LA TEORÍA ESCALAR-TENSOR COMO UNA ALTERNATIVA PLAUSIBLE A LA RELATIVIDAD GENERAL

JAVIER RUBIO PEÑA

Abstract

En este trabajo analizaré la teoría de Brans-Dicke tanto desde un punto de vista histórico como formal, poniendo especial interés en dar una visión global de la misma y en compararla constantemente con la teoría relativista einsteniana. Abordaré las polémicas existentes en lo que respecta a la convergencia hacia la teoría de la Relatividad General en un cierto límite, así como la equivalencia física entre los distintos frames en los que puede expresarse, tema de continuo debate. Analizaré los tests clásicos de Relatividad General en los regímenes de campo débil y fuerte desde el punto de vista de la teoría de Brans-Dicke, poniendo especial énfasis en los resultados experimentales obtenidos hasta la fecha y en los que han de venir; incluiré además una exposición de nuevos efectos con respecto a relatividad general tales como ondas escalares y radiación dipolar. Para finalizar expondré las relaciones existentes con la variación de las constantes fundamentales de la naturaleza y como esta teoría aparece de forma natural e inevitable en algunas teorías unificadas como las teorías de cuerdas en el límite de bajas energías.

Contents

1 Marco teórico de las teorías escalar-tensor **3**
- 1.1 Introducción . . . 3
- 1.2 Transformaciones conformes . . . 4
- 1.3 La teoría de Brans-Dicke . . . 4
  - 1.3.1 El frame de Jordan . . . 5
  - 1.3.2 El frame de Einstein . . . 6
  - 1.3.3 El frame de Jordan VS el frame de Einstein . . . 7
  - 1.3.4 La teoría de Brans-Dicke y el principio de Mach . . . 8
  - 1.3.5 La violación del principio de equivalencia fuerte . . . 11
  - 1.3.6 El límite newtoniano y la dependencia del campo escalar de la constante gravitacional . . . 12
  - 1.3.7 Teoría de Brans-Dicke e invarianza conforme. . . . 14
- 1.4 Generalización en presencia de una constante cosmológica . . . 15
- 1.5 Soluciones aproximadas a la teoría de Brans-Dicke . . . 16

2 Efectos clásicos de GR en el sistema solar desde el punto de vista de BD **20**
- 2.1 Introducción . . . 20
- 2.2 Deflexión de la luz por el sol . . . 20
- 2.3 La precesión de los periastros . . . 21
- 2.4 El retraso en el eco de radar . . . 21
- 2.5 El efecto Lense-Thirring en las teorías escalar tensor . . . 22
- 2.6 Cotas experimentales en el regimen de campo débil: Resumen de la situación actual . . . 25

3 Regimen de campo fuerte: el pulsar binario y la producción de ondas gravitacionales **27**
- 3.1 Introducción . . . 27
- 3.2 Ondas escalares en la teoría escalar tensor . . . 27
- 3.3 Ondas gravitacionales escalares en colapsos tipo Oppenheimer-Snyder . . . 29
- 3.4 El pulsar binario y las teorías escalar-tensor . . . 38
- 3.5 Los dispositivos actuales y los que han de venir . . . 42
  - 3.5.1 Gravity Prove B . . . 42
  - 3.5.2 LISA . . . 42
  - 3.5.3 GAIA . . . 43
  - 3.5.4 LIGO . . . 44

4 Relación con otras teorías modernas **45**
4.1 Introduccíon . . . 45
4.2 Relación con la teoría de cuerdas . . . 45
4.3 Teorías escalar tensor y cosmología . . . 47
4.4 Variación de la constante gravitacional . . . 48
4.4.1 Medidas de Viking y Lunar-Laser-Ranging . . . 49
4.4.2 Medidas realizadas utilizando los pulsares PSR 1913+16 y PSR 0655+64 49
4.4.3 Medias basadas en la estructura y evolucion estelar . . . 50
4.4.4 Nucleosíntesis en el Big Bang . . . 51
4.4.5 Análisis de los datos y conclusión . . . 51
4.5 Resumen y conclusiones . . . 52

A Derivación de las ecuaciones de los campos **53**

B Otros sistemas estelares para testar la relatividad general **56**
B.1 El pulsar 4U1820-30 . . . 56
B.2 El pulsar 1744-24A . . . 56
B.3 El pulsar J1141-6545 . . . 57

Chapter 1

Marco teórico de las teorías escalar-tensor

"Imagination is more important than knowledge.
Knowledge is limited. Imagination encircles the world"
Albert Einstein

"An idea that is not dangerous
is unworthy to be called an idea"
Elbert Hubbard

1.1 Introducción

Los campos escalares han tenido una vida difícil en las teorías de la gravedad, con gran cantidad de muertes y resurrecciones . La primera teoría de la gravedad de Newton constaba de un campo escalar, por lo que fue natural para Einstein entre otros intentar incorporar la gravedad y la relatividad especial a una teoría escalar. Este esfuerzo, infructuoso en su primer intento, fue sin embargo útil para marcar el camino hacia la relatividad general (GR) de Einstein, una teoría puramente tensorial. Sin embargo, la idea de un campo escalar resucitó en la decada de los 60 de la mano de las teorías de campos unificadas en cinco dimensiones estudiadas por Fierz y Jordan entre otros, así como de la hipótesis de grandes números de Dirac. Posiblemente una de las teorías más importantes y mejor motivadas en las en las cuales un campo escalar comparte protagonismo con la gravitación es la teoría desarrollada por Brans-Dicke (BD) en 1960. Dicha teoría fue, y todavía es, una de las alternativas a la Relatividad General (GR) más discutidas. A pesar de su casi medio siglo de existencia la teoría escalar-tensor continua atrayendo los intereses no sólo de los teóricos sino también de los experimentales. Las razones para esto son varias. En primer lugar, las teorías escalar tensor son invariantes bajo un cierto grupo de transformaciones llamadas conformes, lo cual es una propiedad reminiscente de la invarianza conforme de las teorías de cuerdas. En segundo lugar, la teoría de Brans-Dicke puede obtenerse como derivación de una teoría de Kaluza-Klein en la cual el campo escalar es generado por la presencia de dimensiones extras compactificadas, un aspecto esencial de todas las teorías unificadas modernas. Por último , pero no por ello menos importante, se encuentra el renovado interés por estas teorías con respecto a sus aplicaciones cosmológicas; se cree que la convergencia de la la teoría de BD a la relatividad general pudo ocurrir durante la era dominada por materia , o incluso durante la fase inflacionaria del universo temprano.

