inf_h\{p(h-d) + D - D(h)\} \tag{4.14}$$

(A la expresión $D - D(h)$, que aparecerá sucesivas veces, la llamaremos **codimensión** de F_h.) Habida cuenta de que si $\vec{x} \in F_h$ entonces

$$\epsilon_r(\vec{x}) \underset{r\ll 1}{\propto} \ r^{h(\vec{x})-d} \tag{4.15}$$

se suele hablar de las singularidades de ϵ_r, que son tan sólo un desplazamiento por el factor constante $-d$ de las de μ

$$h'(\vec{x}) = h(\vec{x}) - d \tag{4.16}$$

Obviamente, las variedades fractales son las mismas para μ y ϵ_r, con el mismo espectro de dimensiones, $D'(h') \equiv D(h'+d)$. En función de estas singularidades escribiríamos que:

$$\tau_p = \inf_{h'} \{ph' + D - D'(h')\} \tag{4.17}$$

Como norma general, suprimiremos las primas para no recargar la notación, sobreentendiéndose que usamos las singularidades de la función ϵ_r. Es de destacar que en el caso de que $d = D$ las singularidades de ϵ_r son las de $\frac{d\mu}{d\lambda}$, puesto que :

$$\lim_{r\to 0} \epsilon_r(\vec{x}) = \frac{d\mu}{d\lambda}(\vec{x})$$

Por último, notar que los valores de τ_0 y τ_1 son conocidos a priori de forma trivial, siendo $\tau_0 = 0$ y $\tau_1 = D - d$.

4.4 Multifractalidad en el modelo de She-Leveque

Retomando las conclusiones de la Sección precedente, podemos afirmar que:

$$\tau_p = \inf_{h}\{ph + D - D(h)\} \tag{4.18}$$

donde τ_p es el exponente de SS de $\langle \epsilon_r^p \rangle$. Esta expresión puede usarse por tanto para determinar τ_p cuando se conoce $D(h)$, pero más aún: observando que esa expresión no es más que una transformada de Legendre de la función $D(h)$, se puede invertir la relación, de modo que por medio de otra transformada de Legendre obtendremos la envolvente convexa de $D(h)$; Suponiendo que $D(h)$ es ya por sí convexa, se obtiene :

$$D(h) \;=\; \inf_{p}\{ph + D - \tau_p\} \tag{4.19}$$

Así pues se puede extraer el espectro de dimensiones $D(h)$ de τ_p y viceversa (ver [29]). En los casos en que se tenga una función analítica para describir τ_p esto puede resultar muy útil.

Vamos a estudiar el espectro emergente del modelo de She y Leveque para los exponentes de ESS (explicado en el Capítulo 2). Usando que

$\tau_p \;=\; \tau_2\,\rho(p,2)$ y con la expresión conocida para $\rho_\beta(p,2)$ (ec. 2.16) al ser sustituída en la ec. (4.19), se obtiene el siguiente espectro :

$$D(h) \;=\; D_\infty + (D - D_\infty)\,\omega(h)[1 - \ln\omega(h)] \tag{4.20}$$

(ver figura 4.2) donde :

$$\begin{cases} D - D_\infty &= \quad -\frac{\tau_2}{(1-\beta)^2} \\ \\ \Delta &= \quad -\frac{\tau_2}{1-\beta} \\ \\ \omega(h) &= \quad -\frac{h+\Delta}{(d-D_\infty)\ln\beta} \end{cases}$$

(estas relaciones pueden verse también en [30])

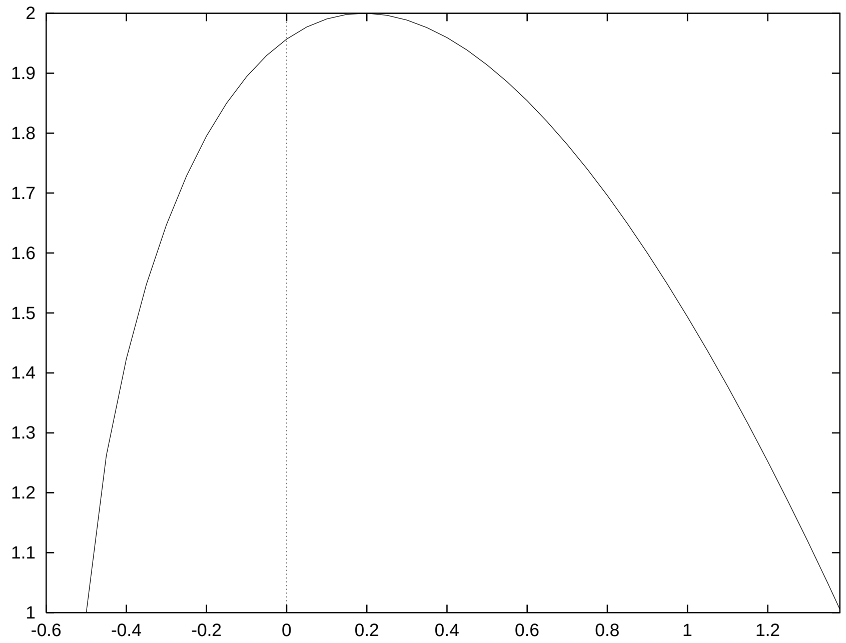


Figura 4.2: *Espectro de dimensiones en un She-Leveque bidimensional de parámetros* $\beta = 0.5$ *y* $\tau_2 = -0.25$. *Esto implica* $D_\infty = 1.$, *como se puede ver*

Varias observaciones son pertinentes sobre estas fórmulas :

- En el esquema de She y Leveque $\rho(1,2) = 0$ y por tanto $0 = \tau_1 = D - d$. Por tanto, $D = d$ para este modelo, o sea, el soporte de μ es todo $\Re^d$. En las fórmulas subsiguientes escribiremos d en vez de D.

- Como $\tau_2 < 0$ en todos los caso experimentales conocidos, tanto $d - D_\infty$ como Δ son positivos, lo cual es fundamental para la interpretación geométrica que luego se va a dar de esos parámetros.

- En la derivación de la fórmula se ha extremalizado respecto a p la expresión de la ec. (4.19). Esto ha impuesto ciertas restricciones al rango de h válidos, que son: no considerar logaritmos de argumentos negativos y que $0 \leq D(h) \leq d$. Estas restricciones pueden expresarse sencillamente en función de $\omega(h)$ sin más que decir :

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} 0 & & \leq & & \omega(h) \\ & & & & \\ -\frac{D_\infty}{d-D_\infty} & \leq & \omega(h)[1 - \ln \omega(h)] & \leq & 1 \end{array} \right.$$

  o sea :

$$0 \leq \omega(h) \leq \omega_{max}$$

  donde se verifica que $\omega_{max}[1 - \ln \omega_{max}] = -D_\infty/(d - D_\infty)$; esto se verifica en un único punto y $\omega_{max} > 1$. Sin embargo, el rango de ω's permitidos podría ser más estrecho. La función $\omega[1 - \ln \omega]$ presenta un único máximo en $\omega = 1$, donde alcanza precísamente la cota superior , 1. Esto hace que para cada dimensión $D(h)$ haya asociados dos posibles h, o sea, hay dos tipos de singularidad soportados por variedades de la misma dimensión (ver figura 4.2). Esta suele ser la situación en los espectros de dimensiones.

- Tomando la expresión anterior en $\omega(h)$, es inmediato comprobar que el rango de h delimitado es :

$$-\Delta \leq h \leq -\Delta + \omega_{max}(-\ln \beta)(d - D_\infty)$$

  Hay que tener en cuenta que $0 < \beta < 1$, así que $\ln \beta < 0$, y por tanto el límite superior del rango efectivamente es mayor que el inferior. Queda claro también de esta expresión que el mínimo valor posible de h, h_{min}, es precisamente $-\Delta$. Por otro lado, puede expresarse el máximo valor permitido para h, h_{max}, como :

$$h_{max} \;=\; (d - D_\infty)[-\omega_{max} \ln \beta - (1 - \beta)]$$

Como $d - D_\infty \geq 0$ por construcción, el signo de h_{max} viene determinado por el de $-\omega_{max} \ln \beta - (1 - \beta)$, que es una función decreciente en β para $0 < \beta < 1$, y con mínimo en $\beta = 1$ donde vale exactamente 0 ; por tanto $h_{max} > 0$ en todos los modelos de S-L.

- Justamente cuando $h = h_{min} = -\Delta$, $\omega(h) = 0$ y así :

  $$D(h_{min}) = D_\infty$$

  Así pues, la dimensión de la variedad más singular del multifractal es precisamente el parámetro D_∞.

- Otro punto relevante del espectro es el valor de la singularidad donde se alcanza la máxima dimensión. Ésta se consigue para $h = h_{med}$, $= -\Delta + (-\ln \beta)(d - D_\infty)$ (o sea, $\omega = 1$), que corresponde a $D_{h_{med}} = D = d$.

- A modo de observación suplementaria, retomando la definición de D_∞ a través de τ_2 y β

  $$d - D_\infty \;=\; -\frac{\tau_2}{(1 - \beta)^2}$$

  y como el lado de la izquierda es la codimensión de esa variedad más singular, se tiene que $0 \leq d - D_\infty \leq d$; la primera desigualdad se verifica trivialmente con que $\tau_2 \leq 0$; pero la segunda impone una condición novedosa sobre τ_2 :

  $$-\tau_2 \leq d(1 - \beta)^2 \tag{4.21}$$

  En el caso discutido en el Capítulo 3 sobre imágenes naturales, tenemos que $D = d = 2$ y para un $\beta = \frac{1}{2}$ se obtiene que $-\tau_2 \leq \frac{1}{2}$. En general, pues :

  $$-d(1 - \beta)^2 \;\leq\; \tau_2 \;\leq\; 0$$

  para poder construir el multifractal.

- Retomando la conjetura sobre la distribución ρ_h de las variedades, cabe preguntarse si no se podría interpretar el concepto de dimensión de una forma más amplia. En la curva del espectro de dimensiones, figura 4.2, hay un corte abrupto por la izquierda, debido a la divergencia del logaritmo que aparece en la expresión de $D(h)$, ec. 4.20. En particular, eso hace que se consigan todas las posibles pendientes positivas de las rectas tangentes a la curva, que son los que determinan la variable p como variable conjugada de h a través de la transformada de Legendre. Esto es, con la parte a la izquierda del máximo de la curva de $D(h)$ es posible reconstruir todos los momentos positivos de la variable ϵ_r

  Sin embargo, esto no es cierto con la parte derecha de la curva, que no presenta una divergencia abrupta. Esta parte debería de servir para reconstruir los momentos negativos, que en un Log-Poisson como el que describen She & Leveque son finitos (y cuyos exponentes vienen dados por la misma expresión (2.16) que los positivos). Si truncamos la curva, como propondríamos si no permitimos dimensiones $D(h)$ negativas, estos momentos serían teóricamente irreconstruibles, como si fuesen divergentes. Esto parece contradictorio, y en nuestra opinión sólo podría salvarse interpretando $D(h)$ a través de ρ_h como el logaritmo de una probabilidad.

  Para concluir, confimaría nuestro punto de vista hallar un sistema físico en el cual la ec. 4.21 se violase, que como dijimos es consecuencia de imponer que $D(h) > 0$.

Capítulo 5

El multifractal en Imágenes Naturales

En este capítulo aplicaremos la base teórica del desarrollo multifractal a las Imágenes Naturales (y no tanto), tratando de identificar las variedades F_h. El gran contenido geométrico de las mismas esbozará una nueva perspectiva de la estructura de cada imagen, lo cual resulta clave tanto para la construcción de modelos realistas de generación de imágenes como para analizar el contenido de información de cada parte y desarrollar algoritmos de reconstrucción a partir de un mínimo subconjunto. Los resultados que se detallan están contenidos en un trabajo de próxima aparición, [40]

5.1 Características *a priori* del multifractal

Tomamos como punto de partida la variable $e_{\vec{r}}$ diseñada en el Capítulo 3, en la Sección 3.10, SubSección 3.10.1; y que tal variable presenta un coeficiente de ESS $\rho(p,2)$ que es bien descrito según el modelo de She-Leveque de parámetro $\beta = 0.5$; así mismo aceptaremos la evidencia experimental de que $\tau_2 \approx -0.25$.

Por mor de la definición de $e_{\vec{r}}$ definiremos la densidad de medida multifractal $d\mu(\vec{x})$ como

$$d\mu(\vec{x}) = |\nabla c|^2(\vec{x})d\vec{x} \tag{5.1}$$

usando que en nuestro caso todo punto pertenecerá al multifractal, $F \equiv \Re^d$ (como es necesario en caso de tener un $\rho(p,2)$ a la She-Leveque) y así tiene sentido la derivada de Radon-Nykodin. Este μ tiene como función ϵ_r asociada precisamente $e_{\vec{r}}$, la que deseamos; ver Capítulo 4, Sección 4.3

Tomando la aplicación al modelo de She y Leveque en la Sección 4.4 del Capítulo antedicho, para los valores experimentales de $\beta = 0.5$ y $\tau_2 = -0.25$ se obtiene de modo inmediato que:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} D_\infty & = & 1. \\ \Delta & = & 0.5 \end{array} \right. \tag{5.2}$$

($d = 2$) Esto es muy importante, pues está diciendo que la variedad más singular, que es la de exponente $h = -\Delta$, tiene dimensión fractal 1, o sea, que es esencialmente una curva o unión de curvas, lo cual nos hace pensar que posiblemente esta variedad es la identificación de los bordes o contornos de los posibles objetos presentes en las imágenes.

5.2 Separación de los exponentes: ondículas

En las realizaciones experimentales, que son siempre discretizaciones, resulta complicada la determinación de las leyes de escala microscópicas que en suma sirven para caracterizar el multifractal. Al proceso por el cual a cada punto $\vec{x}$ se le asigna su exponente $h(\vec{x})$ se le conoce como *análisis de singularidades*. El mejor método para ello es el uso de proyecciones sobre *ondículas* (“wavelets”) de la imagen.

Una **base de ondículas** u **ondícula madre** es una función $\Psi \in (L^1 \cap L^2)$ y cuyas dilataciones y traslaciones pueden ser usadas como una base supercompleta en $L^2(\Re^d)$. Esto supone imponer realmente muy pocas condiciones sobre la función Ψ: típicamente es suficiente pedir que $\int \Psi = 0$ (ver [27]). De una función que verifica eso se suele decir que es una **ondícula admisible**.

Esto supone que Ψ no tiene un signo constante, pero es muy frecuente que esta función no tenga muchos pasos por cero; en definitiva, oscila pero poco (y de ahí el nombre de ondícula u onda elemental).

Se les suele requerir a las ondículas otro tipo de propiedades, dependiendo de a qué problema se necesite aplicarlas. Sin embargo, de cara a hacer el análisis de singularidades, no es preciso ni tan siquiera la condición de media nula, que es lo que nos permite hablar de ondícula admisible.

El **análisis de singularidades** se basa en que el operador de convolución con la ondícula es contínuo y bi-Lipschitz. De ese modo, la convolución no modifica el exponente de singularidad de las medidas.

