Ejercicios de Métodos Matemáticos I
Curso 2005-2006 Hoja 5

I. (1) Si $ar^2 + br + c = 0$ tiene las raíces iguales $r_1 = r_2$, demostrar que

$$\mathrm{L}[\mathrm{e}^{rx}] = \mathrm{a}(\mathrm{e}^{rx})\text{''} + \mathrm{b}(\mathrm{e}^{rx})\text{'} + \mathrm{c}\mathrm{e}^{rx} = \mathrm{a}(r - r_1)^2\mathrm{e}^{rx} \ (2)$$

Dado que el miembro de la derecha se anula cuando $r = r_1$, se concluye que $\mathrm{e}^{r_1 x}$ es una solución de la ecuación $L[y] = ay'' + by' + cy = 0$.

(2) Diferenciar (2) respecto a r e intercambiar la derivación con respecto a r y con respecto a x, demostrando por tanto que

$$\frac{\partial}{\partial r}L[e^{rx}] = L[\frac{\partial}{\partial r}e^{rx}] = L[xe^{rx}] = axe^{rx}(r - r_1)^2 + 2ae^{rx}(r - r_1)$$

Dado que el miembro de la derecha se anula cuando $r = r_1$, concluir que xe^{rx} también es solución de $L[y] = 0$.

II. Comprobar que $y_1 = x$ es una solución de la ecuación de Legendre de orden uno

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0 \qquad -1 < x < 1$$

y encontrar una segunda solución linealmente independiente.

III. (1) Considerar la ecuación $y'' + 2ay' + a^2y = 0$. Demostrar que las raíces de la ecuación caracteristística son $r_1 = r_2 = -a$, de modo que una solución es e^{-ax}.

(2) Aplicar la fórmula de Abel para demostrar que el Wronskiano de dos soluciones cualesquiera de la ecuación dada es

$$W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1(x)y_2(x) = ce^{-2ax}, \text{ con } c \text{ constante.}$$

IV. El oscilador espacial (en 2 dimensiones)
Determinar la trayectoria de una particula de masa m dentro de un potencial $U(r)$ de la forma $U(r) = kr^2/2$ (con $r = r(x, y)$).
[Ayuda: Sea $\vec{F}$ la fuerza debida al potencial. Entoncés la componente F_i de la fuerza es: $F_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i}$.]