1.2 Transformaciones conformes

Para entender los desarrollos posteriores y sus implicaciones es necesario establecer desde un punto de vista formal el concepto de transformación conforme. Supongamos 2 espacios-tiempo $\mathcal{M}, \tilde{\mathcal{M}}$ con métricas $g_{\mu\nu}, \tilde{g}_{\mu\nu}$ en los que se usan las mismas coordenadas x^μ. Diremos que ambos espacios son conformes si están relacionados por la transformación conforme:

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2(x) g_{\mu\nu} \tag{1.1}$$

donde Ω, que recibe el nombre de factor conforme, debe ser una función dos veces diferenciable de las coordenadas y permanecer en el rango $0 < \Omega < \infty$. Las transformaciones conformes estiran o encogen las distancias entre los dos puntos descritos por las mismas coordenadas x^μ en los espacios $\mathcal{M}, \tilde{\mathcal{M}}$, pero preservando los ángulos entre vectores (en particular los vectores de tipo luz que definen los conos de luz). Si tomamos Ω constante nos encontramos con las llamadas transformaciones de escala. De hecho podemos ver las transformaciones conformes como transformaciones de escala localizadas. En un espacio tiempo de 4 dimensiones el determinante de la métrica $g = \mid \det g_{\mu\nu} \mid$ se transforma como:

$$\sqrt{\tilde{g}} = \Omega^4 \sqrt{g}. \tag{1.2}$$

Es obvio de la definición de transformaciones conformes que:

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = \Omega^{-2} g^{\mu\nu} \tag{1.3}$$

$$d\tilde{s}^2 = \Omega^2 ds^2 \ . \tag{1.4}$$

Por último definimos planitud conforme como:

$$\tilde{g}_{\mu\nu}\Omega^{-2}(x) = g_{\mu\nu} \equiv \eta_{\mu\nu} \tag{1.5}$$

Con todo esto es fácil ver que la conexión afín se transforma como:

$$\tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} + \frac{1}{\Omega}\left(g^\lambda_\mu \Omega_{,\nu} + g^\lambda_\nu \Omega_{,\mu} - g_{\mu\nu} g^{\lambda\kappa} \Omega_{,\kappa}\right) \tag{1.6}$$

Del mismo modo el tensor y escalar de Ricci se transforman según:

$$\tilde{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + \Omega^{-2}\left[4\Omega_{,\mu}\Omega_{,\nu} - \Omega_{,\sigma}\Omega^{,\sigma} g_{\mu\nu}\right] - \Omega^{-1}\left[2\Omega_{;\mu\nu} + \Box\Omega g_{\mu\nu}\right] \tag{1.7}$$

$$\tilde{R} = \Omega^{-2}\left[R - 6\frac{\Box\Omega}{\Omega}\right] \tag{1.8}$$

y el operador d'Alambertian:

$$\tilde{\Box}\ \phi = \Omega^{-2}\left(\Box\phi + 2g^{\mu\nu}\frac{\Omega_{,\mu}}{\Omega}\phi_{,\nu}\right) \tag{1.9}$$

1.3 La teoría de Brans-Dicke

La forma de introducir la teoría de Brans-Dicke varía de unos autores a otros; unos prefieren introducirla desde un punto de vista histórico basándose en las ideas de Brans-Dicke; otros, en cambio prefieren, desde un punto de vista más moderno, introducir la acción de Brans-Dicke directamente. Ambas de estas formulaciones tienen, a mi entender, sus ventajas e inconvenientes; por este motivo optaré por un planteamiento intermedio entre ambas; daré una visión moderna del problema, pero intentando no descuidar la física más básica que se esconde bajo esa formulación.

Figure 1.1: Brans (izquierda) y Dicke (derecha) plantearon por primera vez en 1961 una teoría de la gravitación alternativa a la einsteniana que incluía la existencia de un campo escalar adicional al tensor métrico.

1.3.1 El frame de Jordan

Las teorías escalar-tensor tienen su origen en los años 50. Pascual Jordan estaba intrigado por la aparición de un nuevo campo escalar en las teorías de tipo Kaluza-Klein, y especialmente en su posible papel como una constante gravitacional generalizada. Sabemos que la teoría de la gravitación debe ser una teoría métrica, ya que esta es la forma más sencilla de incluir el principio de equivalencia. Sin embargo nada nos impide suponer ingredientes adicionales al tensor métrico. La propuesta más sencilla es un campo escalar.

Recordemos que la relatividad general utiliza la acción más sencilla para el campo gravitacional:

$$S_G = \int d^4x\sqrt{g}R \tag{1.10}$$

Además sabemos que la acción de un campo escalar es:

$$S_\phi = \int d^4x\sqrt{g}\left(-\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - V(\phi)\right) \tag{1.11}$$

Si suponemos ahora acoplos no mínimos entre ambos campos, la acción generalizada se puede escribir como:

$$S = \int d^4x\sqrt{g}\left(f(\phi)R - \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - V(\phi)\right) + 16\pi\int d^4x\sqrt{g}\mathcal{L}_M \tag{1.12}$$

El tratamiento anterior es de caracter formal, pues no hemos mostrado la forma exacta de la función $f(\phi)$. Si suponemos

$$f(\phi) = \frac{1}{8\omega}\phi^2 = \Phi \tag{1.13}$$

y tomamos $V(\phi) = 0$ y $\omega = cte$ obtenemos la acción que encontraron Brans y Dicke en 1961 (frame de Jordan) :

$$S_{\text{JBD}} = \frac{1}{16\pi}\int d^4x\sqrt{g}\left(\Phi R - \frac{\omega}{\Phi}g^{\mu\nu}\partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi\right) + S_M, \tag{1.14}$$

Es importante señalar que aunque en un principio Jordan admitió un campo escalar que estuviera incluido en el lagrangiano de materia, Brans y Dicke no lo hicieron, puesto que sólo de esta forma es posible preservar el principio de equivalencia débil (WEP), las ecuaciones de

movimiento de la materia en un campo gravitacional no se ven modificadas pues dependen solo de la métrica g y no del escalar Φ.

El análogo a las ecuaciones de evolucion de Einstein es (veáse el Apéndice A):

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi}{\Phi}T^M_{\mu\nu} + \frac{\omega}{\Phi^2}\left(D_\mu\Phi D_\nu\Phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\ \Box\Phi\right) + \frac{1}{\Phi}(D_\mu D_\nu\Phi - g_{\mu\nu}\Box\Phi) \tag{1.15}$$

El lado izquierdo de esta ecuación nos es completamente familiar y no necesita comentario alguno. El primer término del lado derecho es el término fuente usual de la teoría de la relatividad general, pero con el parámetro de acoplo Φ^{-1}. Por tanto, las ecuaciones de movimiento de una masa en una métrica dada son las mismas que en la relatividad general. El segundo término es el tensor energía momento del campo escalar acoplado también con Φ^{-1}. Por último, el tercer término es nuevo y proviene de la presencia de segundas derivadas del tensor métrico, que son eliminadas al integrar por partes para dar una divergencia y los términos extras. Estos términos extras son esenciales para garantizar la conservación del tensor energía momento. El lado derecho de la ecuación tiene,como sabemos por las identidades de Bianchi divergencia nula. Usando estas y la identidad

$$(D^\nu\Phi)R_{\mu\nu} = \Box(D_\mu\Phi) - D_\mu(\Box\Phi) \tag{1.16}$$

obtenemos que el tensor energía momento es conservado, $T^{\mu\nu}_{M;\nu} = 0$, como era de esperar. La nueva ecuación de onda para Φ será:

$$\Box\Phi = \frac{8\pi}{(3+2\omega)}T^M \tag{1.17}$$

Es decir, el campo escalar sólo depende de la traza del tensor energía-momento asociado a la materia, y por tanto en la distribución espacial de materia, de acuerdo con el principio de Mach (ver sección 1.4).