Se define el coeficiente de proyección de la medida μ sobre la ondícula como

$$T_\Psi \mu(\vec{x}, a) = \int d\mu(\vec{y}) \; \Psi(\frac{\vec{y} - \vec{x}}{a}) \tag{5.3}$$

lo cual no es mas que convolucionar la medida μ con la dilatación de factor a de Ψ, invertido (cambiado de signo) su argumento. En el Apéndice Teórico, Sección A.3, se muestra que si la wavelet Ψ es positiva y bien comportada,

$$T_\Psi \mu(\vec{x}, a) \underset{a \ll 1}{\propto} \; a^{h(\vec{x})} \tag{5.4}$$

donde $h(\vec{x})$ es el exponente de la medida μ en ese punto; la constante de proporcionalidad, empero, se ve modificada respecto a la no proyección. (ver [27, 26]). También pueden usarse, bajo otras condiciones, funciones Ψ analizadoras que sí serían ondículas admisibles (de nuevo, ver [27])

Hay dos razones fundamentales para aplicar ondículas al análisis de singularidades.

- *Esta transformación permite dar un tratamiento uniforme tanto a las medidas multifractales como a las llamadas funciones multiafines (ver Benzi et al, [36])*

  Efectivamente, uno puede aplicar esta proyección a *ondículas* a una función cualquiera (simplemente, convolucionar ambas funciones). De este modo, se analizan igualmente las singularidades de las funciones multiafines. Esto permite pensar que se puede construir una medida multifractal soporte a partir de una función multiafín de forma canónica; ver [26] para los detalles.

- *Con esta transformación uno puede tratar un muestreo discretizado experimental.*

  Esto es cierto en los casos en los que se pueda considerar que el aparato de muestreo experimental hace una convolución con una función apropiada de la señal física que se pretende medir: éste es el caso en imágenes, donde la intensidad de cada pixel es en realidad el promedio de intensidades sobre el área que subtiende. Así, uno tiene que los datos del muestreo son una proyección previa sobre una wavelet **a escala fija**. Formalmente, si $\vec{x}_n$ es uno de los puntos del muestreo,

$$C(\vec{x}_n) \; = \; \frac{1}{a_0^d} T_\chi c(\vec{x}_n, a_0) \tag{5.5}$$

donde $c(\vec{x})$ es el verdadero contraste de luminosidades y $C(\vec{x}_n)$ es el muestreo experimental. La función χ es la indicatriz de la bola de radio 1, que vale 1 sobre ella y 0 fuera,o sea,

$$\chi(\vec{x}) = \theta(||\vec{x}|| - 1)$$

y a_0 es el tamaño físico de un pixel. El prefactor a_0^{-d} es una normalización para que C sea un promedio. Usaremos alternativamente el símbolo $\chi_a(\vec{x}) \equiv a_0^{-d}\chi(\vec{x}/a)$.

El cálculo directo de los exponentes multifractales a través de la fórmula ec. 4.1 es poco satisfactoria en muchos casos por culpa del carácter discreto del muestreo, que no permite tomar de forma contínua el radio de las bolas centradas en el punto a estudiar. Se puede hacer una interpolación lineal para emular esto, lo cual mejora el cálculo notablemente. Esta misma idea se puede extender con ventaja a otro tipo de interpolación.

Aprovechando la asociatividad de la convolución, la proyección sobre la wavelet de la señal discretizada verifica que :

$$T_\Psi C(\vec{x}_n, a) = T_{\Psi'} c(\vec{x}_n, a) \quad , \quad \Psi' \equiv \chi_{\frac{a_0}{a}} \otimes \Psi \tag{5.6}$$

($\otimes$ representa el producto de convolución).

La ec. 5.6 nos explica por qué funciona esta interpolación y en qué se basa. Mientras a sea mucho más grande que a_0, $\chi_{\frac{a_0}{a}}(\vec{x})$ será más parecido a una función delta de Dirac y por tanto Ψ' se aproximará más a Ψ , con lo que uno puede recobrar el comportamiento local de la función en ese punto siempre que no se mueva a escalas inferiores a la de a_0 (el tamaño del pixel). Por tanto, podremos estimar los exponentes de singularidad de estructuras de tamaño, como mucho, comparables al pixel.

5.3 Análisis experimental de singularidades

5.3.1 Metodología

- Se desarrolló un programa para analizar las singularidades por medio de la proyección en ondículas. Tras diversas pruebas, se escogió como base de ondículas funciones de la forma :

$$\Psi(\vec{x}) = \frac{d^n}{d||\vec{x}||^n}\left[\frac{1}{[1+||\vec{x}||^2]^\gamma}\right](1. - \chi_R(\vec{x}))$$

donde se consideraron los órdenes de derivación $n = 0, 1, 2$ y los órdenes de exponenciación $\gamma = 1, 2, 3$. Las funciones tiene simetría radial y están truncadas a una distancia R.

- Se escogieron estas funciones ya que para este problema parecía clave tomar una interpolación suficientemente suave, pero sin que el decaimiento del interpolador fuese demasiado rápido. Los resultados con ellas no variaban significativamente al variar la función de proyección. Además, los exponentes obtenidos quedaban (salvo un pequeño porcentaje - en torno al 2% - de anomalías) comprendidos dentro del rango esperado teórico.

- Para cada una de las 9 funciones ondícula madre antedichas se determinaron los valores a_0 y a_1 de escala menor y mayor, respectivamente, de forma experimental. Dichas escalas oscilaron entre los .75 pixels para la escala mínima (a_0) del caso más extremo (aunque 1 fue el valor más usual) y los 16 para el mayor a_1 (aunque los valores usuales no pasaron de 8 pixels). Los criterios de elección nuevamente fueron las compatibilidades descritas arriba.

- Fijadas las escalas a_0 y a_1 en cada Ψ, se tomo un muestreo de a comprendidos entre ambos y para cada punto $\vec{x}$ se hizo una regresión lineal del logaritmo de $T_\Psi\mu(\vec{x}, a)$ frente al logaritmo de a. En virtud de la ec. 5.4 esto nos permite determinar $h(\vec{x})$. Los escalas a del muestreo fueron tomadas de forma uniforme exponencialmente, para que sus logaritmos estuvieran equidistantes. El número de tales escalas fue de 6; un muestreo mayor tiene la ventaja de producir mejores regresiones (que se traduce en un mejor ajuste a las condiciones de compatibilidad antes referidas) pero aumenta terriblemente el tiempo de computación.

- La propia regresión lineal permite comprobar la fiabilidad de la ec. 5.4 a través del coeficiente de regresión del ajuste. En particular, esto estableció un criterio adicional de compatibilidad, que no es otro que el tener el máximo posible de puntos con buen coeficiente de regresión. Con 6 puntos de muestreo se estableció la convención de considerar bueno un coeficiente de regresión si su valor absoluto era mayor o igual que 0.9. Sobre las imágenes esto condujo a porcentajes de buenos puntos, para los parámetros escogidos, que oscilaban entre el 75% y el 85%, siendo siempre mejores los ajustes hechos con funciones con menor orden de derivación.

- Las funciones de mayor orden de derivación, sin embargo, mostraron que tan sólo podían usarse para captar rasgos en las imágenes del tamaño de varios pixels, así que fueron desechadas para los análisis finos.

- Por último, para depurar se promediaron los exponentes $h(\vec{x})$ obtenidos en cada punto $\vec{x}$ con cada una de las 9 funciones a fin de tratar de reducir cualesquiera factores de ruido o distorsión, consiguiéndose así que el porcentaje de puntos fuera de los límites experimentales fuese de tan sólo el 1%. Para los análisis finos de las estructuras tan sólo se tomaron las tres no derivadas, que además son funciones positivas.

Es este último tipo de análisis el que mostraremos a continuación, pues queremos precisar hasta el pixel y al tiempo analizar variedades menos y menos singulares.

5.3.2 Resultados

Para experimentar esta herramienta, se trabajó intensamente sobre la imagen de Lena Sjööblom[1] (figura 5.1), que es la referencia habitual en trabajos relacionados con tratamiento de imagen.

En las figuras siguientes pueden verse los diferentes conjuntos de puntos que experimentalmente correspondieron a las variedades F_h. Puede observarse la progresión de los puntos desde la variedad más singular (figura 5.1) a medida que h aumenta; cómo se alcanza la máxima dimensionalidad, que corresponde también a la máxima densidad de puntos en la imagen, en torno a $h \approx 0.2$ y después se vuelven a rareficar, aunque más lentamente.

[1]Lena Sjööblom fue *play-girl* en el año 1972. Su foto fue escaneada por algún amante de Playboy que se dedicaba a trabajar en tratamiento de imagen posiblemente ese mismo año. La foto se hizo rápidamente muy popular entre esa comunidad de científicos, en una época en la que no había mucho material similar. Hoy en día esta foto es un clásico. Recientemente, Lena fue invitada de honor en una conferencia de Computer Vision.

Actualmente, Lena Sjööblom vive en su Suecia natal y es una funcionaria de un gabinete de Protección de Medio Ambiente.

La foto no está muy bien escaneada y presenta efectos de difracción notables; sin embargo, tiene la ventaja de poseer un único objeto (Lena) muy bien definido y contrastado.

Figura 5.1: *Imagen de Lena y su variedad más singular.*
Se ha tomado $F_{-\Delta}$ *como el conjunto de puntos con* $h = -\Delta \pm \epsilon_{\Delta} = -0.5 \pm 0.05$

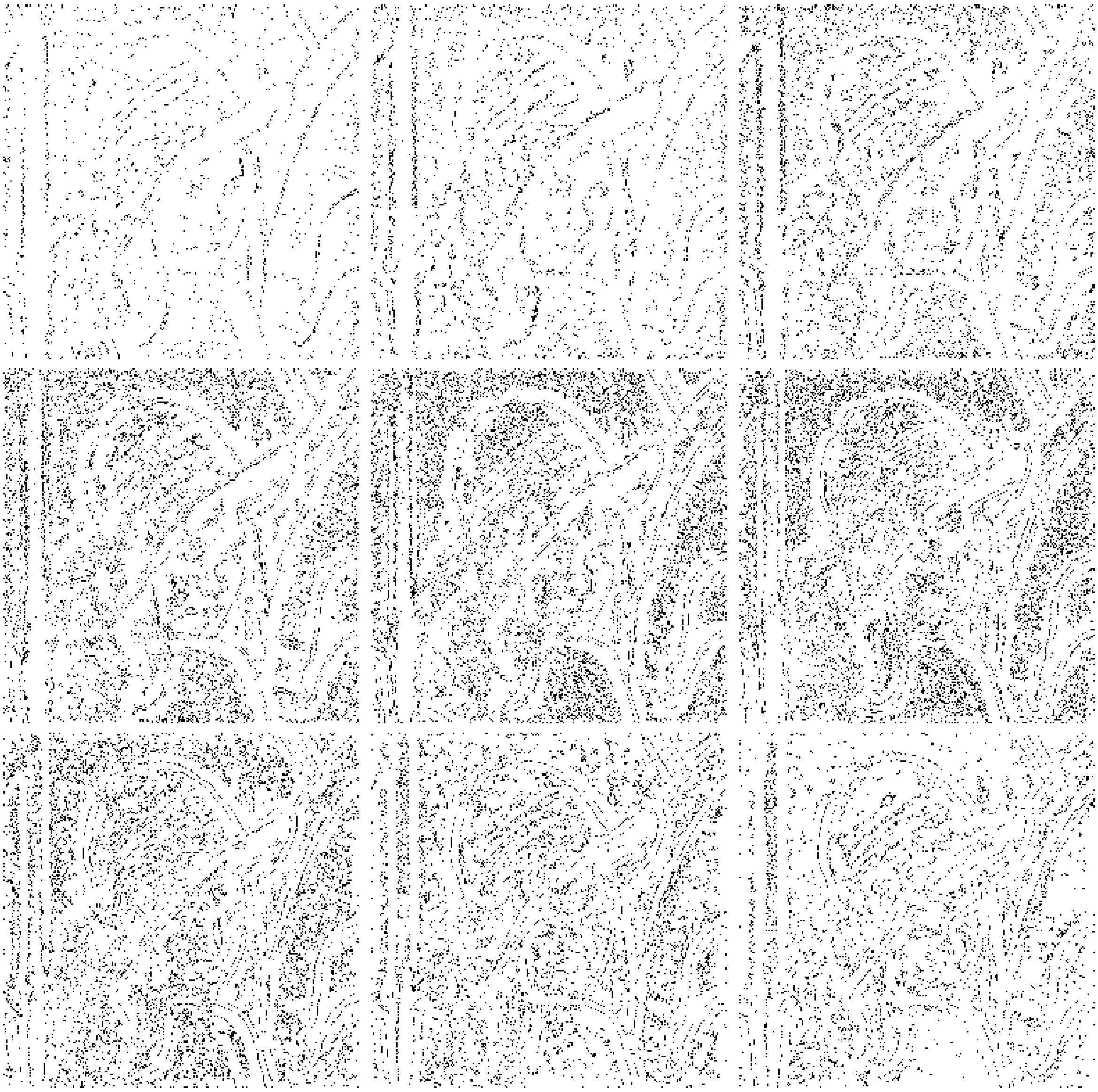


Figura 5.2: *Diferentes variedades fractales en la imagen de Lena Correlativamente. De izquierda a derecha:*
Línea superior: h=-0.4,-0.3,-0.2
Línea intermedia: h=-0.1,0.0,0.1
Línea inferior: h=0.2,0.3,0.4
En todos los casos están representados el conjunto de puntos que tienen el h dado ± 0.05

