Ejercicios de Métodos Matemáticos I
Curso 2005-2006 Hoja 10

I. **Sistemas depredador-presa**
Una especie de depredadores $y(t)$ se alimenta de otra, la presa $x(t)$, que a su vez se nutre de un tercer alimento ampliamente disponible en el sistema. La dinámica de estas dos poblaciones viene caracterizada por el sistema de ecuaciones:

$$\frac{dx}{dt} = 60x - 3x^2 - 4xy$$
$$\frac{dy}{dt} = 42y - 3y^2 - 2xy$$

Calcular los puntos críticos, estudiar su estabilidad y dibujar un retrato del espacio de fases. Demostrar que, a diferencia del problema anterior, es posible la coexistencia pacífica de las dos especies

II. Considerar el sistema casi lineal

$$\frac{dx}{dt} = y + hx(x^2 + y^2)$$
$$\frac{dy}{dt} = -x + hy(x^2 + y^2)$$

(1) Demostrar que el origen es un punto centro del sistema lineal correspondiente (h=0).

(2) Suponer que h $\neq$ 0. Reescribir el sistema de ecuaciones diferenciales en coordenadas polares.

(3) Suponer que h = 1. Integrar la ecuación diferencial radial y estudiar el comportamientp de r cuanto $t \to \infty$. Qué se puede decir del carácter del punto crítico (0,0)?

(4) Suponer que h = -1. Hacer lo mismo que en el aparto anterior.

III. Una partícula de masa unidad m = 1 se mueve en un pozo doble de potencial

$$V(x) = \frac{1}{4}(x^2 - 1)^2$$

Determinar los puntos críticos de la dinámica de la particula, el retrato del espacio de fases, y buscar la correspondencia de las trayectorias con la forma del potencial. Cuál es el periodo de una partícula que empieza en reposo en x =$\sqrt{2}$?