Es conveniente, por motivos que veremos mas adelante, introducir una notación ligeramente diferente de la que utilizaron Brans y Dicke. Sea:

$$\Phi = \frac{1}{2}\xi\phi^2, \quad \epsilon\xi^{-1} = 4\omega, \quad \epsilon = \mathrm{Sign}(\omega), \quad \xi > 0. \tag{1.18}$$

Con esta notación la acción de Brans-Dicke se escribe:

$$S_{\mathrm{JBD}} = \frac{1}{16\pi}\int d^4x\sqrt{g}\left(\frac{1}{2}\xi\phi^2 R - \epsilon\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi\right) + S_M, \tag{1.19}$$

acción a la que volveremos más adelante, cuando hablemos de cuerdas. En alguna ocasión me referire a esta forma de escribir la acción como el frame de cuerdas.

1.3.2 El frame de Einstein

La acción de Brans-Dicke en el frame de Jordan viene, como hemos visto dada por:

$$S = \frac{1}{16\pi}\int d^4x\sqrt{\tilde{g}}\left[\tilde{R}\tilde{\Phi} - \frac{\omega}{\tilde{\Phi}}\partial^\mu\tilde{\Phi}\partial_\mu\tilde{\Phi}\right] + S_M[\Psi_m, \tilde{g}_{\mu\nu}], \tag{1.20}$$

Siempre podemos realizar una transformación conforme (ver siguiente apartado para ver una justificación de esto),

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2(\phi) g_{\mu\nu}, \tag{1.21}$$

$$\Omega(\phi) \equiv \exp(a(\phi))\,. \tag{1.22}$$

donde el parámetro a depende **linealmente** de ϕ. Haciendo ahora una redefinición de las cantidades

$$\Omega^2(\phi) = \frac{1}{\tilde{\Phi}} \tag{1.23}$$

$$\alpha_0(\phi) \equiv \frac{\partial \ln \Omega(\phi)}{\partial \phi} \equiv \frac{\partial a(\phi)}{\partial \phi} = \frac{1}{(2\omega+3)^{1/2}}\,, \tag{1.24}$$

escribimos la acción en el conocido como frame de Einstein

$$S = \frac{1}{16\pi} \int \sqrt{g}\,[R - 2g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi] + S_M[\Psi_m, \Omega^2(\phi) g_{\mu\nu}], \tag{1.25}$$

Las ecuaciones de los campos se escriben en este frame como:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} + 2\left(\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta}\phi, \alpha\phi_{,\beta}\right), \tag{1.26}$$

$$\Box\phi = -4\pi\alpha_0(\phi) T, \tag{1.27}$$

Merece la pena hacer una serie de reflexiones acerca de los dos frames antes mencionados. En el frame de Jordan el acoplo del campo Φ a la materia es indirecto, en el sentido de que sólo interacciona indirectamente con la materia al modificar la forma del espacio-tiempo en la que esta se mueve. Se eligen las masas visibles (el lagrangiano se puede generalizar e incluir materia oscura, de ahí lo de visible) constantes por conveniencia y porque estas partículas visibles siguen así geodésicas de la métrica.

En el frame de Einstein, en cambio, el campo escalar Φ aparece como un campo adicional que se acopla directamente a la materia y cuyo efecto es alterar la masa en reposo de las partículas que constituyen dicha materia, es decir, las masas de las partículas son variables. Desde este punto de vista, el hecho de que las partículas de materia no sigan geodésicas de la métrica de Einstein puede interpretarse en cierta manera como consecuencia de la interacción entre la materia y el campo escalar Φ , de forma análoga a la desviación de las trayectorias de partículas cargadas en presencia de un campo magnético.

1.3.3 El frame de Jordan VS el frame de Einstein

Los frames de Jordan y Eistein aparecen a menudo en la literatura y en gran cantidad de ocasiones enfrentados. Se afirma a menudo que existen diferencias entre ambos frames [25, 26, 27, 28, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36], llegandose a afirmar que sólo uno de los frames se corresponde con un frame físico. Nada más lejos de la realidad. Los autores que afirman esto, como Vollick [25], se basan en la idea de que dos teorías fisicas diferentes pueden ser equivalentes matemáticamente sin serlo fisicamente. Esta afirmación no es del todo descabellada y puede ser cierta en algunos contextos muy restringidos. Como primer ejemplo, sea $\mathcal{T}_1$ el modelo estándar de la física de particulas, y sea $\mathcal{T}_2$ el modelo estándar pero con los papeles "izquierda" y "derecha" cambiados. Según esto $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ diferirán debido a la violación de paridad en la interacción débil. Son equivalentes ambas teorías?. Claramente lo son matematicamente, ya

que los estados de $\mathcal{T}_1$ se corresponden uno a uno con los estados de $\mathcal{T}_2$. Por otro lado, desde el siguiente punto de vista, no son equivalentes. Siempre podemos elegir objetos exteriores a la teoría para definir los conceptos de izquierda y derecha (por ejemplo, moleculas orgánicas quirales, cuya quiralidad se basa en algún accidente histórico); con respecto a este estándar la teoría $\mathcal{T}_1$ sería correcta mientras que $\mathcal{T}_2$ no estaría de acuerdo con los experimentos.

Sin embargo, existe un segundo punto de vista, según el cual las teorías $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ son fisicamente equivalentes. La diferencia entre ambas teorías se basa en un criterio arbitrario de lo que es izquierda y derecha. Si nosotros tuvieramos que testar un modelo de partículas de una civilización alienígena , no sabríamos su convenio para derecha e izquierda , y diríamos de forma natural que el modelo sería correcto si existe algúna elección tal que la teoría esta de acuerdo con los experimentos. Desde este punto de vista, una teoría estaría de acuerdo con los experimentos si existe algúna elección de convenio tal que, las predicciones de la teoría están de acuerdo con los experimentos. Respectivamente, una teoría solo puede ser considerada falsa si existe un desacuerdo con los experimentos bajo todas las elecciones de convenios.

El segundo contexto en el que la afirmación de Vollick puede tener sentido es cuando se da una especificación incompleta de una teoría física. En particular esto ocurre si la teoría constituye una parte de una teoría mayor, y si las interacciones en dicha teoría mayor determinan algunas de las convenciones usadas en la interpretación de la teoría más pequeña. Un ejemplo claro de esto es el electromagnetismo. Si consideramos un electromagnetismo libre de fuentes, este es matematicamente equivalente a una teoría dual en la cual los papeles de los campos magnéticos y eléctricos hayan sido intercambiados. Sin embargo esta equivalencia matemática no es física, ya que si extendemos la teoría para incluir acoplos a campos cargados existen cargas eléctricas, pero no monopolos magnéticos.