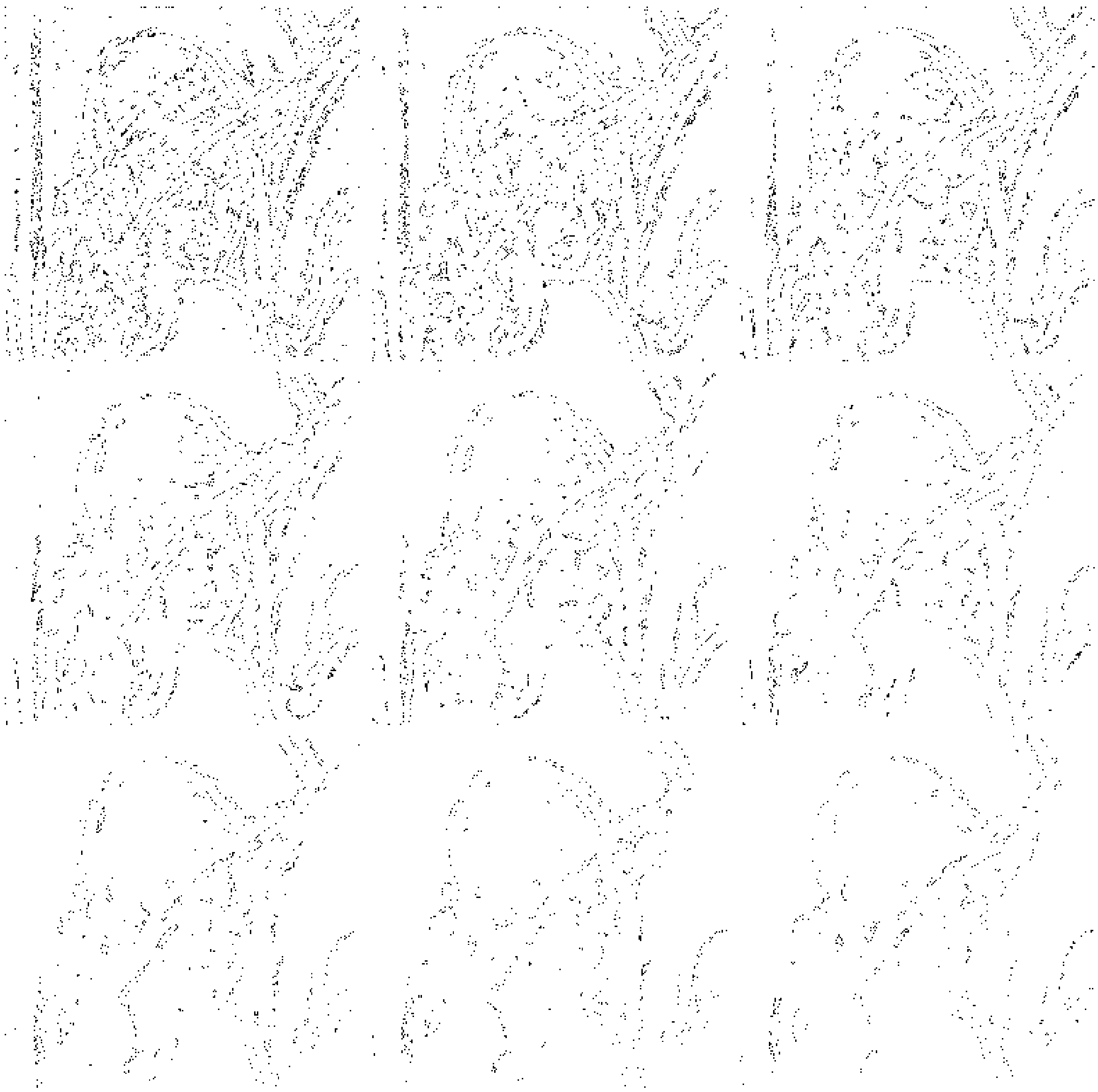


Figura 5.3: *Diferentes variedades fractales en la imagen de Lena (y 2) Correlativamente. De izquierda a derecha:*
Línea superior: h=0.5,0.6,0.7
Línea intermedia: h=0.8,0.9,1.0
Línea inferior: h=1.1,1.2,1.3
En todos los casos están representados el conjunto de puntos que tienen el h dado ± 0.05

Una vez puesta a punto la herramienta, es el siguiente paso aplicarla a vardaderas imágenes naturales. No deja de ser interesante que la imagen de Lena tenga una descomposición multifractal del mismo tipo, con los mismos exponentes y con las variedades de las mismas dimensiones fractales. Parece esto indicar que esta característica podría ser notablemente robusta y presentarse para todo tipo de imágenes tomadas de la realidad. Esta cuestión abre un campo de estudio muy amplio, a ser abordado con posterioridad.

En todo caso, la herramienta afinada así nos permite analizar las imágenes del colectivo de Ruderman, dando resultados consistentes y dibujando varias líneas para proseguir el análsis.

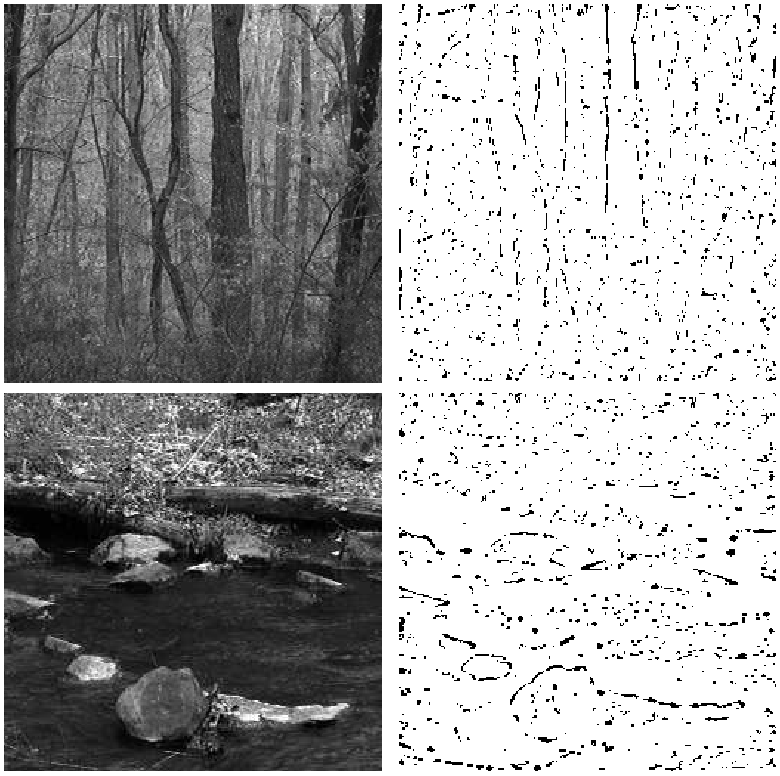


Figura 5.4: *Imágenes 71_1 y 71_15 y sus respectivas variedades más singulares*

Para contrastar la conjetura acerca de la distribución de las variedades, ec. 4.5, calculamos una estimación experimental de $\rho_h(h)$. En la figura 5.5 se muestra el resultado. Para facilitar la comparación con el espectro teórico, se ha eliminado el término independiente b de esa ecuación trasladando el valor de $\rho_h(-\Delta)$ hasta hacerlo coincidir con D_∞. El espectro experimental de dimensiones, $D^{exp}(h)$, se calcula por tanto como :

$$D^{exp}(h) \;=\; D_\infty \;+\; \frac{1}{a}\ln\left[\frac{\rho_h(h)}{\rho_h(-\Delta)}\right] \tag{5.7}$$

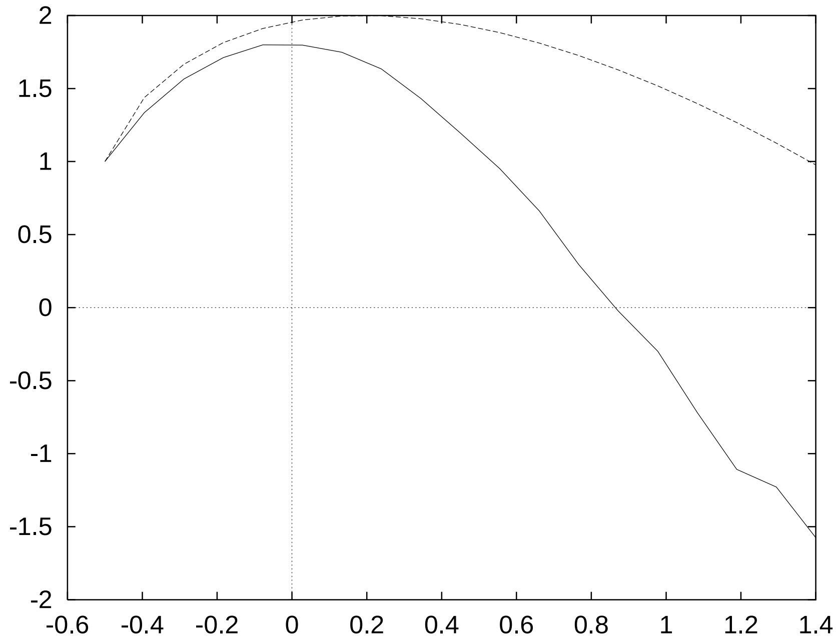


Figura 5.5: *Espectro experimental de dimensiones de la imagen* 71_15 *Se ha representado según ec. 5.7, con* $a \approx 2$.*Se compara con el de un She-Leveque bidimensional (línea de trazos) de parámetros* $\beta = 0.5$ *y* $\tau_2 = -0.25$

El comportamiento de $D^{exp}(h)$ es muy similar al de $D(h)$ para valores de h inferiores al máximo, pero la densidad decae más rápidamente que en la proyección teórica para valores de h menos singulares. En principio creemos que ello es debido al método de separación de singularidades, que hace difícil discriminar puntos poco singulares que estén próximos a puntos de fuerte singularidad.

Por otro lado, se ha observado que cuando se toma una mala elección de parámetros en el análisis el espectro acusa así mismo ese efecto, revelándose como un último criterio para fijar la bondad del análisis. Únicamente habría que tratar de explicar el valor numérico del factor a de la ec. 4.5, $a \approx 2$, y tratar de mejorar la resolución para los h mayores.

5.3.3 Conclusiones

Hemos separado la variedad más singular, $F_{-\Delta}$, por ser la que más claro contenido geométrico tiene. Según la expresión del espectro de dimensiones en She y Leveque, ec. 4.20, ya vimos que $D(-\Delta) = D_\infty$, que en nuestro caso es $D_\infty \approx 1$. No por casualidad, este conjunto parece identificar los contornos de los objetos en la imagen. Esto es muy razonable, ya que la frontera de un objeto ha de verse como una transición muy abrupta, no contínua. Además, un objeto regular es característicamente delimitado por una frontera de dimensión 1. Parece que, de una forma absolutamente inintencionada hemos encontrado un método canónico para separar objetos.

Se sabe que los bordes o contornos de los objetos que constituyen las imágenes naturales son una característica muy importante de las mismas, y se piensa que las caracterizan (ver el libro de Marr, [31]). Por otro lado, esto se complementa con un estudio reciente que sugiere que las imágenes podrían estar compuestas como bordes o algo similar estadísticamente independientes ([32]).

También es conocida la presencia de columnas de dominancia en la corteza visual primaria, especializadas en la detección de segmentos orientados según un ángulo dado (ver [33, 34]). Es por ello muy importante que en este acercamiento desde las propiedades estadísticas de las imágenes naturales, sin necesitar suponer nada acerca del mundo real que las genera, podamos llegar al concepto de borde, antesala del de objeto, de forma intrínseca. Nos da pie esto a pensar que una teoría ecológica de la información sería perfectamente capaz de explicar la presencia de esas columnas de dominancia en las primeras etapas del procesado visual.

Con respecto al significado del proceso multiplicativo en el contexto de las imágenes, es una cuestión abierta entender cómo se podría implementar el mecanismo de "inyección energética" (el proceso multiplicativo) entre variedades y no entre diferentes escalas, si es que esto es posible. De ese modo se podría entender qué papel juega cada variedad en la imagen, más allá de $F_{-\Delta}$. Además, es interesante analizar qué parte del contenido total de información de la imagen posee cada parte: en ese sentido, parece que la variedad más singular es la informativamente más relevante.

Por último, destacar la gran similitud entre este análisis y el llamado *análisis multiresolución*, desarrollado por Stephane Mallat y Sifen Zhong (ver [35]). En ese artículo tratan de hacer reconstrucción de una imagen a través de los máximos de módulo de la transformada en derivadas de ondículas de la propia imagen. Salvando los términos (nosotros aplicamos transformada de los módulos de gradiente al cuadrado) su trabajo apunta a que estos máximos contienen información suficiente acerca de toda la imagen, y sobre la misma imagen de Lena él obtiene como conjunto de módulos máximos uno muy similar a nuestra variedad más singular.

Lo que claramente permitiría acercar más enfoques sería un tratamiento de $c(\vec{x})$ como campo multiafín. Este aspecto está todavía en un estado de estudio incipiente.

Capítulo 6

Modelos de generación de Imágenes

6.1 Motivación

Toda vez que hemos conseguido construir variables que recogen aspectos estadísticos esenciales de las imágenes naturales, vamos a intentar ir un poco más allá. Trataremos de construir modelos para la generación de imágenes que recojan las propiedades que nosotros creemos que son fundamentales. De este modo, podremos ver cuánta estructura queda todavía no definida (con respecto a las imágenes reales) y cuánta de la que describen nuestras variables puede ser explicada en términos simples, tales como objetos, presencia de focos de luz, aspectos geométricos, etc. De ese modo avanzaremos en la interpretación de los resultados desde un punto de vista intuitivo y asimilaremos las características observadas con posibles detectores de estructura que bien podrían estar presentes al nivel de la corteza V1 de los mamíferos. Algunos aspectos son tratados en un trabajo de próxima aparición, [41]

6.2 Modelos monofractales

Un primer intento de generación lo constituyen los llamados *modelos objetivos monofractales.*. En ellos se ha intentado generar imágenes siguiendo modelos simples del mundo que podrían dar distribuciones de imágenes similares a la real. La construcción se basa en el posicionamiento de objetos, ya en un espacio tridimensional virtual y luego proyectando sobre la pantalla, ya directamente sobre ésta. Por objeto se entiende en este caso una figura geométrica simple con iluminación uniforme.

Hemos ensayado con estas dos posibilidades. En ambos casos, nuestra variable presentaba ESS y se puede hablar de $\rho(p, 2)$ y de $\bar{\rho}(p, 2)$.

