Exámen de Métodos Matemáticos I
Grupos 21 / 26
Febrero 2006

I. (1.5 puntos)
En cada uno de los problemas siguientes, resolver la ecuación diferencial dada. Encontrar el intervalo en el que la solución es válida:

(1) xy' + 2y = sin x ; y(π) = 1/π (problema con valor inicial)

(2) x(2+x)y' + 2(1+x)y = 1+3x^2 ; y(-1) = 1 (problema con valor inicial)

(3) xy' = (1-y^2)$^{1/2}$

(4) y' = x^2/(1+y^2)

II. (1.5 puntos)
Sea la ecuación diferencial siguiente: x^2y" - x(x+2)y' + (x+2)y = 0

(1) Calcular el Wronskiano sin resolver la ecuación

(2) Demostrar que una posible solución, y_1(x), de dicha ecuación es x.

(3) Usando el Wronskiano, determinar la segunda solución linealmente independiente, y_2(x), de la ecuación correspondiente, suponiendo que la constante del Wronskiano, calculado en (1), sea igual a 1.

III. Circuito Eléctrico (4 puntos)
Sea el circuito de la figura.
Con las leyes de Kirchhoff se puede deducir el sistema de ecuaciones

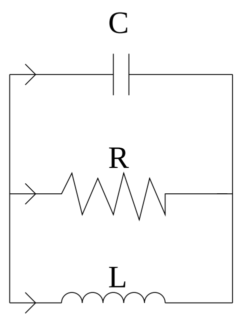


Figure 1: Circuito eléctrico

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix}$$

donde I es la corriente que pasa por la bobina y V es la caída de potencial a través del condensador.

(1) Demostrar que los autovalores de la matriz de coeficientes son reales y diferentes si $L > 4CR^2$, y complejos conjugados si $L < 4CR^2$.

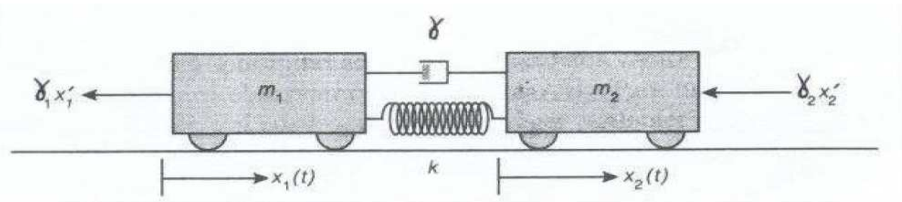
(2) Suponer que $R = 1\Omega$, $C = 0.5$F y $L = 1H$. Encontrar la solución general del sistema en este caso.

(3) Encontrar $I(t)$ y $V(t)$ si $I(0) = 2A$ y $V(0) = 1V$.

(4) Determinar los valores límite de $I(t)$ y $V(t)$ cuando $t \to \infty$. Dependen estos valores de las condiciones iniciales ?

(5) Suponer que se acopla una fuente de alimentación que suministra una corriente externa $I_{ext}(t) = 2exp(-t)$A. Determinar la solución del sistema que satisface las condiciones iniciales $I(0) = V(0) = 0$.

IV. (3 puntos)
Dos vagones de tren están unidos como en la figura conectados por



un muelle fijo de constante k y un amortiguador que ejerce fuerzas opuestas sobre los vagones, de magnitud proporcional a su velocidad relativa, $\gamma(x_1$'-x_2'). Los dos vagones están además sometidos a fuerzas de rozamiento (del aire) proporcionales a sus velocidades respectivas $\gamma_1 x_1$' y $\gamma_2 x_2$'.

(1) Aplicar la segunda ley de Newton para obtener las ecuaciones de movimiento

$$m_1 x_1'' = k(x_2 - x_1) - \gamma_1 x_1' - \gamma(x_1' - x_2')$$
$$m_2 x_2'' = k(x_1 - x_2) - \gamma_2 x_2' - \gamma(x_2' - x_1')$$

que se pueden escribir en forma matricial:

$$\mathbf{M\ x" = Kx + Rx'}$$

donde las matrices de masa, de rigidez y de rozamiento están dadas por

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}, \mathbf{K} = \begin{pmatrix} -k & k \\ k & -k \end{pmatrix}, \mathbf{R} = \begin{pmatrix} -(\gamma+\gamma_1) & \gamma \\ \gamma & -(\gamma+\gamma_2) \end{pmatrix}$$

(2) Mediante el cambio de variables

$$\{x_1(t), x_2(t), x_3(t) = x_1'(t), x_4(t) = x_2'(t)\}$$

convertirlo en un sistema de cuatro ecuaciones de primer órden, de la forma $\mathbf{x' = A\ x}$, con $\mathbf{A}$ una matriz 4x4.

(3) Tomando $m_1 = m_2 = 1kg$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 2\gamma = 2Nsm^{-1}$ y $k = 2Nm^{-1}$, demostrar que los autovalores de $\mathbf{A}$ son λ_0=0 y λ_1=-2. Calculando los autovectores asociados demostrar que la matriz fundamental es:

$$\mathbf{\Phi} = (\vec{x_1}\ \vec{x_2}\ \vec{x_3}\ \vec{x_4}) = \begin{pmatrix} 1 & e^{-2t} & e^{-2t} & t * e^{-2t} \\ 1 & e^{-2t} & -e^{-2t} & -t * e^{-2t} \\ 0 & -2e^{-2t} & -2e^{-2t} & (1-2t) * e^{-2t} \\ 0 & -2e^{-2t} & 2e^{-2t} & (2t-1) * e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Interpretar físicamente los distintos modos $\vec{x_i}$.

(4) Calcular la solución para todo tiempo, suponiendo que las masas empiezan en la posición de equilibrio con velocidad $v_0 = 10ms^{-1}$. Cuánto espacio recorrerán antes de detenerse? Comentar las respuestas.