La conclusión a la que llegamos con todo lo anterior es que, si dos teorías son fisicamente equivalentes lo serán también fisicamente, siempre y cuando (i) las convenciónes arbitrarias en la interpretación de la teoría no sean fijas y (ii) la teoría sea completa y contenga todos los grados de libertad que están involucrados en las medidas relacionadas con la teoría. La acción más general de las teorías escalar-tensor es completa y contiene todos los grados de libertad relevantes, y por tanto, según hemos discutido arriba, todas las representaciones conformes son fisicamente equivalentes.

Además de lo anteriormente expuesto, podemos utilizar otros argumentos para mostrar que los frames de Einstein y Jordan son equivalentes. Cuando nosotros elegimos un frame conforme estamos eligiendo un sistema de unidades, como ya indicó Dicke en 1961! [37].Cuando cambiamos de un sistema de unidades a otro, el cociente entre la antigua unidad de longitud y la nueva es generalmente una constante , independiente del espacio y del tiempo; es decir, la elección de un frame conforme no es más que una elección de unidades físicas, una simple convención humana!. Los distintos frames, hablando vagamente, pueden considerarse por tanto como distintas normalizaciones de la teoría y son observacionalmente indistinguibles, a diferencia de lo que se afirma normalmente en la literatura.

"Never attribute to malice that which can be adequately explained by stupidity"

1.3.4 La teoría de Brans-Dicke y el principio de Mach

Como se dijo, fueron Brans y Dicke los primeros que obtuvieron la acción (1.14), pero lo hicieron de un modo muy distinto al que se ha mostrado aquí, utilizando el principio de Mach. El problema arranca del enfrentamiento entre Newton y Leibnitz. Como es sabido, las leyes de Newton estan siempre referidas a sistemas de referencia llamados inerciales. La cuestión es como

determinar dichos sistemas. Para Newton la respuesta era simple: Existe un espacio absoluto y los sistemas inerciales son los que están en reposo o en movimiento uniforme con respecto a dicho espacio absoluto. Por el contrario la opinión de Leibnitz era que no debía ser necesario definir un espacio con independencia de los objetos materiales. El filósofo austriaco Ersnt Mach el primero en atacar de forma constructiva el espacio absoluto de Newton. Mach planteó la idea heurística de que el fenómeno de inercia se debe a las aceleraciones con respecto a la distribución de masas del Universo. Las masas inerciales de las diversas partículas elementales no serían constantes fundamentales, sino que representarían la interacción de las partículas con algún tipo de campo cósmico. Pero, puesto que las masas inerciales de las partículas solo se pueden determinar midiendo la acelaración gravitacional, una conclusión equivalente es que la constante de gravitación Universal G debería estar relacionada con el valor medio de un campo escalar Φ, acoplado a la densidad de masa del Universo. Haciendo uso de esta suposición Brans y Dicke formularon la teoría que lleva su nombre y que es exactamente la misma a la presentada aquí utilizando el principio variacional.

Lo que queremos destacar con la exposición anterior, es que la teoría de Brans-Dicke cumple por construcción el principio de Mach, a diferencia de la Relatividad General, a pesar de las intenciones de Einstein. Einstein consideró este principio de gran importancia e intento incorporarlo a la Relatividad General, como nos indican las siguientes afirmaciones de Einstein dirigidas a Mach en noviembre de 1915, cuando estaba a punto de obtener la formulación estandar de la relatividad general:

> *" If so, then your happy investigations on the foundations of mechanics, Planck's unjustified criticism notwithstandig, will receive brilliant confirmation. For it necessarily turns our that inertia originates in a kind of interaction between bodies, quite in the sense of your considerations on Newton's pail experiment. The first consequence is on p.6 of my paper. The following additional points emerge:* (1) *If one accelerates a heavy shell of matter S, then a mass enclosed by that shell experiences an accelerative force.* (2) *If one rotates the shell relative to the fixed stars about an axis going through its center a Coriolis force arises in the interior of the shell; that is, the plane of a Foucault pendulum is dragged around ... "*

Sin embargo, que la teoría Einsteniana de la gravitación no sea por construcción una teoría "machiana", no implica necesariamente que la teoría y sus resultados no presenten rasgos "machianos". A menudo se afirma en la literatura que la Relatividad General no satisface el principio de Mach. Esta cuestión debe plantearse con cuidado, pues son muchas las interpretaciones de dicho principio que se han dado a lo largo de la historia. Dichas interpretaciones se muestran en la tabla 1.1. El lector interesado, podrá encontrar un excelente review sobre el tema en las referencias [7] y [8].

Cierto es que la relatividad general no es "machiana", en el sentido de que la constante gravitacional G no es dinámica y se satisface el principio de equivalencia fuerte (SEP), a diferencia de lo que ocurre, por ejemplo, en las teorías escalar-tensor. Sin embargo, algunas de las predicciones de la relatividad general satisfacen claramente el principio de Mach en su interpretación *Mach 3* de la tabla 1.1; sirva de ejemplo el, de sobra conocido, efecto Lense-Thirring, que nos muestra la influencia del movimiento cósmico y de la distribución de materia sobre los sistemas de referencia.

	Interpretación del Principio de Mach	Lo satisface	GR?
		EA	EC
Mach 1	La constante gravitacional es un campo dinámico	No	No
Mach 2	En el espacio vacío un cuerpo aislado no tiene inercia	No	No
Mach 3	Los sistemas de referencia locales se ven afectados por el movimiento cósmico y la distribución de materia	Si	
Mach 4	El Universo es cerrado	?	?
Mach 5	La energía, momento angular y lineal del Universo son cero	No	Sí
Mach 6	La masa inercial se ve afectada por la distribución de materia	No	No
Mach 7	Si desaparece la materia no habría espacio	No	No
Mach 8	La teoría no contiene elementos absolutos	No	Sí

Table 1.1: La tabla superior muestra algunas de las posibles interepretaciones del principio de Mach. Claramente algunas de ellas son verificadas en relatividad general. La teoría Einsteniana de la gravitación es "machiana" en el sentido de esas proposiciones , a pesar de no serlo en lo que respecta a la interpretación dada por Brans y Dicke del principio de Mach.

1.3.5 La violación del principio de equivalencia fuerte

Tanto la Relatividad General como la teoría de Brans-Dicke son teorías *"puramente dinámicas"*, en el sentido de que la estructura y evolución de los campos gravitacionales viene determinada por ecuaciones de campo en derivadas parciales [1]. La teoría de la relatividad es una teoría dinámica, puesto que contiene unicamente el campo gravitacional, la métrica en si misma, y su estructura y evolución estan gobernadas por las ecuaciones de Einstein. La teoría de Brans-Dicke es también puramente dinámica, puesto que la ecuación de campo para la métria incluye también el campo escalar, y viceversa.

Desde este punto de vista, es posible establecer algunas conclusiones de caracter general sobre la naturaleza de la gravedad en diferentes teorías métricas, conclusiones que son reminiscentes del principio de equivalencia de Einstein, pero a las que daremos un nuevo nombre, el Principio de Equivalencia Fuerte.