6.2.1 Modelo de Ruderman

Descrito en su artículo *"Origins of scaling in Natural Images"*, Daniel Ruderman propone un modelo basado en la construcción de imágenes de acuerdo con el espectro de potencias de la correlación luminosa a dos puntos experimental. Para ello, el tamaño de los objetos sigue una ley de distribución apropiada, y su ubicación en la imagen se determina al azar según una distribución uniforme. La luminosidad de cada objeto es determinada también al azar e independientemente, siguiendo ésta última una distribución gaussiana. Los coeficientes $\rho(p, 2)$ y $\bar{\rho}(p, 2)$ obtenidos se representan en las figuras 6.3 y 6.4 :

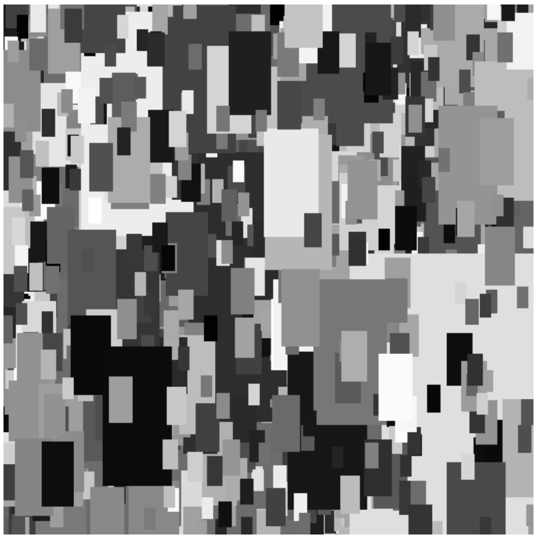


Figura 6.1: *Imagen típica según el modelo de Ruderman*

6.2.2 Colocación tridimensional de objetos que se ocluyen unos a otros

En este modelo, se considera el ángulo sólido definido por nuestra pantalla y así se determina la porción del espacio tridimensional que definen este ángulo sólido y dos esferas de distancias mínima y máxima prefijadas. En la región del espacio así obtenida se colocan al azar objetos idénticos uniformemente distribuídos. Finalmente, se construye la imagen permitiendo que los más cercanos tapen (ocluyan) a los anteriores. La luminosidad se determina según un decaimiento disipativo, siendo más oscuros los objetos más lejanos. También se le da una luminosidad característica al medio óptico no ocupado por objetos; y cuando un objeto está tan lejos que su luminosidad es significativamente más pequeña que la del vacío, ese objeto no genera imagen (representando así efectos difractivos a larga distancia). Para una selección de parámetros, los coeficientes obtenidos fueron los representados en las figuras 6.3 y 6.4 :

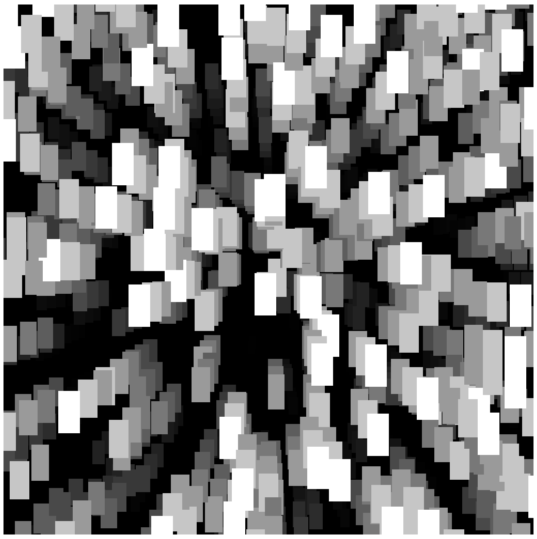


Figura 6.2: *Imagen típica según el modelo tridimensional*

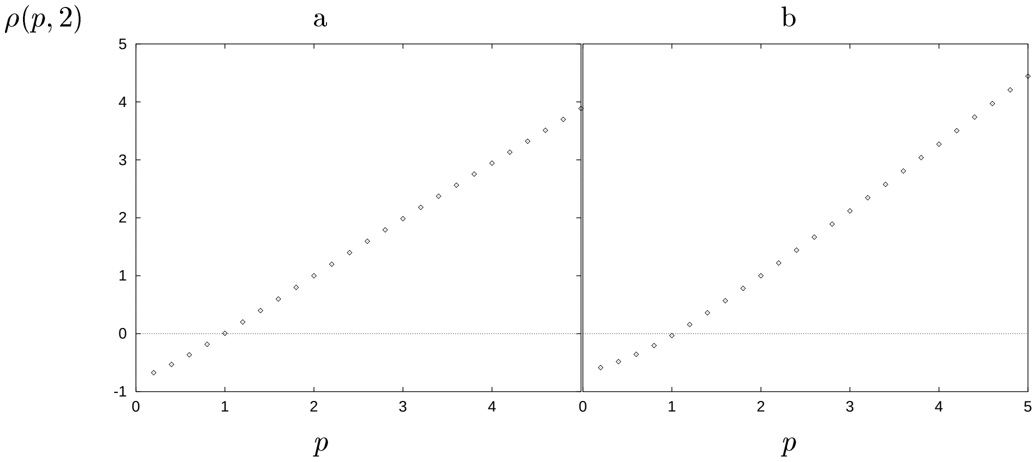


Figura 6.3: *Función experimental* $\rho(p,2)$ *en los modelos monofractales*
a: Ruderman ; b: Tridimensional

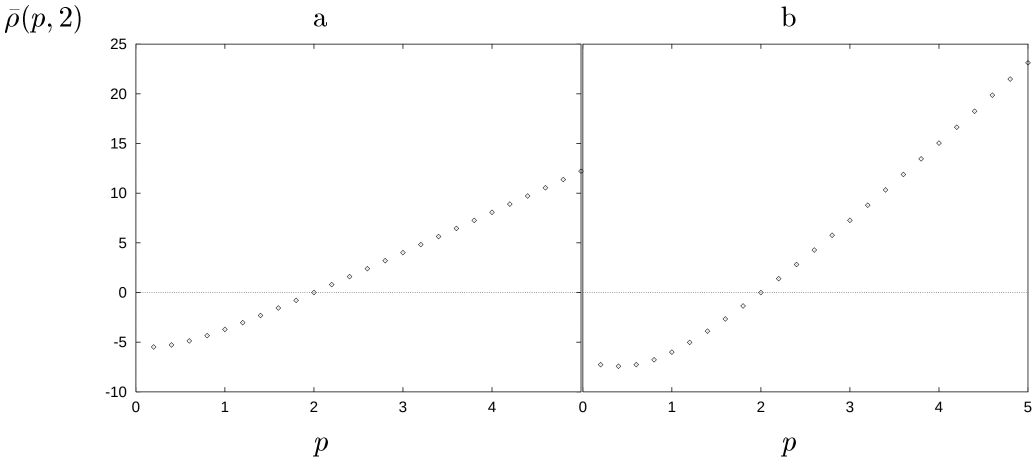


Figura 6.4: *Función experimental* $\bar{\rho}(p,2)$ *en los modelos monofractales*
a: Ruderman ; b: Tridimensional

6.2.3 Comparación de los datos. Crítica de los modelos

Por construcción, los modelos presentan relaciones entre objetos carentes de una escala característica. No es por ello de extrañar que los espectros de potencias que poseen sigan leyes de potencias bien claras: de hecho, el modelo de Ruderman fue diseñado para verificar esta propiedad. Resulta simple ajustar los parámetros de los modelos para conseguir cualquier exponente negativo que se desee para el espectro.

Además, ambos modelos presentan las leyes de escala SS y ESS dentro del rango adecuado. Observando el coeficiente $\rho(p,2)$, en ambos casos los resultados experimentales muestran un comportamiento lineal asintóticamente (p grande), que como ya sabemos está relacionado con tener $\| e_{\vec{r}} \|_\infty$ finita. La pendiente de esta recta asintótica es diferente en cada modelo de la experimental, y no se puede ajustar cambiando los parámetros internos en los modelos (debido a la monofractalidad, como se verá)

Por otra parte, ambos modelos se diferencian de los datos experimentales en que ni $\rho(p,2)$ ni $\bar{\rho}(p,2)$ tienden a cero cuando p tiende a cero. Ello implica que los modelos tienen una discontinuidad en el orden de los momentos cuando éste tiende a cero, puesto que el momento de orden cero es igual a 1 para cualquier distribución. Esto significa que hay una hipótesis errónea en el planteamiento de los modelos.

Además, es inmediato usando los resultados de la SubSección 3.5.3 que $< \ln e_{\vec{r}} >= -\infty$. Esto significa que $\rho_{e_{\vec{r}}}(x)$ tienen algún tipo de problema alrededor de $x = 0$.

Observando las gráficas obtenidas de los modelos de las Secciones 6.2.1 y 6.2.2, se ve que tenemos un comportamiento muy próximo al completamente lineal. Por la SubSección 2.3.5 esto implicaría una distribución muy concentrada entorno al cero y al máximo valor. De hecho, por la forma de construir los modelos, la probabilidad $\wp(e_{\vec{r}} = 0)$ es distinta de cero, porque la iluminación dentro de un objeto es constante; por tanto, al calcular el valor de $e_{\vec{r}}$ en un punto que quede dentro de un objeto, si todo el camino de la integral que lo define está contenido dentro de ese objeto el valor de $e_{\vec{r}}$ será cero. La probabilidad de tomar al azar un punto dentro de un objeto suficientemente grande es diferente de cero y así ambos modelos tienen una contribución tipo δ en torno a $e_{\vec{r}} = 0$, lo que explica su fracaso.

Esto nos está diciendo al mismo tiempo algo acerca de la textura de los objetos: en las imágenes naturales la zona de texturas débiles (la parte interior de los objetos) contribuye significativamente a los momentos de órdenes menores de nuestra variable $e_{\vec{r}}$. Estos momentos reflejan el comportamiento de la distribución cerca del cero, donde se producen pequeños e insignificantes saltos de la luminosidad. Esto es la textura de los objetos.

Las gráficas de los histogramas experimentales de estos modelos confirman las predicciones que acabamos de formular :

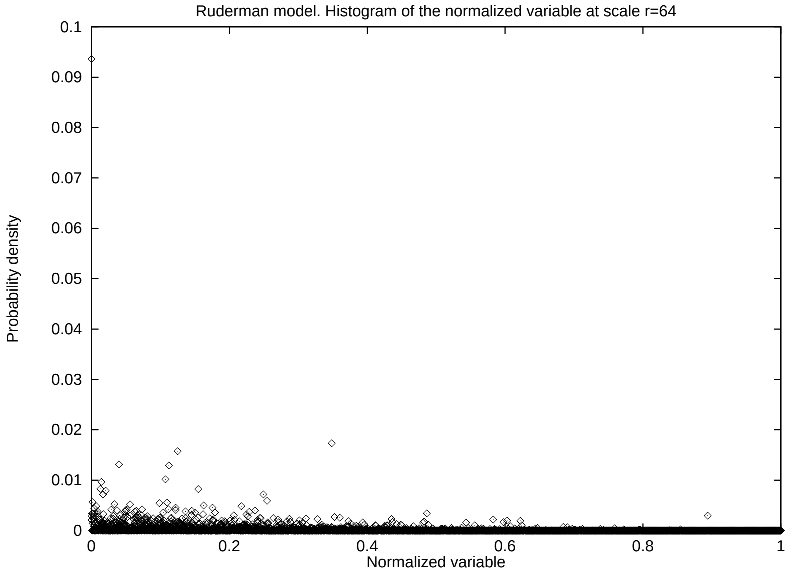


Figura 6.5: *Histograma experimental de $f_{\vec{r}}$ ($r = 64$) en el modelo generativo de Ruderman.*
Se ve una contribución muy importante, tipo delta, en $x = 0$; y por ello mismo los niveles inferiores aparecen como ruidosos y poco estimados

Como puede verse en ambas gráficas (figuras 6.5 y 6.6), la probabilidad se halla muy concentrada entorno a $e_{\vec{r}} = 0$, dando a ese punto un peso diferente de cero y considerable. Como se dijo, efectivamente $e_{\vec{r}}$ valdrá cero si todo el camino que lo define queda dentro de un objeto, lo cual tiene una cierta probabilidad no nula y calculable. Esto da lugar a la discontinuidad en el origen observada en los coeficientes $\rho(p,2)$ y $\bar{\rho}(p,2)$.

Dejando al margen la delta centrada en el origen, el resto de la distribución es no trivial, y tiene que ver con la distribución de posibles saltos de luminosidad entre objetos y de objeto al vacío, que son característicos de cada modelo y de los parámetros elegidos en cada caso. Esto explica el curvamiento de las curvas de $\bar{\rho}(p,2)$ (ver figuras 6.3 y 6.4), que es más o

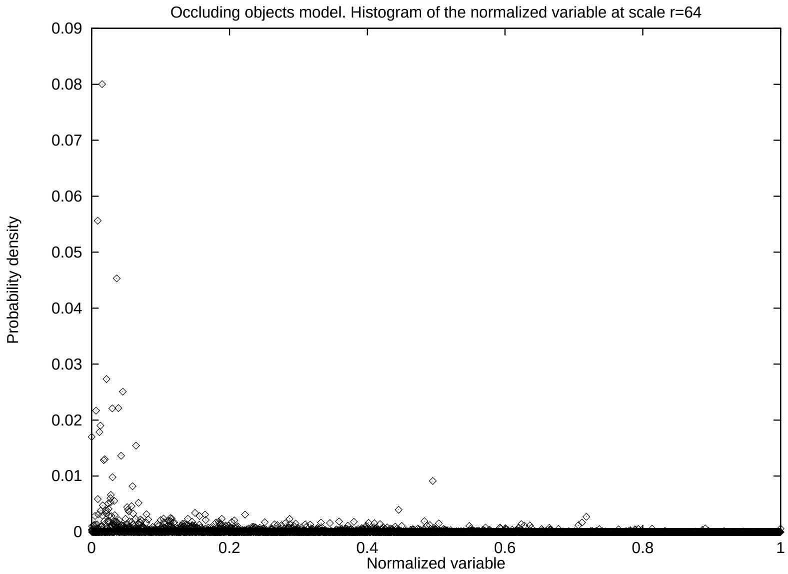


Figura 6.6: *Histograma experimental de $f_{\vec{r}}$ ($r = 64$) en el modelo de objetos ocluyentes*
Similar al de Ruderman, figura 6.5; aquí la delta en $x = 0$ es menos pronunciada

menos controlable. Lo interesante del caso es que los parámetros elegidos y aún el tipo de modelo no afectan al coeficiente $\rho(p, 2)$.

Desde el punto de vista del análisis de singularidades, estos modelos constituyen el tipo particular de multifractal que hemos denominado monofractal. Efectivamente, aquí el soporte de nuestra medida $d\mu$ lo constituyen exclusivamente los bordes de los objetos, ya que en el interior de éstos se anula. En ambos modelos de generación puede verse, por ser los contornos líneas rectas, que la dimensión fractal de este conjunto es 1. Por otra parte, debido a la ausencia de correlaciones entre las singularidades estas tienen el exponente asociado a la función δ, o sea, $h = -1$.

Esto hace que la ley de escala que gobierna estos modelos no sea más que la simple relación de Kolmogorov, o sea, el proceso multiplicativo constante. Eso lleva inmediatamente a que $\tau_p \propto p$. Dado que $\rho(1, 2) = 0$ $\rho(0, 2) = 1$ se concluye que $\rho(p, 2) = p - 1$, lo cual se verifica trivialmente en la curva.

