

Ejercicios de Métodos Matemáticos I Curso 2005-2006 Hoja 6

- I. En cada uno de los apartados siguientes, suponer que p y q son continuas sobre un intervalo abierto I , y que las funciones y_1, y_2 son soluciones de la ecuación diferencial $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$.
- (1) Demostrar que si y_1, y_2 son cero en el mismo punto $x_0 \in I$, entonces sobre ese intervalo no pueden ser conjunto fundamental de soluciones.
 - (2) Demostrar que si y_1, y_2 tienen máximos y mínimos en el mismo punto $x_0 \in I$, entonces sobre ese intervalo no pueden ser conjunto fundamental de soluciones.
 - (3) Demostrar que si y_1, y_2 tienen un punto de inflexión común $x_0 \in I$, entonces sobre ese intervalo no pueden ser conjunto fundamental de soluciones.
 - (4) Demostrar que x y x^2 son linealmente independientes sobre el intervalo abierto $I = (-1, 1)$; de hecho, demostrar que son linealmente independientes sobre todo intervalo de la recta real.
 - (5) Demostrar que $W(x, x^2)$ se anula en $x=0$.
Qué se puede concluir a partir de esto acerca de la posibilidad de que x y x^2 sean solución de la ecuación $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$?
 - (6) Verificar que x y x^2 son soluciones de la ecuación $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$.
Contradice esto la conclusión a la que se llegó en el apartado anterior?
El comportamiento del Wronskiano de x y x^2 contradice el Teorema de Abel?
- II. Si y_1 e y_2 son dos soluciones linealmente independientes de la ecuación $x^2y'' - 2y' + (3 + x)y = 0$, y si $W(y_1, y_2)(2) = 3$, hallar el valor de $W(y_1, y_2)(4)$.
Para qué valor de x el Wronskiano vale 1?

- III. Una masa de 100g alarga 5cm un muelle. Si la masa se pone en movimiento desde su posición de equilibrio con una velocidad hacia abajo de 10 cm s^{-1} , y la resistencia del aire es $10^{-3} \text{ N s m}^{-1}$,
- (1) Determinar la posición de la masa en cualquier instante t .
 - (2) Cuando regresará la masa a su posición de equilibrio?
 - (3) Determinar la cuasifrecuencia y el cuasiperiodo, así como la razón del cuasiperiodo al periodo del movimiento no amortiguado correspondiente.
 - (4) Determinar la amplitud y la fase en $t = 5\text{s}$.

Ayuda: La fuerza F_r debida a la resistencia del aire es proporcional a la velocidad: $F_r = \gamma * v$ donde γ es la resistencia del aire.