Consideremos un sistema referencial local en caída libre en cualquier teoría métrica de la gravedad. Supongamos que este referencial es lo suficientemente pequeño como para que las inhomogeneidades en los campos gravitacionales externos puedan ser despreciadas. El sistema puede ser una extrella, un agujero negro, el sistema solar, o un experimento de Cavendish. Llamemos a este sistema "referencial de Lorentz cuasilocal". Para determinar el comportamiento del sistema debemos calcular la métrica. El cálculo procede en dos etapas. Primero, determinamos el comportamiento externo de la métrica y los campos gravitacionales, estableciendo valores en la frontera para los campos generados por el sistema local, en una frontera del referencial cuasilocal "lejos" del sistema local. Segundo, resolveremos las ecuaciones de campo generadas por el sistema local. Pero, debido a que la métrica es acoplada, directa o indirectamente, a los demas campos de la teoría su estructura y evolución estará influenciada por estos campos, particularmente por los valores tomados por estos campos en la frontera lejos del sistema local. Esto será cierto incluso si trabajamos en un sistema de coordenadas en el cual la forma asintótica de la métrica en la frontera entre el sistema local y el mundo exterior sea la métrica de Minkowski. Por tanto, el entorno gravitacional en el cual reside el sistema local puede influenciar la métrica generada por el sistema local a través de los valores en la frontera de los campos auxiliares. En consecuencia, los resultados de los experimentos de los experimentos gravitacionales pueden depender de la localización y velocidad del referencial relativa al entorno externo. Por supuesto, los experimentos locales no gravitacionales no son afectados puesto que los campos gravitacionales que generan se asumen que son despreciables, y puesto que estos experimentos se acoplan solo a la métrica cuya forma puede siempre hacerso Minkowskiana totalmente. Podemos ahora hacer varios afirmaciones sobre algunos tipos de teorías [2]:

(a) Una teoría que contiene sólo la métrica $\mathbf{g}$ da lugar a una física gravitacional local que es independiente de la localización y velocidad del sistema local, ya que el único campo que se acopla al entorno externo es la métrica, y siempre es posible encontrar un sistema de coordenadas en el cual la métrica adopta la forma Minkowskiana en la frontera. Por tanto, los valores asintoticos de la métrica son constantes, con independencia de la localización, y de forma asintótica invariantes Lorentz, y por tanto independientes de la velocidad. La Relatividad General pertenece a este tipo de teorías.

(b) Una teoría que contiene la métrica y un campo escalar dinámico ϕ, como es el caso de

[1] Existen otras teorías que contienen *"elementos absolutos"*, campos o ecuaciones cuya estructura y evolución vienen dadas a priori y son independientes de la estructura y evolución de los otros campos de la teoría, un ejemplo de esto sería la teoría bimétrica de Rosen.

[2] Me centraré solo en las dos que nos interesan.

la teoría de Brans-Dicke, da lugar a una física gravitacional local que puede depender de la localización del sistema, pero que es independiente de la velocidad del mismo [3]. Esto se debe a la invarianza asintótica Lorenzt de la métrica de Minkowiski y de los campos escalares, salvo que ahora, los valores asintóticos de los campos escalares pueden depender de la localización del sistema. En el caso de la teoría de Brans-Dicke, el comportamiento asintótico del campo escalar determina el valor de la constante gravitacional.

Las ideas anteriores se pueden resumir en el denominado Principio de Equivalencia Fuerte, o SEP en sus siglas inglesas, que establece:

(1) *El principio de equivalencia débil WEP es válido para cuerpos autogravitantes así como para particulas prueba (WEP).*

(2) *El resultado de cualquier experimento local es independiente de la velocidad del aparato (en caída libre).*

(3) *El resultado de cualquier experimento local es independiente de cuando y donde sea realizado*

La diferencia existente entre el SEP y el EEP es la inclusión de cuerpos con interacciones autogravitacionales (planetas, estrellas) y de experimentos que involucren fuerzas gravitacionales.

La discusión que hemos presentado anteriormente nos indica que, si el Principio de Equivalencia Fuerte es válido, entonces solamente puede existir un campo gravitacional en el universo, la métrica. No obstante nuestros argumentos son solamente sugestivos, y no existe en la actualidad ninguna prueba rigurosa de esta afirmación.

Claramente la teoría de la Relatividad satisface por construcción el Principio de Equivalencia Fuerte, pues incluye sólo la métrica, de hecho es la única teoría métrica que lo hace! [4]. En el momento que incluimos algún tipo de campo auxiliar el Principio de Equivalencia Fuerte es violado, tal es el caso de las teorías escalar-tensor, y por tanto de la teoría de Brans-Dicke. Una manifestación "práctica"de esta violación de SEP la veremos cuando hablemos de la producción de radiación dipolar.

1.3.6 El límite newtoniano y la dependencia del campo escalar de la constante gravitacional

En los apartados anteriores hemos expresado en varias ocasiones que en la teoría de Brans-Dicke la "constante gravitacional" G no es constante, sino que su valor depende del valor que toma el campo Φ (o el parámetro ω). Son varias las formas de llegar a la expresión de esta "'constante gravitacional'. Yo he elegido una demostración basada en la obtención del correcto límite newtoniano ya que es muy ilustrativa, y me permite introducir el concepto de aproximación de campo débil que usaremos más adelante. Para tomar contacto con las

[3] Nótese que he dicho "puede" y no "debe", pues existen teorías escalar tensor, en las cuales mediante elecciones determinadas de la función $\omega(\phi)$ es posible retornar al caso anterior, como por ejemplo la Teoría de G constante de Barker.

[4] Existen intentos de renormalizar la teoría cuántica de la gravedad mediante la inclusión en la acción de términos que eliminen los infinitos no renormalizables. Estos términos son de orden cuadrático o superior en el tensor de Riemann, el de Ricci, o el escalar de curvatura:

$$S = (16\pi)^{-1} \int \left(R + aRr + bR_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + cR_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta}(g)^{1/2}d^4x \right). \tag{1.28}$$

Podría parecer que, puesto que la teoría contiene solamente en campo gravitacional $g_{\mu\nu}$, contradice nuestra afirmación de que la Relatividad General es la única teoría que satisface el SEP. No obstante, en la mayoría de las teorías de este tipo, las constante a,b y c (unidades de longitud al cuadrado) tienen tamaños que varían entre la escala de Planck, 10^{-33}cm y las dimensiones nucleares 10^{-13} cm, de forma que los efectos observables de estos términos se encuentran restringidos a las interacciones de las partículas elementales o al Universo temprano.

ecuaciones de Newton es necesario considerar campo estáticos y débiles y que la velocidad de las partículas es no relativista. De forma matemática consideraremos perturbaciones lineales de la metrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ y de un campo escalar constante Φ_0.

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \tag{1.29}$$

$$\Phi = \Phi_0 + \delta\Phi. \tag{1.30}$$

donde $h_{\mu\nu}$ y $\delta\Phi$ son cantidades pequeñas.