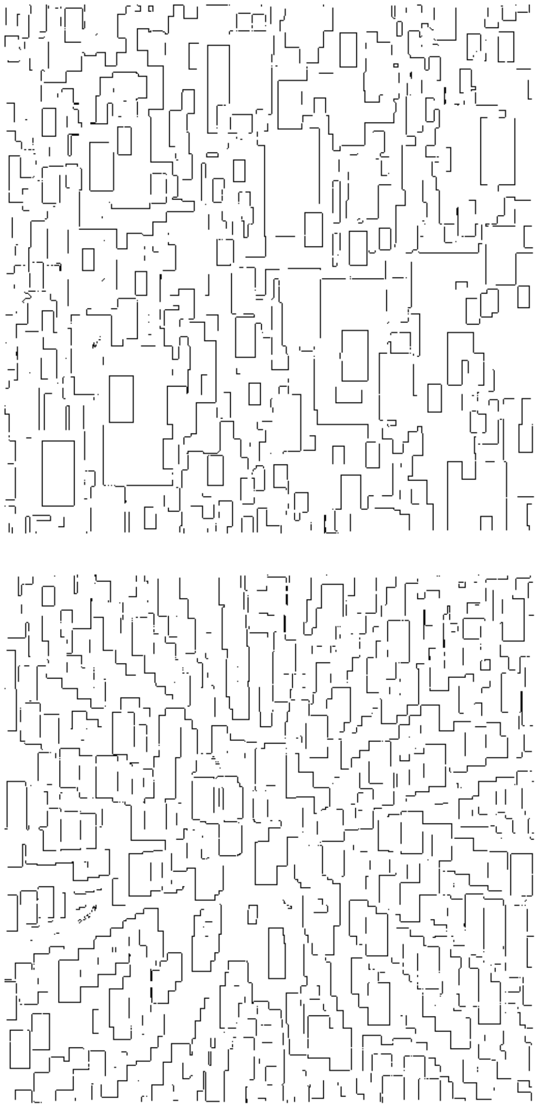


Figura 6.7: *Variedad más singular en las imágenes monofractales*
Los puntos representados tienen un $h = -1 \pm 0.1$, *y constituyen la variedad más singular en estas imágenes. El análisis se efectuó sobre las imágenes de las figuras 6.1 y 6.2, respectivamente.*

6.3 Modelos multifractales

6.3.1 El modelo de Benzi

Una de las implementaciones más simples que pueden hacerse de un campo escalar multifractal fue propuesta por Benzi et al. (ver [36, 37, 38]). La base teórica es relativamente simple: se trata de construir una jerarquía diádica de vértices, de modo que la señal se componga en una base de ondículas como una combinación lineal de elementos de esa base con coeficientes los de la jerarquía: De ese modo, las relaciones entre las distintas escalas serán las del multifractal. No haremos aquí el desarrollo teórico completo del modelo, aunque escribiremos las relaciones mínimas para entenderlo.

En principio, tomaremos una función $\Psi(\vec{x})$ de media nula como ondícula madre; de ese modo genera una base supercompleta de funciones (ver [27]). De esta base extraeremos un conjunto completo, que constará de las funciones $\{\Psi_{j,\vec{k}}(\vec{x})\}$, $\vec{k}=(k_1,k_2)$,$j,k_1,k_2 \in \mathcal{Z}$, dadas por :

$$\Psi_{j,\vec{k}}(\vec{x}) \equiv \Psi(2^j\vec{x}-\vec{k})$$

A continuación construímos un conjunto diádico de coeficientes. Tomamos un valor $\alpha_{0\vec{0}}$ inicial. De éste pasamos a cuatro nuevos coeficientes $\alpha_{1\vec{k}}$, con $k_1,k_2=0,1$, donde se verifica que $\alpha_{1\vec{k}}=\eta_{1\vec{k}}\alpha_{0\vec{0}}$, y los coeficientes $\eta_{1\vec{k}}$ se escogen como variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas de una distribución de probabilidad prefijada.

Recursivamente, a cada paso de escala repetimos la operación, haciendo que cada coeficiente $\alpha_{j\vec{k}}$ genere otros cuatro por multiplicación con los respectivos η independientes, por medio de la relación general

$$\alpha_{j\vec{k}} \;=\; \eta_{j\vec{k}}\alpha_{j-1,[\frac{\vec{k}}{2}]}$$

donde con $[\frac{\vec{k}}{2}]$ queremos simbolizar el vector cuyas componentes son la parte entera, redondeando hacia abajo, de las de $\vec{k}$ divididas por 2. Por ello, a la escala j los vectores $\vec{k}$ considerados tienen sus componentes k_1,k_2 comprendidas en el rango de números enteros entre el 0 y 2^{j-1}.

Obtenida la familia de coeficientes $\alpha_{j\vec{k}}$ construiremos la señal multiafín $c(\vec{x})$ como :

$$c(\vec{x}) \;=\; \sum_{j=0}^{N}\sum_{k_1,k_2=0}^{2^{j-1}}\alpha_{j\vec{k}}\Psi_{j,\vec{k}}(\vec{x}) \tag{6.1}$$

Tal función es, efectivamente, multiafín, o sea, verifica que :

$$\langle [\delta_{\vec{r}} c]^p \rangle \;=\; \alpha_p r^{\tau_p} \tag{6.2}$$

donde, análogamente a como se definía en el caso de fluídos turbulentos, $\delta_{\vec{r}} c(\vec{x}) = |c(\vec{x}+\vec{r}) - c(\vec{x})|$. Los coeficientes τ_p se relacionan sencillamente con los momentos p-ésimos de la variable η, $\bar{\eta^p}$ (ver el artículo de Benzi et al., [37])

$$\tau_p \;=\; -\log_2 \overline{\eta^p} \tag{6.3}$$

Basta escoger correctamente la distribución de la variable η para poder tener un campo multiafín con SS de exponente deseado. Esta construcción puede generalizarse simplemente para tener cualquier tipo de ESS (no necesariamente proviniente de una SS).

Supongamos ahora que generamos un campo de contrastes luminosos $c(\vec{x})$ de acuerdo al modelo de Benzi. En tal caso, el campo de gradientes de esta luminosidad define una densidad multifractal que está de acuerdo con el multifractal de $\delta_{\vec{r}} c$. ¿ Por qué ?

La respuesta nos lleva de nuevo a la relación dinámica planteada en la ec. 3.18: si ya sabemos que nuestro campo de contrastes es multiafín, entonces $e_{\vec{r}}$ tendrá las leyes de escala apetecidas y se verificará esa relación entre las variables.

Se ha simulado numéricamente este modelo, escogiendo η con la distribución oportuna para obtener los valores correctos. En concreto, $\eta = 2^{\Delta-1}\Gamma$, donde Γ tiene una distribución Log-Poisson dada por :

$$\rho_\Gamma(x) \;=\; e^{-s} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!}\, \delta(x - \beta^n)$$

y donde $s = (d - D_\infty) \ln 2$. De este modo, siguiendo el cálculo de Benzi se obtiene que :

$$\tau_p^c \;=\; \log_2 \overline{\eta^p} \;=\; p + \tau_p^{S-L}$$

donde por τ_p^c entendemos el exponente SS de $c(\vec{x})$ y por τ_p^{S-L} es un exponente τ_p acorde con el modelo de She & Leveque. Por tanto, el τ_p asociado a $e_{\vec{r}}$ es directamente τ_p^{S-L}, que es lo que se pretendía.

Hay una observación importante que hacer sobre esta fórmula: en la SubSección 3.3.1 se establecía que $\mathbf{e}_{\vec{r}}^{1}$ no podía depender de r; sin embargo, la construcción que acabamos de presentar permite construir τ_p^c y por ello $\tau_p^{e_{\vec{r}}}$ a nuestro antojo, permitiendo en particular que $\tau_1 \neq 0$. ¿ Cómo es posible compatibilizar estas dos afirmaciones ?

Figura 6.8: *Imagen construída según el modelo de Benzi*
Se han tomado $\alpha_{j\vec{k}}$ de acuerdo a un log-Poisson de parámetros apropiados para reproducir el modelo de She y Leveque con $\tau_2 = 0.25$, $\beta = 0.5$

La respuesta es simple: τ_1 será nulo en tanto en cuanto nuestro sistema no tenga una dimensión fractal anómala[1] . Pero cuando la variedad soporte de $d\mu$ sea de dimensión D estrictamente menor que la máxima, d, el exponente

[1]En ese sentido, los sistemas generados por los modelos monofractales tienen de hecho dimensión fractal anómala (el conjunto de los puntos que contribuyen a $e_{\vec{r}}$ es de dimensión 1, son los contornos de los objetos), pero el soporte de la medida $d\mu$ es todo $\Re^d$, por densidad.

τ_1 será no nulo y, de hecho,$\tau_1 = D - d$ (ver SubSección 4.3.3). Esto permitiría explicar qué sucederá en los casos en que por construcción forcemos que $\tau_1 < 0$. Para poder explicar los casos $\tau_1 > 0$ nuevamente tendríamos que forzar la interpretación de la dimensión a través de la densidad de probabilidad $\rho_h(h)$, alegando que, superpuesto al multifractal, hay una componente fractal desligada. La resolución teórica posiblemente es abstrusa, pero ésta es una cuestión muy académica y notablemente compleja, por lo que no la abordaremos aquí.

En la figura 6.8 se muestra una imagen generada de acuerdo a este modelo. Es bastante interesante calcular sobre ella el espectro de singularidades, en particular la variedad más singular. Como se ve en la figura 6.9, este conjunto de puntos tiene un cierto "recuerdo" del proceso de subdivisión en cuadrados que le dio origen, pudiéndose reconocer trazas de los mismos.

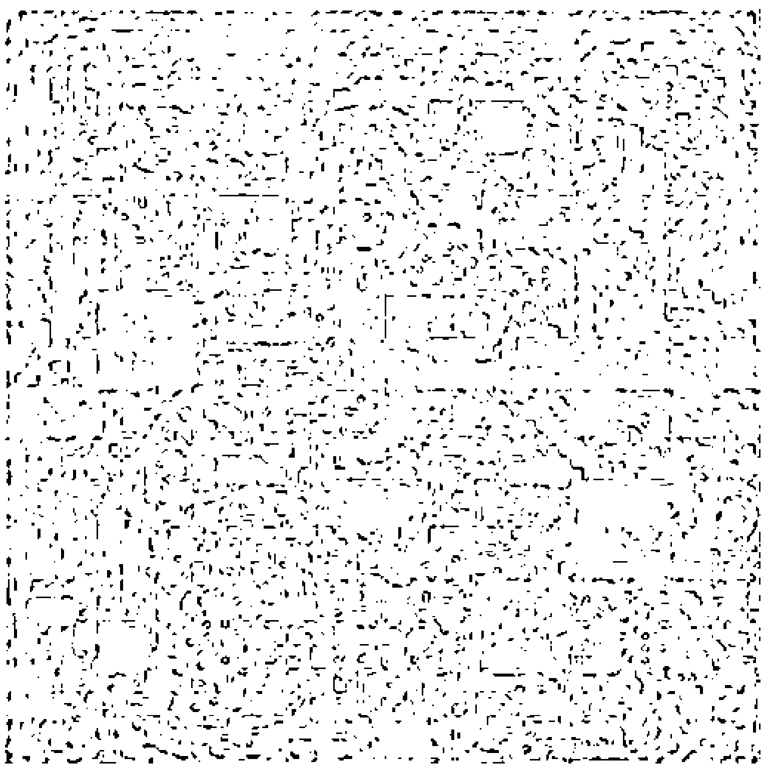


Figura 6.9: *Variedad más singular en el modelo de Benzi*

Las curvas de SS y ESS no tienen mucho interés en este modelo, pues salen lo esperado, dentro de los márgenes de precisión numérica. Más interesante es analizar la conjetura dimensional (ec. 4.5) para este modelo hecho a la medida.

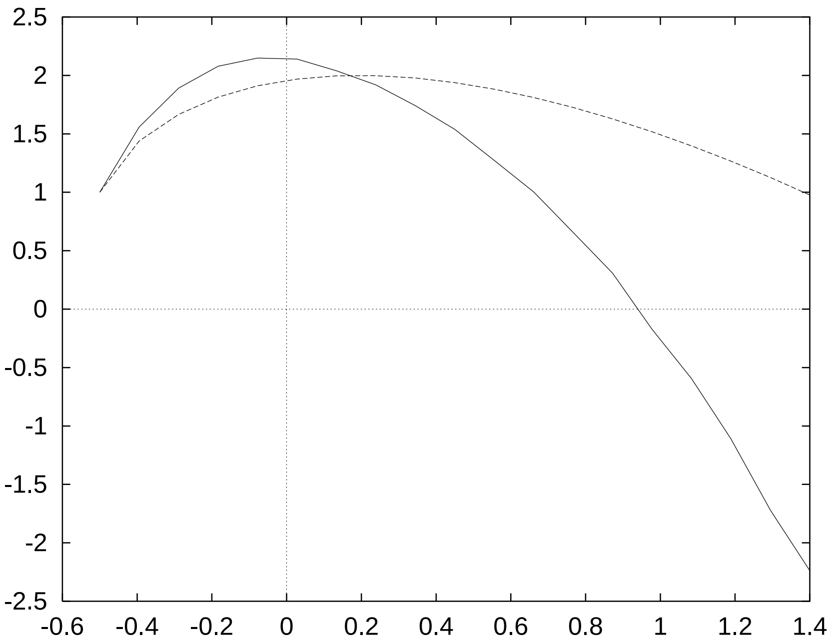


Figura 6.10: *Espectro experimental de dimensiones en el modelo de Benzi Se ha representado según ec. 5.7, con* $a \approx 2$*.Se compara con el de un She-Leveque bidimensional de parámetros* $\beta = 0.5$ *y* $\tau_2 = -0.25$ *(línea a trazos)*

Aquí el acuerdo conseguido por la conjetura dimensional es parecido al de las imágenes naturales, siendo de hecho ambas curvas experimentales muy similares; lo cual no permite corroborar la conjetura (sigue el enrarecimiento a exponentes poco singulares), pero hace plausible que verdaderamente ρ_h venga determinado por los aspectos geométricos (por el espectro dimensional $D(h)$)

No obstante, el modelo de Benzi no cumple todos los requerimientos que esperaríamos de un modelo plausible de imágenes naturales. Ciertamente la estructura bajo cambios de escala es la correcta en lo que a la variable $e_{\vec{r}}$ se refiere, pero la correlación a dos puntos (con la que se obtiene el espectro de potencias) sigue una ley diferente a la que debiera. Para un espectro $S(\vec{f})$ que decae como $f^{-(2-\eta)}$, la correlación luminosa debería escalear como $r^{-\eta}$.(Si $\eta = 0$, entonces $C(\vec{r}) \sim \ln r$.)

Sin embargo, no es así. Por construcción $\delta_r c$ es un campo multiafín; por tanto, la correlación $C(\vec{r})$ puede expresarse simplemente en función de $\langle[\delta_r c]^2\rangle$

$$C(\vec{r}) \;=\; \langle c(\vec{x})c(\vec{x}+\vec{r})\rangle_{\vec{x}} \;=\; \langle c^2\rangle - \frac{1}{2}\langle[\delta_r c]^2\rangle$$

por lo que se sigue que :

$$C(\vec{r}) \;=\; K_1 - K_2 r^{\tau_2^c}$$

con $K_1, K_2 > 0$. Pero éste no es el tipo de comportamiento que quisiéramos observar: si, por ejemplo, queríamos $\tau_2^{S-L} = -0.25$ tendremos que $\tau_2^c = 1.75$, por lo que la correlación decaería de forma casi cuadrática, e incluso haciéndose cada vez más negativa según r crece. Es preciso una modificación de este modelo que rompa hasta cierto punto la multiafinidad de c, porque eso es lo que pasa en las imágenes naturales y además parece que es la única manera de conseguir un espectro de potencias correcto.

6.3.2 El modelo de Benzi diluído

En este modelo se propone diluir los coeficientes del desarrollo en ondículas del de Benzi para romper la coherencia a gran escala (y acabar con la multiafinidad de c), pero de un modo que preserve la coherencia a la microescala (para que $e_{\vec{r}}$ siga siendo multifractal)

El procedimiento es simple : Inspirándonos en el procedimiento de dilución que propone Field en [39], que se sabe que produce un espectro de potencias correcto fruto precisamente de romper la coherencia entre los exponentes, tomamos el desarrollo de Benzi, ec. 6.1, construyendo los coeficientes $\alpha_{j\vec{k}}$ con el mismo proceso multiplicativo; pero al final eliminamos, a cada escala j, una fraccion β_F de los mismos, de forma completamente aleatoria e independiente. Una imagen tipo puede verse en la figura 6.11.

