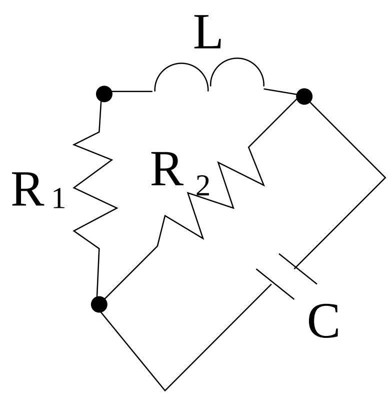
Ejercicios de Métodos Matemáticos I
Curso 2005-2006 Hoja 9

I. **Circuitos eléctricos**

(1) Demostrar usando las leyes de Kirchhoff que el circuito eléctrico de la figura satisface el sistema de ecuaciones diferenciales

$$L\frac{dI}{dt} = -R_1 I - V$$
$$C\frac{dV}{dt} = I - \frac{V}{R_2}$$

donde I es la corriente que pasa por la bobina y V es la caida de potencial a través del condensador.



(2) Hallar una condición sobre R_1, R_2, L y C tal que los autovalores de la matriz del sistema sean reales y diferentes.

(3) Demostrar que en ese caso los dos autovalores son negativos. Entonces demostrar que $I(t) \to 0$ y $V(t) \to 0$ cuanto $t \to \infty$, independientemente de las condiciones iniciales.

(4) Si no se satisface dicha condición, entonces los autovalores son complejoso bien son iguales. Qué se puede decir entonces sobre el límite de $I(t)$ y $V(t)$ cuanto $t \to \infty$?

(5) Sea el circuito de la figura, con $R_1 = 1\Omega$,$R_2 = 5\Omega$, $L = 1H$ y $C = 0.2F$. Encontrar la corriente y el potencial para todo tiempo, sabiendo que en el instante inicial $I(0) = 1A$ y $V(0) = 2V$.

II. Una partícula de masa m y carga eléctrica q se mueve con velocidad $\mathbf{v}$ en el plano (x,y), bajo la influencia de un campo magnético uniforme paralelo al eje z, $\mathbf{B} = Be_z$, de modo que la fuerza de Lorentz que actúa sobre la partícula esta dada por $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$.

(1) Demostrar que las ecuaciones del movimiento de la partícula son

mx" = q B y'
my" = -q B x'

(2) Demostrar que la partícula sigue un movimiento circular con frecuencia angular (de Larmor) $\omega = qB/m$. Demostrar que la energia de la partícula se conserva, a pesar de que la fuerza es proporcional a la velocidad.

(3) Suponiendo que la partícula parte del punto $\mathbf{x} = (r_0, 0)$, con velocidad $\mathbf{x}' = (0, \omega r_0)$, demostrar que la trayectoria de la partícula es una circunferencia de radio r_0.

(4) Si además del campo magnético, la partícula cargada se mueve bajo la influencia de un campo eléctrico uniforme en la dirección del eje x,$\mathbf{E} = Ee_x$, entonces la fuerza de Lorentz que actua sobre ella es $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$.
Suponer que la partícula parte en reposo del origen. Demostrar que la trayectoria de la partícula es la cicloide escrita en forma paramétrica:

$$x = a(1 - cos(\omega t))$$
$$y = -a(\omega t - sin(\omega t))$$

donde $a = E/\omega B$ y $w = qB/m$.