Con esta aproximación las ecuaciones de los campos 1.26 y 1.27 se pueden reescribir como:

$$\Box\delta\Phi = \frac{8\pi}{3+2\omega_0}T, \tag{1.31}$$

$$2R^{(1)}_{\mu\nu} = \Box^2 h_{\mu\nu} + h^{\lambda}_{\lambda,\mu,\nu} - h^{\lambda}_{\mu,\lambda,\nu} - h^{\lambda}_{\nu,\lambda,\mu} = 16\pi S_{\mu\nu} \tag{1.32}$$

donde

$$S_{\mu\nu} = \Phi_0^{-1}\left(T_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\frac{1+\omega}{3+2\omega}T\right) + \frac{1}{8\pi}\Phi_0^{-1}\delta\Phi_{,\mu,\nu} \tag{1.33}$$

a primer orden en $h_{\mu\nu}$ y $\delta\Phi$. $R^{(N)}_{\mu\nu}$ denota el término en $R_{\mu\nu}$ que es de orden N en $h_{\mu\nu}$. Debido a las identidades de Bianchi

$$\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}\right)_{;\nu} = 0 \tag{1.34}$$

existen cuatro grados de libertad que no estan univocamente especificados por las ecuaciones tensoriales de los campos. Consequentemente, tenemos a nuestra disposición cuatro condiciones, o gauges, de las que podemos sacar un gran partido. Por inspección de 1.32 y 1.33 se puede ver que el término que involucra $\delta\Phi$ puede eliminarse si hacemos

$$h^{\lambda}_{\lambda,\mu,\nu} - h^{\lambda}_{\mu,\lambda,\nu} - h^{\lambda}_{\nu,\lambda,\mu} = -2\Phi_0^{-1}\delta\Phi_{,\mu,\nu}. \tag{1.35}$$

Para conseguir esto basta con elegir el gauge [5]

$$h^{\lambda}_{\mu,\lambda} - \frac{1}{2}h^{\lambda}_{\lambda,\mu} = \Phi_0^{-1}\delta\phi_{,\mu} \tag{1.36}$$

condicion que, incidentalmente, tiende al llamado gauge harmónico cuando el campo escalar $\delta\Phi$ tiende a cero. La ecuación del campo 1.32 se escribe en este gauge de una manera mucho más sencilla

$$\Box^2 h_{\mu\nu} = 16\pi\Phi_0^{-1}\left(T_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\frac{1+\omega}{3+2\omega}T\right). \tag{1.37}$$

A pesar de lo que parece los campos escalar y tensor siguen estando acoplados (como debe ser) mediante la imposicion del gauge . Consideremos ahora un sistema muy simple de presión nula. Sea

$$T_{\mu\nu} = diag\,(\rho, 0, 0, 0) \longrightarrow T^{\lambda}_{\lambda} = -\rho. \tag{1.38}$$

[5]Para ver esto basta con tomar la derivada de 1.3.6 con respecto a x^{ν},obteniendo

$$h^{\lambda}_{\mu,\lambda,\nu} - \frac{1}{2}h^{\lambda}_{\lambda,\mu,\nu} = \Phi_0^{-1}\delta\phi_{,\mu,\nu}.$$

Intercambiando ahora μ y ν y utilizando la conmutatividad de las derivadas parciales

$$h^{\lambda}_{\nu,\lambda,\mu} - \frac{1}{2}h^{\lambda}_{\lambda,\mu,\nu} = \Phi_0^{-1}\delta\phi_{,\mu,\nu}.$$

Sumando las dos expresiones anteriores y cambiando de signo se obtiene 1.3.6.

La ecuación 1.37 con $\partial_0 = \partial_t = 0$ se escribe

$$\Box h_{00}^2 = \nabla h_{00} = 16\pi\Phi_0^{-1}\rho\left(\frac{2+\omega}{3+2\omega}\right). \tag{1.39}$$

Para una distribución general, pero localizada, $\rho(\vec{x})$, tenemos

$$h_{00} = 4\Phi_0^{-1}\left(\frac{2+\omega}{3+2\omega}\right)\int d^3\ \vec{x'}\frac{\rho(\vec{x'})}{|\vec{x'}-\vec{x}|} \cong 4\Phi_0^{-1}\left(\frac{2+\omega}{3+2\omega}\right)\frac{M}{r}, \tag{1.40}$$

donde $|\vec{x'}-\vec{x}| \cong r$ y $M \equiv \int d^3\ \vec{x'}\rho(\vec{x'})$. Sustituyendo ahora en la expresión 1.29

$$g_{00} = \eta_{00} + h_{00} = -1 + \frac{2M}{r}\Phi_0^{-1}\frac{4+2\omega}{3+\omega}. \tag{1.41}$$

Puesto que queremos obtener el correcto límite newtoniano

$$g_{00} \longrightarrow -1 + \frac{2GM}{r}. \tag{1.42}$$

Comparando las expresiones 1.41 y 1.42 vemos que Φ_0 y G estan relacionadas por

$$\Phi_0 = \frac{1}{G}\left(\frac{4+2\omega}{3+2\omega}\right). \tag{1.43}$$

Nótese que cuando $\omega \longrightarrow \infty$, $\Phi_0^{-1} \longrightarrow G$, y la teoría de Brans-Dicke tiende a la Relatividad General. Los límites de esta convergencia serán tratados en la siguiente sección.

1.3.7 Teoría de Brans-Dicke e invarianza conforme.

Otro de los aspectos más controvertidos de la literatura, además de la equivalencia física entre los frames de Jordan y Einstein, es la convergencia de la teoría de Brans-Dicke a la relatividad general en el límite $\omega \to \infty$ cuando el tensor energía momento se anula $T = 0$. Basándonos en las propiedades conformes de la teoría de Brans-Dicke, intentaremos en esta sección dar una explicación de la convergencia a GR en ese límite y daremos también algunos contraejemplos a la creencia extendida de que toda solución con $T \neq 0$ converge siempre a la solución de relatividad general.

Sea S_{BD} la acción de Brans-Dicke en el frame de Jordan:

$$S_{\text{JBD}} = \frac{1}{16\pi}\int d^4x\sqrt{g}\left(\Phi R - \frac{\omega}{\Phi}g^{\mu\nu}\partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi\right) + S_M, \tag{1.44}$$

donde S_M es la parte de la acción asociada a la materia y que es independiente, como justificamos, del campo escalar Φ.