El primer resultado obvio de este procedimiento es un espectro de potencias puramente f^{-2} para diluciones β_F de 0.5 y mayores. Por otro lado, SS y ESS resulta relativamente arruinado para $\delta_{\vec{r}} c$

Lo más interesante y sorprendente de todo es que SS y ESS se preservan para $e_{\vec{r}}$ de una forma plena. La curva de $\rho(p,2)$ puede, nuevamente, ser

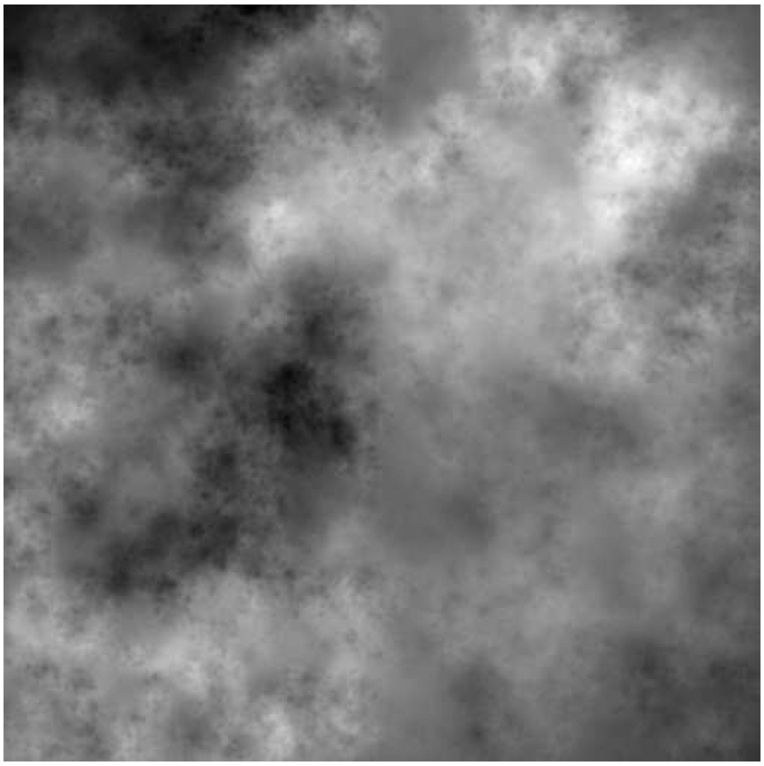


Figura 6.11: *Imagen según el modelo de Benzi diluido*
Se han tomado los coeficientes $\alpha_{j\vec{k}}$ *como antes y un* $\beta_F = 0.75$

ajustada de acuerdo al modelo de She y Leveque si el proceso de construcción de los coeficientes $\alpha_{j\vec{k}}$ fue el apropiado, el mismo que antes de la dilución.

En la figura 6.12 se ha representado la variedad más singular para una imagen de este modelo. Las reminiscencias diádicas del proceso multiplicativo son nulas ya, gracias al grado de incoherencia introducido. Es, en ese sentido, mucho más isótropo que su ascendiente. También se ha representado el espectro experimental de dimensiones, figura 6.13

La crítica negativa a este modelo es su falta de realismo y carencia de objetos. Está claro que ese aspecto (la presencia de objetos) no está presente en las leyes de escala analizadas hasta ahora. Queda la distribución subyacente de la que da cuenta el factor α_p presente en la descripción de SS;

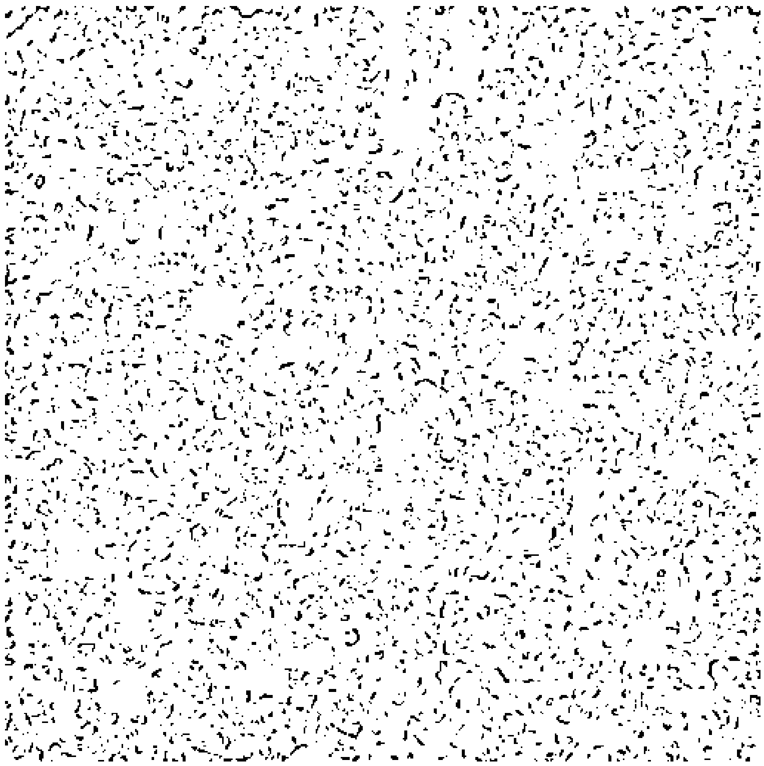


Figura 6.12: *Variedad más singular en el modelo de Benzi diluido*

como vimos, tal factor puede relacionarse con una distribución intrínseca, independiente de la escala. Debe ser éste el modo de introducir la presencia de objetos en las imágenes. Por otro lado, en el modelo de Benzi se parte de un único vértice generador, con una estadística independiente. Si se tomara una población inicial de vértices distribuidos, por ejemplo, constituyendo los bordes de los objetos presentes, y luego se propagara del modo anterior, se podría seguramente obtener una solución mixta

6.3.3 Sobre futuros modelos

Los modelos multifractales, si bien consiguen (en el caso del modelo de Benzi con dilución) las características de escala deseada no se basan en objetos u estructuras reconocibles. Es posible que con la exposición de una

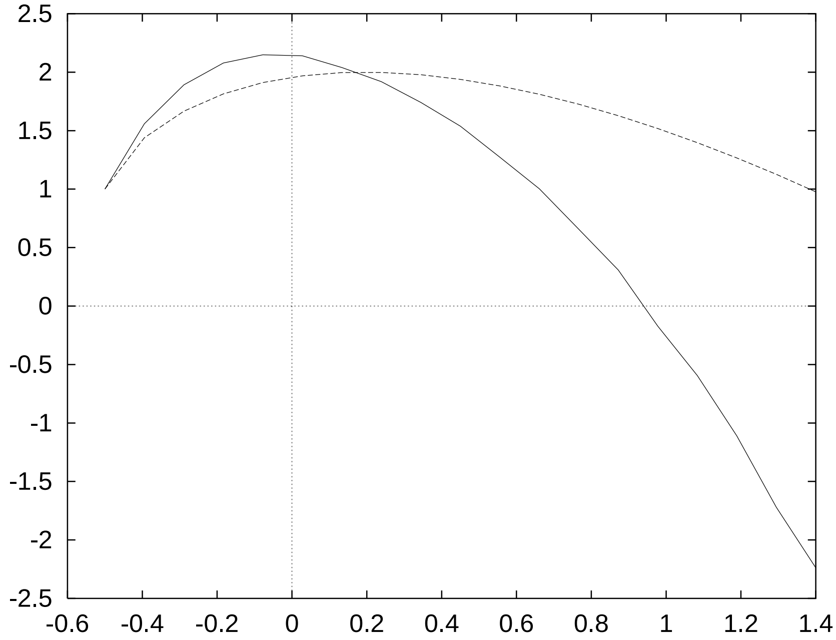


Figura 6.13: *Espectro experimental en el modelo de Benzi diluido*
Se ha representado según ec. 5.7, con $a \approx 2$.*Se compara con el de un She-Leveque bidimensional de parámetros* $\beta = 0.5$ *y* $\tau_2 = -0.25$ *(línea a trazos)*

red visual a las vaporosas imágenes de estos modelos uno pudiese predecir la formación de campos receptivos en las células ganglionales. No obstante, más allá del formalismo matemático siempre sería interesante proponer un tipo de imagen segmentable (descomponible en objetos).

Se ha probado a introducir variaciones de naturaleza aleatoria (ruido) sobre el nivel medio de la luminosidad en los modelos objetivos monofractales, obteniendo gráficas de $\rho(p,2)$ más aceptables (ya tiende a cero cuando p tiende a cero). También se ha probado con un esquema de sub-objetos dispersos dentro de los objetos, cuya iluminación se desvía aleatoriamente un porcentaje del nivel medio del objeto en que se inscribe; y estos sub-objetos a su vez subdivididos en otros más pequeños y así *ad nauseam* ; con éste las gráficas también resultaron más satisfactorias. Queda en ambos esquemas de textura la duda de si variando convenientemente todos los parámetros se podría conseguir un ajuste razonablemente exacto de $\rho(p,2)$.

Lo que en ninguno de estos modelos se tiene en cuenta es la distribución intrínseca de las imágenes, el comportamiento de $e_{\vec{r}}$ a una escala dada fija. De algún modo, es $\bar{\rho}(p,2)$ el que viene dando cuenta de ese grado de libertad subyacente: es $\bar{\rho}(p,2)$ el que viene determinado por las relaciones inter-objetos a escala fija, etc. Por ello, sería siempre más concluyente el estudio de los histogramas y su forma, que contiene no sólo la información de escala (como se pasa de una a otra), sino toda la distribución a una dada.

Sin hacer de menos a estos intentos, posiblemente se debería, volviendo sobre la experiencia, tratar de determinar la estructura libre remanente en las imágenes, la cual, posiblemente, tenga un mayor contenido de información. Del estudio de las cantidades de información en esas estructuras y las relaciones geométricas no consideradas se podría explorar un concepto más amplio y realista de modelo generativo. (Parte de esta idea es comentada en el siguiente Capítulo de conclusiones). Esto, sin embargo, es ya un objetivo más ambicioso y queda fuera de los límites de estudio de la presente tesis.

Capítulo 7

Conclusiones y direcciones futuras

7.1 Conclusiones y aplicaciones

Después de todo este estudio, podemos resumir los principales avances del trabajo en los siguientes puntos:

- Se ha mostrado que las imágenes naturales, como sistema estadístico, presentan propiedades de **invariancia de escala**.
- Se ha construido una variable ($e_{\vec{r}}$) que observa la estructura local de la imagen, y que manifiesta toda una jerarquía de leyes de escala, que es la denominada **SS**.
- Además, en el análisis de dicha estructura se ha encontrado que las imágenes pueden ser explicadas por medio de **estructuras microscópicas** (las F_h), que se realizan de forma geométrica en cada imagen.
- La variable $e_{\vec{r}}$ puede ser descrita como una composición entre escalas a través de un **proceso multiplicativo**, que las genera en cascada.
- Esto permite describir toda la compleja transformación de escala por medio de tan sólo **dos parámetros libres** (por ejemplo, τ_2 y el β de She-Leveque)
- Por último, se han construido **modelos de generación de imágenes** que permiten entender esta simetría de las imágenes y tratar de delimitar otras propiedades no consideradas hasta ahora (objetos).

Las posibles aplicaciones de estas conclusiones teóricas son entre otras :

- Separar la parte redundante, siempre presente en las imágenes y responsable de los comportamientos de escala, de su esqueleto generador, informativamente más relevante (i.e., la variedad más singular)
- Hacer inteligible desde la Teoría Estadística de la Información los procesos de separación y detección de bordes, para los que suele haber estructuras especializadas en el sistema visual primario de los mamíferos. (Esto se explica en la siguiente Sección, dedicada a las perspectivas de futuro)
- Explotar los modelos de imágenes más simples para delimitar su influencia en las adaptaciones sinápticas en dicho sistema visual. (Ver próxima Sección)
- Establecer un laboratorio que permita exportar por analogía experimentos sobre SS y ESS realizados en imágenes a otros contextos experimentalmente menos manejables, como son los fluídos muy turbulentos.

7.2 Proyecciones para el futuro

Dentro de las posibilidades que se abren directamente del contenido de esta tesis, ampliamos la observación de aquellas dos que, por motivación, más nos interesan.

7.2.1 Información

Nuestro estudio pone en evidencia unas estructuras emergentes (que son las variedades fractales F_h) que estarían presentes en las imágenes naturales y posiblemente también en cualquier imagen tomada del mundo real (como la de Lena).

Son muy relevantes las propiedades estadísticas de estas variedades. En un primer análisis, hemos analizado la distribución del $\alpha(\vec{x})$[1] residual del comportamiento multifractal (ver ec. 4.1) a lo largo de cada componente

[1] En lo que sigue hemos tomado como definición de $d\mu$ una ligeramente diferente: $d\mu(\vec{x}) \equiv |\nabla c|(\vec{x}) d\vec{x}$. Por los argumentos de bi-Lipschitzidad sabemos que posee las mismas propiedades de escala y las mismas variedades F_h, lo cual hemos comprobado. Ha resultado más conveniente para este cálculo pues así los valores de $\alpha(\vec{x})$ resultaban menos concentrados en valores pequeños y los histogramas más claros.

fractal. Para ello, hemos construido los histogramas de estas variables, que llamaremos α_h.

El primer hecho significativo observado es que si definimos A_h como el máximo valor de $\alpha(\vec{x})$ cuando se toman los $\vec{x}$ dentro de la variedad F_h, la variación de este máximo al aumentar h es muy cercano al de un decaimiento exponencial, monótono.(ver figura 7.1)

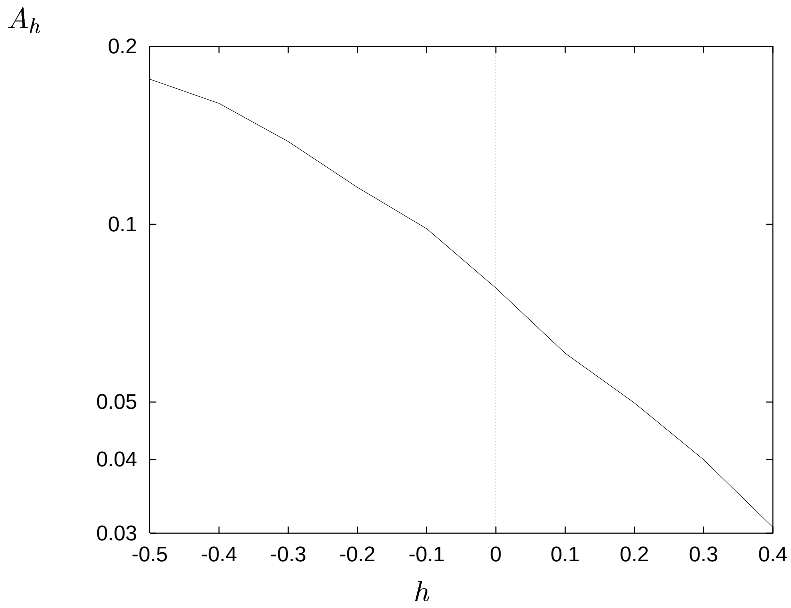


Figura 7.1: *Máximo de* $\alpha(\vec{x})$ *a lo largo de las* F_h

No parece estar relacionado con el espectro dimensional $D(h)$, y antes bien podría estar manifestando un mecanismo propagatorio en cascada multiplicativa, al estilo del definido para $e_{\vec{r}}$, entre las variedades fractales, desde la más singular hacia las estructuras menos singulares.

Reforzando esta hipótesis, se ha observado que el comportamiento de los histogramas de la variable normalizada, $\bar{\alpha}_h \equiv \alpha_h / A_h$ es similar al que se observa en SS: se produce un desplazamiento del máximo hacia la izquierda (valores menores) a medida que h aumenta (ver figura 7.2)

En el estado actual del problema, sin embargo, la simple discriminación de las variedades es bastante imprecisa y ruidosa a medida que h aumenta;

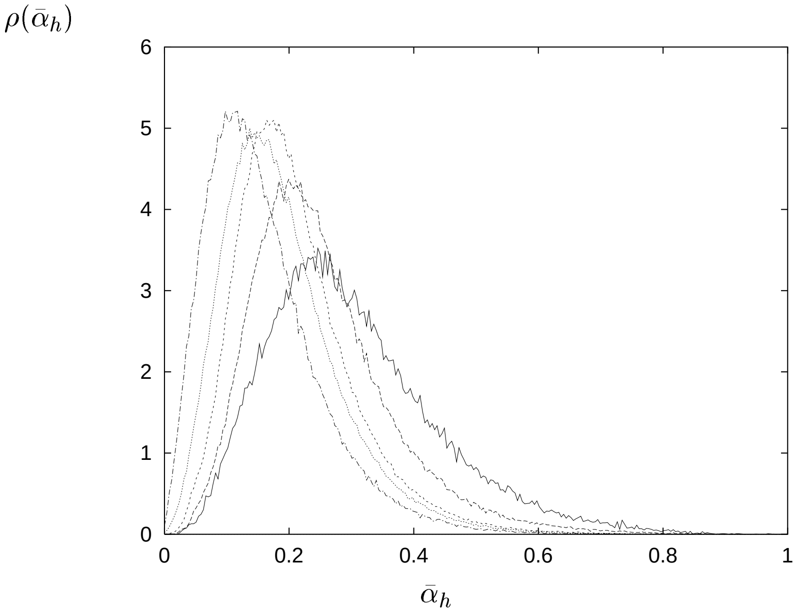


Figura 7.2: *Densidades de probabilidad de* $\bar{\alpha}_h$
Se han representado para h = *-0.5,-0.3,-0.1,0.1 y 0.3. A mayor* h*, más se halla el máximo de la distribución desplazado hacia la izquierda*

e inclusive el cálculo directo de los momentos de $\bar{\alpha}_h$ se ve todavía demasiado afectado por estos problemas como para decir algo fiable.

Con todo, de confirmarse que existe ese proceso multiplicativo entre las variedades uno podría pensar que quizá haya una realización geométrica de tal proceso. De esta manera, sería cierto que determinando $F_{-\Delta}$ y α sobre ella uno podría reconstruir toda la imagen (quizá en un sentido estadístico)

Las consecuencias de tal afirmación son muy directas :

- Se habría encontrado una codificación tremendamente compacta y eficiente de las imágenes. Tal codificación estaría basada además en la detección de bordes, que es una de las tareas que se sabe que acomete el sistema visual primario.

- Sería tremendamente simple construir modelos realistas de generación de imágenes

La primera conclusión llevaría a que la cantidad de información contenida en la variedad más singular y en toda la imagen debería ser la misma, en el supuesto de que la reconstrucción fuese determinista; o bien que habría una diferencia constante dada por la entropía del proceso estocástico de generación. Por ello, un cálculo directo de los contenidos de información revelaría cuan buena es nuestra intuición acerca de la estructura última de las imágenes. Ésta es una de nuestras próximas metas.

7.2.2 Adaptación visual

Si las leyes de escala microscópicas presentes en las imágenes pueden ser explicadas por medio de modelos simples, es de pensar que el sistema visual adoptará estrategias oportunas para eliminar cuanto haya de irrelevante y predictible en tal señal. No sería pues de extrañar que parte de las estructuras inmediatamente después de la retina e incluso antes del núcleo lateral geniculado filtren buena parte de esa redundancia, sobre todo teniendo en cuenta que el nervio óptico constituye un auténtico *cuello de botella* para el flujo de información.

Es por ello que una red neuronal con una arquitectura suficientemente flexible podría adoptar tales mecanismos de eliminación de redundancia incluso al ser sometida a un colectivo de imágenes generado de acuerdo, por ejemplo, al modelo de Benzi diluido. Podría ser una buena manera de hacer predicciones analíticas acerca de la composición de dichas estructuras sinápticas hacer tales cálculos con esa señal, por lo que este simple 'modelo de juguete' podría ayudar a establecer mecanismos reales de percepción.

Por último, destacar que este tipo de ideas podrían exportarse para el análisis estadístico de imágenes en color e imágenes en movimiento, y en concreto en el primer caso ya se está comenzando la investigación[2] .

[2] Con la colaboración de Daniel Ruderman y de Thomas Cronin.

Apéndice A

Complementos teóricos

A.1 Exponentes de Hölder. Funciones bi-Lipschitz

Damos en esta pequeña Sección un par de definiciones convenientes acerca de comportamientos locales de escala.

Dada una función $f : \Re^n \to \Re^m$, decimos que **es de Hölder** de exponente h en un punto $\vec{x}$ si existe un cierto entorno de $\vec{x}$ y una constante $K > 0$ tales que para todo $\vec{y}$ de ese entorno :

$$|f(\vec{x}) - f(\vec{y})| \; < \; K|\vec{x} - \vec{y}|^h \tag{A.1}$$

Se verifican las siguientes propiedades :

- Si en un punto $\vec{x}$ f es de Hölder de exponente $h > 0$, entonces f es contínua en $\vec{x}$. Además, si $h > N \geq 1$ con N entero, entonces f es N veces continuamente derivable en $\vec{x}$.

- Si en un punto $\vec{x}$ f es de Hölder de exponente h, entonces lo es para todo exponente h' menor que h.

Usando esta última propiedad, definimos **exponente de Hölder** de f en $\vec{x}$ como el supremo de los exponentes de f en $\vec{x}$. O sea, que es el mayor de los h para los que la ec. A.1 se verifica.

Dada una función $F : \Re^m \to \Re^d$, decimos que es **bi-Lipschitz** si para todo $\vec{x} \in \Re^m$ existen dos constantes $0 < K_1 < K_2 < \infty$ y un entorno de $\vec{x}$ de modo que para todo $\vec{y}$ en ese entorno se verifica :

$$K_1|\vec{x} - \vec{y}| \; < \; |F(\vec{x}) - F(\vec{y})| \; < \; K_2|\vec{x} - \vec{y}| \tag{A.2}$$

Las funciones bi-Lipschitz tienen la interesante propiedad de que al componer una función con exponentes Hölder dados generan funciones con los mismo exponentes Hölder en los mismos puntos, lo cual no es más que una aplicación trivial de la definición ec. A.2.

Por último, destacar que el conjunto de funciones bi-Lipschitz es bastante amplio : basta que la función F sea diferenciable de diferencial nula en todos los puntos de una bola para que sea bi-Lipschitz en toda esa bola.

A.2 Fractalidad

En este apartado nos ocuparemos de los aspectos más relevantes del comportamiento fractal, y en particular de tres de ellos: qué es un fractal, cómo se le caracteriza y que propiedades posee. Nuevamente, el texto básico que se ha seguido es el libro de Kenneth Falconer, [28].

A.2.1 Definición

Es común escuchar que un fractal es un conjunto de dimensionalidad no entera; así, un conjunto fractal de dimensión 1.37 será algo con más "cuerpo" que una curva pero no con tanto como una superficie, y de algún modo más semejante al primero que al segundo. De hecho, lo que caracteriza a un fractal es un número positivo asociado que llamaremos **dimensión**, y que en los casos triviales coincide con el concepto usual.

Sin entrar en demasiados detalles, daré un breve repaso a los pasos para definir la **dimensión de Hausdorff** de un fractal, que es la magnitud que se considera rigurosa y bien comportada.

- Trabajaremos con conjuntos inmersos en un espacio afín de referencia d dimensional $\Re^d$. Este espacio lo consideraremos dotado de una distancia, por ejemplo la euclídea; y llameremos **diámetro de un conjunto** A (denotado $diám(A)$) como la mayor de las distancias entre dos puntos de A.

- Dado un conjunto acotado $A \subset \Re^d$, y tomando un $\epsilon > 0$, consideraremos las colecciones finitas de conjuntos abiertos $\{U_i\}$ tales que $diám(U_i) \leq \epsilon \; \forall \; i$ y que recubren A, $A \subset \cup_i U_i$

  Entonces, definimos la **pre-medida de exponente** s **y radio** ϵ **de** A, denotada $H^s_\epsilon(A)$, como

$$H^s_\epsilon(A) \;\equiv\; inf\,\{\,\sum_i diám(U_i)^s\}$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las posibles colecciones.[1]

- Por construcción, H^s_ϵ es decreciente en ϵ. De este modo, tiene sentido el siguiente límite

$$H^s(A) \;=\; \lim_{\epsilon\to 0} H^s_\epsilon(A) \tag{A.3}$$

  A este límite lo denominaremos **medida de Hausdorff de exponente** s de A. Verifica las siguientes propiedades

  1. H^s es una medida positiva sobre los borelianos de $\Re^d$
  2. Si A es una subvariedad de $\Re^d$ de dimensión topológica D, $H^D(A) = \lambda_D(A)$, donde λ_D es la medida de Lebesgue habitual D-dimensional.
  3. $H^s(A)$ es decreciente con s
  4. Si $H^s(A) < \infty$, $H^t(A) = 0$ para todo $t > s$.
  5. Si $H^s(A) > 0$, $H^t(A) = \infty$ para todo $t < s$.

  Estas últimas propiedades son la más interesantes, pues establecen que dado un conjunto A, $H^s(A)$ es trivial salvo para un s como máximo. La curva $H^s(A)$ como función de s presenta una "transición de fase" que le lleva de valer ∞ a valer 0. Para cada conjunto A, el exponente s donde se produce la transición se denomina **dimensión de Hausdorff** de A, y se denota $dim_H(A)$.

- La dimensión de Hausdorff presenta las siguientes propiedades:

  1. Para todo conjunto $A \subset \Re^d$, $0 \le dim_H(A) \le d$
  2. Si $A \subset B$, $dim_H(A) \le dim_H(B)$
  3. Si A es una subvariedad de dimensión topológica D, $dim_H(A) = D$

[1] Hay que hacer notar que no es equivalente la premedida que resulta con la condición $diám(U_i) \le \epsilon$ que si hubiéramos usado $diám(U_i) = \epsilon$; ésta última da lugar a una dimensión equivalente a la llamada *box counting*, que es mayor en general que la de Hausdorff

4. Si $f : \Re^d \to \Re^d$ es una aplicación bi-Lipschitz, $dim_H(f(A)) = dim_H(A)$.

- Estas propiedades, junto con otras de estabilidad, caracterizan la dimensión de Hausdorff de modo único.

- Se ha establecido así una extensión de la definición clásica de dimensión, que coincide con la usual en los casos triviales. Diremos que un conjunto **tiene estructura fractal** o simplemente que es un **fractal**, si su dimensión de Hausdorff es no entera.

- En lo que resta, trabajaremos con conjuntos A del tipo denominado **fractal regular**, que son aquellos en los que $0 < H^{dim_H(A)}(A) < \infty$.

A.2.2 Propiedades

Por definición es evidente que si uno toma la dilatación por un factor δ de un fractal A de dimension $D \equiv dim_H(A)$, que

$$H^D(\delta A) \; = \; \delta^D \, H^D(A)$$

pues esto es lo que más caracteriza a un fractal, y es que la medida definida con sentido sobre él escalea bajo cambios de escala con exponente la dimensión.

Es por ello que se ha definido en ocasiones la llamada medida de *box counting* a través de una de estas propiedades de escala. Lo malo es que en ocasiones las propiedades que a continuación se enuncian no son ciertas. Típicamente se verifican si el conjunto A considerado es topológicamente un cerrado de $\Re^d$.[2]

Algunas de estas propiedades son :

- Sea $N_\epsilon(A)$ el mínimo número de bolas de radio como mucho ϵ que recubren A ($dim_H(A) \equiv D$). Entonces,

$$N_\epsilon(A) \underset{\epsilon \ll 1}{\approx} \; K_A \, \epsilon^{-D}$$

(Esto es lo que se usa para definir la medida de *box-counting*)

[2]Lo cual no verifican por ejemplo nuestras variedades F_h en que subdividimos el multifractal.

- Se define ϵ-entorno de A (denotado A_ϵ) como :

  $$A_\epsilon \equiv \left\{\vec{x} \in \Re^d \mid \exists\, \vec{y} \,:\, |\vec{x}-\vec{y}| < \epsilon\right\}$$

  El conjunto A_ϵ es siempre un abierto, luego es d dimensional y tiene sentido hablar de su volumen en ese espacio; llamémoslo $\lambda(A_\epsilon) \equiv H^d(A_\epsilon)$. Entonces, cuando $\epsilon \ll 1$

  $$\lambda(A_\epsilon) \propto \epsilon^{d-D}$$

- Sea un fractal A y sea U el menor abierto que le contiene. Sea $\wp_\epsilon(A)$ la probabilidad de que una bola de radio ϵ contenida a U intercepte a A en algún punto. Entonces,

  $$\wp_\epsilon(A) \;\propto\; \epsilon^{d-D} \;\;,\;\; \epsilon \ll 1$$

  que es bastante simple de ver pues no es más que $N_\epsilon(A)/N_\epsilon(U)$.

A.3 El comportamiento de $T_\Psi\mu(\vec{x}_0, a)$

En esta Sección vamos a probar que la proyección de una medida multifractal positiva sobre una función también positiva y bien comportada posee las mismas propiedades de escala con los mismos exponentes característicos que la medida original. Lo que se le requerirá a la función analizadora será detallado después.

Por tanto, como punto de partida asumiremos que tenemos una medida multifractal μ, definida en $\Re^d$. Esta medida, en particular, verifica que para cada punto $\vec{x}_0 \in \Re^d$,

$$\mu(B_r(\vec{x}_0)) \;=\; \alpha(\vec{x}_0) r^{h(\vec{x}_0)} \;+\; O(r^{h(\vec{x}_0)})$$

donde $B_r(\vec{x}_0)$ significa la bola (definida de acuerdo a una distancia dada) de radio r centrada en $\vec{x}_0$; y $O(r^{h(\vec{x}_0)})$ significa un término despreciable comparado con $r^{h(\vec{x}_0)}$ cuando r es pequeño.