Olvidémonos por el momento de la parte asociada a la materia y concentrémonos en la parte puramente gravitacional. Si aplicamos una transformación conforme:

$$g_{\mu\nu} \longrightarrow \tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu} \tag{1.45}$$

donde $\Omega(x^\alpha)$ es una función dos veces diferenciable distinta de cero. Aplicando los resultados de la sección 1.2, la parte gravitacional de la acción se escribe:

$$\mathcal{L}_{BD}\sqrt{g} = \sqrt{\tilde{g}}\left[\Omega^{-2}\Phi\tilde{R} - \frac{6\Phi\Box\Omega}{\Omega^5} + \frac{\omega}{\Omega^2\Phi}\,\tilde{g}^{\mu\nu}D_\mu\Phi D_\nu\Phi\right] \tag{1.46}$$

Si suponemos ahora una transformación de la forma:

$$\Omega = \Phi^{\alpha} \tag{1.47}$$

con $\alpha \neq 1/2$,y redefiniendo el campo escalar como:

$$\Phi \longrightarrow \tilde{\Phi} = \Phi^{1-2\alpha} \tag{1.48}$$

la acción gravitacional se escribe:

$$\mathcal{L}_{BD}\sqrt{g} = \sqrt{-\tilde{g}}\left[\tilde{\Phi}\tilde{R} + \frac{\tilde{\omega}}{\tilde{\Phi}}\,\tilde{g}^{\mu\nu}D_{\mu}\tilde{\Phi}D_{\nu}\tilde{\Phi}\right] \tag{1.49}$$

con

$$\tilde{\omega} = \frac{\omega - 6\alpha\,(\alpha - 1)}{(1-2\alpha)^2} \tag{1.50}$$

Como vemos la acción no asociada a la materia permanece invariante bajo una transformación $\mathcal{F}_{\alpha}$ consistente en un cambio de escala y un cambio del campo escalar para $\alpha \neq 1/2$. Dicho de otra forma, las transformaciones

$$\mathcal{F}_{\alpha} : \left(M, g^{(\omega)}_{\mu\nu}, \Phi^{(\omega)}\right) \longrightarrow \left(M, \tilde{g}^{(\tilde{\omega})}_{\mu\nu}, \tilde{\Phi}^{(\tilde{\omega})}\right) \tag{1.51}$$

mapean el espacio de Brans-Dicke $\left(M, g^{(\omega)}_{\mu\nu}, \Phi^{(\omega)}\right)$ en otro espacio del mismo tipo; ambos espacios contituyen una misma clase equivalente $\mathcal{E}$. Nótese que las transformaciones $\mathcal{F}_{\alpha}$ constituyen un grupo abeliano de simetrías con una singularidad en $\alpha = 1/2$. Es importante destacar que, cuando la parte de la acción asociada a la distribución de materia S_M es incluida en el tratamiento anterior, la invarianza conforme es violada. Esto es fácil de ver sin más que darse cuenta de que, desde un punto de vista físico, una teoría que contenga masas tendrá también una escala de masas asociada y por tanto no será invariante bajo cambios de escala. Una vez hecha esta observación es claro que siempre que T= 0 la teoría será invariante bajo transformaciones conformes. El argumento previo nos permite entender por que la teoría de Brans-Dicke no se reduce a la relatividad general en el límite $\omega \to \infty$ si T = 0. Como vimos un cambio en el parámetro de Brans-Dicke $\omega \to \tilde{\omega}$ es equivalente a una transformación $\mathcal{F}_{\alpha}$ para un cierto valor del parámetro α. En particular uno puede considerar un cambio en el parámetro tal que $\tilde{\omega} \gg 1$ (esto es posible ya que la función $\tilde{\omega}(\alpha)$ tiene un polo en $\alpha = 1/2$), lo cual puede verse como un caso equivalente al limite $\omega \to \infty$, en el cual se espera recuperar la relatividad general. Según los argumentos, previos este límite simplemente mueve el espacio de Brans-Dicke $\left(M, g^{(\omega)}_{\mu\nu}, \phi^{(\omega)}\right)$ dentro de la clase equivalente $\mathcal{E}$; y puesto que la relatividad general no es una teoría invariante conforme [4] y por tanto no pertenece a dicha clase, concluimos que no puede ser obtenida a partir de la teoría de Brans-Dicke si T = 0. Es conveniente destacar que la condicion $T \neq 0$ no es una condición necesaria ni suficiente para que las soluciones exactas en la teoría de Brans-Dicke se reduzcan a las correspondientes soluciones de las ecuaciones de Einstein. Existen de hecho ciertas soluciones con $T \neq 0$ que no se reducen a las soluciones relativistas generales cuando $\omega \to \infty$, como serían por ejemplo los problemas con simetría cilíndrica [21].

1.4 Generalización en presencia de una constante cosmológica

El módelo propuesto por Brans y Dicke en 1961 es un buen módelo teórico para empezar, pero debe sin embargo ser revisado en presencia de la constante cosmológica, un ingrediente fundamental para entender el universo acelerado. Nosotros no haremos un tratamiento exhaustivo

de esto aquí, pero por completitud exponemos a continuación los resultados que se obtienen si tenemos en cuenta la constante cosmológica.

La acción para una teoría escalar-tensor que tenga en cuenta la constante cosmológica será

$$S_\lambda = \frac{1}{16\pi}\int d^4x\sqrt{g}\left(\Phi R - \frac{\omega(\Phi)}{\Phi}g^{\mu\nu}\partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi + 2\Phi\lambda(\Phi)\right) + S_M \tag{1.52}$$

donde $\lambda(\Phi)$ es la función cosmológica y donde hemos hecho $\omega = \omega(\Phi)$ para mayor generalidad. Las ecuaciones de campo para g son:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} - \lambda(\Phi)g_{\mu\nu} = \frac{8\pi}{\Phi}T^M_{\mu\nu} + \frac{\omega(\Phi)}{\Phi^2}\left(D_\mu\Phi D_\nu\Phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\ \Box\Phi\right) + \frac{1}{\Phi}(D_\mu D_\nu\Phi - g_{\mu\nu}\Box\Phi) \tag{1.53}$$

La función cosmológica juega por tanto el mismo papel que la constante cosmológica en Relatividad General. Teniendo en cuenta esto, la ecuación para Φ se escribe:

$$\Box\Phi + \frac{2\Phi^2 d\lambda/d\Phi - 2\Phi\lambda(\Phi)}{2\omega(\Phi)+3} = \frac{1}{(2\omega(\Phi)+3)}\left(8\pi T^M - \frac{d\omega}{d\Phi}\Phi_\mu\Phi^\mu\right) \tag{1.54}$$

La función cosmológica otorga un rango l relacionado con λ,ω y sus derivadas, en el sentido de que las soluciones para Φ contiene términos tipo Yukawa $exp(-r/l)$, es decir, el alcance del campo Φ sería limitado. Una vez hecha estas aclaraciones supondremos que, salvo que se indique lo contrario, la función cosmológica no juega ningún papel.

1.5 Soluciones aproximadas a la teoría de Brans-Dicke

Al igual que hacíamos con la teoría de Einstein es conveniente desarrollar la teoría de Brans-Dicke en términos de los parámetros postnewtonianos α,β y γ. Serán las medidas experimentales de estos parámetros las que nos permitirán averiguar si la teoría de la Relatividad General es la verdadera teoría de la gravitación o si, por el contrario, lo es cualquier otra, entre ellas la teoría de Brans-Dicke.