Son inmediatas dos propiedades :

- *Los exponentes $h(\vec{x})$ son todos positivos.*(ver Capítulo 4)

  y como corolario

- *La medida μ es absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue* λ, o sea, tomada una colección de conjuntos $\{A_n\}$ tales que $\lambda(A_n) \to 0$, entonces $\mu(A_n) \to 0$

  Esto conlleva, por medio del *Teorema de Radon-Nykodin*, que existe una función de densidad de medida $\frac{d\mu}{d\lambda}(\vec{x})$ tal que :

$$\mu(A) \;=\; \int_A d\vec{x}\, \frac{d\mu}{d\lambda}(\vec{x})$$

Por ello, una medida multifractal tiene singularidades con un comportamiento muy controlado. Está claro que la densidad puebe ser infinita en algunos puntos, pero aún así esa función ha de ser integrable.

Ahora, demostremos que el comportamiento de la proyeccion de μ sobre una función analizadora Ψ no cambia por esa operación. Por simplicidad haremos la prueba para el caso unidimensional, aunque se puede extender simplemente a más dimensiones (a costa de expresiones más farragosas)

Asumiremos que la función $\Psi(x)$ es no negativa, continua y que verifica que $\Psi(0) \neq 0$. Le requeriremos además que sea de decrecimiento suficientemente rápido, en un sentido que se explica más adelante. Como la medida μ es obviamente σ-finita, esto debería ser suficiente para que tanto Ψ como sus dilataciones por un factor a sean integrables respecto μ; así, aceptamos que las proyecciones $T_\Psi\mu(x,a)$ son finitas para cada x y a.

Por último, centraremos nuestro estudio en la singularidad en $x = 0$, que hace que las fórmulas sean menos recargadas, y siendo la extensión al resto de puntos completamente obvia. Así, asumiremos que en $x = 0$ la medida μ tiene una singularidad de exponente h_0, esto es,

$$\mu(B_r(0)) \;\approx\; \alpha_0\, r^{h_0} \tag{A.4}$$

y lo que vamos a estudiar son los coeficientes de proyección, $T_\Psi\mu(0,a)$, dados por :

$$T_\Psi\mu(0,a) \;\equiv\; \int d\mu(x)\; \Psi(\frac{x}{a}) \tag{A.5}$$

Presentamos la prueba en tres etapas, para tres tipos diferentes de funciones: las funciones características, las funciones de soporte compacto y las funciones genéricas de decrecimiento rápido.

A.3.1 Analizando con la función característica

Entonces, tomemos $\Psi(x)$ como la función característica de la bola centrada en el origen y de radio 1; por tanto, $\Psi(x) = \chi_{B_1(0)}(x)$, donde:

$$\chi_{B_r(x_0)}(x) \ = \ \begin{cases} 1 & |x - x_0| < r \\ 0 & |x - x_0| > r \end{cases} \tag{A.6}$$

Recordando la definición de los coeficientes de proyección, ec. A.5, obtenemos :

$$T_\Psi \mu(0, a) \ = \ \int d\mu(x)\, \chi_{B_1(0)}(\frac{x}{a}) \ = \ \int d\mu(x)\, \chi_{B_a(0)}(x)$$

De ahí,

$$T_\Psi \mu(0, a) \ = \ \int_{B_a(0)} d\mu(x) \ = \ \mu(B_a(0)) \approx \alpha_0\, a^{h_0}$$

(la última aproximación se da cuando a es pequeño). Por tanto, para este caso trivial los coeficientes de proyección siguen las mismas leyes de escala que las medidas de las bolas porque éste es exactamente la forma de obtener esas medidas por una proyección sobre una función.

A.3.2 Analizando con una función de soporte compacto

En este caso y en el siguiente nos limitaremos a intentar encontrar dos constantes positivas A, $B > 0$ tales que

$$A\, a^{h_0} \ \leq \ T_\Psi \mu(0, a) \ \leq \ B\, a^{h_0} \tag{A.7}$$

Si tal par de constantes existe, entonces podremos afirmar directamente que

$$T_\Psi \mu(0, a) \ = \ \alpha_0^\Psi a^{h_0} \ + \ O(a^{h_0})$$

Un límite inferior A como el de la ec. A.7 puede conseguirse fácilmente para este tipo de funciones y las de la próxima sección por la condición de continuidad y que $\Psi(0) \neq 0$. En tal caso, existe un radio finito l tal que $\Psi(x) \neq 0$ para todo $x \in B_l(0)$. Sea $m > 0$ el mínimo valor de $\Psi(x)$ en $B_l(0)$; entonces, la siguiente desigualdad funcional es cierta para todo punto x :

$$m\, \chi_{B_l(0)}(x) \ \leq \ \Psi(x)$$

De aquí es obvio que :

$$ml^{h_0}\, a^{h_0} \;\approx m\, T_{\chi_{B_l(0)}}\mu(0,a) \leq T_\Psi\mu(0,a)$$

y por ello podemos tomar $A = ml^{h_0}$.

Análogamente, para una función de soporte compacto Ψ se puede tomar una cota superior como en la ec. A.7. Ya que Ψ tiene soporte acotado, sabemos que existe un radio finito tal que Ψ es idénticamente nula fuera de $B_L(0)$. Dado que Ψ es continua, alcanza un máximo finito M en $B_L(0)$. Por lo tanto, la siguiente desigualdad funcional se cumple :

$$M\, \chi_{B_L(0)}(x) \;\geq\; \Psi(x)$$

y de modo similar de la otra cota concluimos que podríamos tomar el límite superior B como ML^{h_0}.

A.3.3 Analizando con una función de decrecimiento rápido

De nuevo buscaremos una cota inferior y otra superior. Es inmediato conseguir la cota inferior, por exactamente el mismo argumento de continuidad y positividad de la función en $x = 0$. O sea que lo único que resta para concluir es encontrar la cota superior.

Retomemos el radio l definido en la sección previa, y definamos los conjuntos R_i del modo que sigue: $R_i = B_{2^i l}(0) - B_{2^{i-1} l}(0)$, $i \geq 1$ y $R_0 = B_l(0)$. Definamos también M_i como el máximo valor de $\Psi(x)$ para $x \in R_i$. Así, se cumple la siguiente desigualdad funcional :

$$\Phi(x) \equiv \sum_{i=0}^{\infty} M_i\, \chi_{R_i}(x) \;\geq\; \Psi(x)$$

(χ_{R_i} es la función característica del conjunto R_i, análoga a la de la bola: vale 1 en los puntos de R_i y cero fuera de él). Para concluir necesitamos observar que $T_\Phi(0,a) \propto a^{h_0}$ cuando a es suficientemente pequeño. Para ello, supongamos que existe un radio finito $L > 0$ tal que si $|x| > L$ para todo $K > 1$

$$\Psi(Kx) < \Omega(K)\Psi(x) \tag{A.8}$$

donde $\Omega(K)$ tiende a cero cuando K va a infinito más rapido que cualquier polinomio, o sea :

$$\lim_{K\to\infty} K^N \Omega(K) \;=\; 0 \quad \forall N > 0 \tag{A.9}$$

Esta es una pequeña modificación de la condición usualmente requerida a las funciones pertenecientes a la clase de Schwartz. Es necesario introducir el radio L porque de otro modo la función tendría que ser estrictamente decreciente y por ello la clase de funciones que estaríamos considerando sería demasiado restrictiva.

Definamos ahora i_0 como el menor entero mayor que $\log_2(L/l)$. Por medio de la relación dada por la ec. A.8 se sigue que para todo $i' > i > i_0$ se satisface que :

$$M_{i'} < \Omega(2^{i'-i})\, M_i \tag{A.10}$$

Considerando ahora $a = 2^{-J}$, $J > 0$ entonces

$$\Phi(x) = \sum_{i=0}^{i_0+J} M_i \chi_{R_i}(2^J x) + \sum_{i=i_0+J+1}^{\infty} M_i \chi_{R_i}(2^J x) \;= \Phi_J(x) + \delta_J(x)$$

Si $i > i_0 + J$, $\chi_{R_i}(2^J x) = \chi_{R_{i-J}}(x)$ (usando la definición de $R_i(x)$); de ese modo, la parte residual de la función, $\delta_J(x)$ verifica un condición de acotación fuerte : usando la ec. A.10 se verifica :

$$\delta_J(x) < \Omega(2^J) \sum_{i=i_0}^{\infty} M_i \chi_{R_i}(x) \;=\; \Omega(1/a)\delta_0(x)$$

y así la dependencia de la parte residual de Φ en a tiende a cero muy rápidamente, siendo despreciable comparada con cualquier potencia de a y por ello podemos ignorarla por completo. Así pues, $T_\Phi\mu(0, 2^{-J}) \approx T_{\Phi_J}\mu(0, 2^{-J})$. Pero teniendo en cuenta que

$$T_{\chi_{R_i}}\mu(0,a) \approx \alpha_0\, l^{h_0}\, 2^{h_0 i}\, (1 - 2^{-h_0})\, a^{h_0}$$

obtenemos entonces

$$T_{\Phi_J}\mu(0,a) \approx \alpha_0\, l^{h_0}\, (1 - 2^{-h_0}) \left[\sum_{i=0}^{i_0+J} 2^{h_0 i}\, M_i\right] a^{h_0}$$

por lo que podemos acotar uniformemente cada $T_{\Phi_J}\mu(0,a)$ por $B\, a^{h_0}$ con la constante B dada por :

$$B \;=\; \alpha_0\, l^{h_0}\, (1 - 2^{-h_0}) \sum_{i=0}^{\infty} 2^{h_0 i}\, M_i$$

que es finito a causa del carácter de rápido decrecimiento de M_i. Entonces, $T_{\Phi(x)}\mu(0,a) < B a^{h_0}$ lo que termina la demostración.

Indudablemente, esta demostración es un tanto farragosa. La principal razón para esto es la escasez de condiciones que se le exigen a la medida μ, lo cual fuerza que las condiciones sobre Ψ sean más severas. Un mayor conocimiento de la medida μ podría permitirnos suavizar las exigencias sobre Ψ. Una posible relajación concreta de estos requisitos que Ψ ha de cumplir es muy interesante : si se sabe que los exponentes h de μ son acotados por arriba, ec. A.9 puede relajarse pidiendo que ese límite se anule sólo para los $N \le max(\,h\,)$. La continuidad de la función y su característica de no anulación en torno al origen podrían así mismo relajarse; pero lo que parece crucial es el carácter no negativo de Ψ.

Bibliografía

[1] Barlow H. B., in *Sensory Communication* (ed. Rosenblith W.) pp. 217. (M.I.T. Press, Cambridge MA, 1961).

[2] Laughlin S. B., *Z. Naturf.* **36** 910-912 (1981).

[3] van Hateren J.H. *J. Comp. Physiology A* **171** 157-170, 1992.

[4] Atick J. J.*Network* **3** 213-251, 1992.

[5] Olshausen B.A. & Field D. J., *Nature* **381**, 607-609 (1996).

[6] Baddeley R., *Cognitive Science*, in press (1997).

[7] Cover T.M., Thomas J.A. "Elements of Information Theory" *John Wiley & Sons.* New York, 1991.

[8] Nadal J-P. & Parga N. *Network*, **4** 565 (1994)

[9] Atick J. J. *Network* **3** 213-251, 1992.

[10] Frisch U., Turbulence, Cambridge Univ. Press (1995).

[11] Field D. J., *J. Opt. Soc. Am.* **4** 2379-2394 (1987).

[12] Carlson C. R., *Photog. Sci. Engng.* **22** 69-71 (1978).

[13] Burton G. J. and Moorhead I. R., *Appl. Opt.* **26** 157-170 (1987).

[14] Tollhurst D. J., Tadmor Y. & Tang Chao, *Ophthal. Physiol. Opt.* **12** 229-232 (1992).

[15] Ruderman D., *Vision Research.* **37**, 3385-3398 (1997).

[16] Ruderman D., *Network* **5**, 517-548 (1994)

[17] Rudin W. "Análisis Real y Complejo". *Ed. Alhambra* Madrid, 1987.

[18] Kolmogorov, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* **30**, 301-305 (1941).

[19] She & Leveque, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 336-339 (1994).

[20] She & Waymire, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 262-265 (1995).

[21] Castaing, *J. Physique II, France* **6**, 105-114 (1996)

[22] Novikov, *Phys. Rev. E* **50**, R3303 (1994)

[23] Dubrulle B., *Phys. Rev. Lett.* **73** 959-962 (1994)

[24] Turiel A., Mato G., Parga N. & Nadal J.-P. *Phys. Rev. Lett.* **80**, 1098-1101 (1998)

[25] Benzi, Biferale, Crisanti, Paladin, Vergassola & Vulpiani,*Physica D* **65**, 352-358 (1993).

[26] Arneodo et al. *"Ondelettes, multifractales et turbulence"*. Diderot Editeur. París, 1995.

[27] Daubechies I. *"Ten Lectures on Wavelets"*. CBMS-NSF Series in Ap. Math. *Capital City Press.* Montpelier, Vermont, 1992.

[28] Falconer K. *"Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications". John Wiley and sons.* Chichester,1990.

[29] Parisi G. & Frisch U., in *Turbulence and Predictability in Geophysical Fluid Dynamics* (eds Ghil M., Benzi R. & Parisi G.) 84-87 (Proc. Intl. School of Physics E. Fermi, North Holland, Amsterdam, 1985)

[30] Paladin G. & Vulpiani A., *Phys. Rep.* **156**, 147-225 (1987).

[31] Marr D., *"Vision"*, W. H. Freeman abd Co. (1982)

[32] Bell & Sejnowski, *Vision Research* **37**, 3327-3338 (1997).

[33] Mountcastle V. B., *Journal of Neurophysiology* **20**, 408 (1957)

[34] *Journal of Physiology*, **148**, 574 (1959)

[35] Mallat S., Zhong S. *"Wavelet transform Maxima and multiscale edges"*. Del libro *"Wavelets and their applications"*, *Jones and Bartlett Publishers.* Boston 1991.

[36] Benzi R., Ciliberto S., Baudet C., Ruiz Chavarria G. & Tripiccione C., *Europhys. Lett.* **24** 275-279 (1993)

[37] Benzi, Ciliberto, Tripiccione, Baudet, Massaioli, & Succi, *Phys. Rev. E* **48**, R29 (1993)

[38] Benzi, Ciliberto, Baudet & Chavarria *Physica D* **80** 385-398 (1995)

[39] Field D. *Neural Computation* **6**, 559-601 (1994)

[40] *"On the fractal components of natural images"* Autores: A. Turiel & N. Parga.

En preparación.

[41] *"Generative model of images with non-gaussian scaling properties"* Autores: A. Turiel & N. Parga.

En preparación.