Consideremos la métrica de Schwarzschild

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2 \tag{1.55}$$

que en coordenadas isotrópicas (aquellas en las que la distancia espacial es proporcional a la distancia euclídea)

$$\rho = \frac{1}{2}\left(r - GM + \sqrt{r^2 - 2GMr}\right) \longrightarrow r = \rho\left(1 + \frac{GM}{2\rho}\right)^2 \tag{1.56}$$

se escribe

$$ds^2 = -\left(\frac{2\rho - GM}{2\rho + GM}\right)^2 dt^2 + \left(1 - \frac{GM}{2\rho}\right)^4\left(d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2\right) \tag{1.57}$$

El teorema de Birkhoff es generalizable a la teoría de Brans-Dicke, y por tanto, esta teoría generará también soluciones estáticas y esfericamente simétricas en el vacio. Esto nos permite desarrollar la métrica en términos de una cantidad pequeña, por ejemplo, $\epsilon \sim v^2 \sim GM/\rho$

$$ds^2 = -\left(1 - 2\alpha\frac{GM}{\rho} + 2\beta\left(\frac{GM}{\rho}\right)^2 + \dots\right)dt^2 + \left(1 + 2\gamma\frac{GM}{\rho} + \dots\right)\left(d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2\right), \tag{1.58}$$

donde α, β y γ,... son parámetros adimensionales desconocidos, y que a menudo se denominan parámetros de Eddington o parámetros postnewtonianos. Como dijimos la medición de estos parámetros nos permitirá discernir cual de todas las posibles teorías de la gravitación es la correcta. En la tabla 1.2 se resume el conjunto de los 10 parámetros de la aproximación postnewtoniana indicándose su interpetración física (el formato original se tomó de los trabajos de Will [3]). Escribamos la expresión 1.55 en términos de la coordenada original r. Hacemos por tanto

$$r = \rho\left(1+\gamma\frac{GM}{\rho}+\ldots\right) \longrightarrow \rho = r\left(1-\gamma\frac{GM}{r}+\ldots\right), \tag{1.59}$$

con lo que la métrica se escribe

$$ds^2 = -\left(1-2\alpha\frac{GM}{r}+2\left(\beta-\alpha\gamma\right)\left(\frac{GM}{r}\right)^2+\ldots\right)dt^2+\left(1+2\gamma\frac{GM}{r}+\ldots\right)dr^2+r^2d\Omega^2, \tag{1.60}$$

Por último, podemos construir coordenadas armónicas $\mathbf{X}$ [2], definidas como

$$X_1 = R\sin\theta\cos\varphi \tag{1.61}$$

$$X_2 = R\sin\theta\sin\varphi \tag{1.62}$$

$$X_3 = R\cos\theta \tag{1.63}$$

donde R satisface la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{d}{dr}r^2\left(1-(\alpha+\gamma)\frac{MG}{r}+\ldots\right)\frac{dR}{dr}-2\left(1-(\alpha-\gamma)\frac{GM}{r}+\ldots\right), \tag{1.64}$$

que tiene por solución

$$R = \left(1+\frac{(\alpha-3\gamma)GM}{2r}+\ldots\right)r \tag{1.65}$$

Con esto, el elemento de línea se escribe

$$\begin{aligned} ds^2 = &-\left(1-2\alpha\frac{GM}{R}+\left(\alpha\gamma-\alpha^2+2\beta\right)\frac{G^2M^2}{R^2}+\ldots\right)dt^2 \\ &+\left(1+\frac{(3\gamma-\alpha)GM}{R}+\ldots\right)d\mathbf{X}^2+\frac{(\alpha-\gamma)GM/R+\ldots}{R^2}\left(\mathbf{X}\ d\mathbf{X}\right)^2 \end{aligned} \tag{1.66}$$

Tomando $\alpha \equiv 1$, tenemos

$$\begin{aligned} g_{00} &= -\frac{2GM}{r} && PPN(1) \\ g_{00} &= (\gamma-1+2\beta)\frac{G^2M^2}{r^2} && PPN(2) \\ g_{ij} &= -(3\gamma-1)\delta_{ij}\frac{GM}{r}+(1-\gamma)\frac{GMx_ix_j}{r^3} && PPN(1). \end{aligned} \tag{1.68}$$

Por otro lado, si desarrollamos las ecuaciones de campo de la teoría de Brans-Dicke hasta el mismo orden [2], se tiene [6]

$$g_{00} = -\frac{2GM}{r} \qquad PPN(1)$$

[6]He decidido no incluir todo el desarrollo puesto que no aporta nada nuevo. De todas formas, el cálculo completo se encuentra en el libro de Weinberg. Nuestro resultado es idéntico al mismo salvo la signatura de la métrica.

Parametro	Que mide en relación a GR	Valor en GR	Valor en teorías-totalmente conservativas
γ	Que cantidad de curvatura se produce por unidad de masa?	1	γ
β	Que cantidad de 'no linearidad' hay en la ley de superposición para la gravedad?	1	β
ξ	Efectos localización preferida?	0	ξ
α_1	Efectos sistemas preferidos?	0	0
α_2		0	0
α_3		0	0
α_3	Violación de la conservación	0	0
ζ_1	del momento total?	0	0
ζ_2		0	0
ζ_3		0	0
ζ_4		0	0

Table 1.2: Los parámetros PPN y su significado (α_3 se ha mostrado dos veces para indicar que mide ambos efectos).

$$g_{00} = \left(\frac{2\omega+3}{\omega+2}\right)\frac{G^2M^2}{r^2} \qquad PPN(2) \tag{1.69}$$

$$g_{ij} = -\left(\frac{2\omega+1}{\omega+2}\right)\delta_{ij}\frac{GM}{r} + \frac{1}{\omega+2}\frac{GMx_ix_j}{r^3} \qquad PPN(1)$$

Si comparamos esta solución con la expansión general con $\alpha \equiv 1$ (1.68)(nótese que la propia definición de masa lleva incluida esta asignación [1]) obtenemos los parámetros postnewtonianos como función del parámetro ω:

$$\alpha = 1 \qquad \beta = 1 \qquad \gamma = \frac{\omega+1}{\omega+2} \tag{1.70}$$

En relatividad general, como sabemos, el valor de los parámetros de Eddington es:

$$\alpha = \beta = \gamma = 1 \tag{1.71}$$

Como era de esperar, por la forma en la que esta construida la teoría, el parámetro β en la teoría de Brans-Dicke (que mide la "no linearidad" en la ley de superposición de la gravedad) es exactamente igual al de la Relatividad General. El único parámetro que difiere del resultado obtenido en GR es el parámetro γ, que mide la cantidad de curvatura producida por unidad de masa. Nótese además que, en el límite en que el parámetro ω tiene a infinito, se recupera el resultado de GR,

$$\gamma = \frac{\omega+1}{\omega+2} \longrightarrow 1. \tag{1.72}$$

Teoría	Funciones Arbitrarias o Constantes	Parámetros de ajuste Cósmico	Parámetros PPN				
			γ	β	ξ	α_1	α_2
Relatividad General	ninguna	ninguno	1	1	0	0	0
Escalar-Tensor							
Brans-Dicke	ω	ϕ_0	$\frac{(1+\omega)}{(2+\omega)}$	1	0	0	0
General	$A(\varphi)$, $V(\varphi)$	φ_0	$\frac{(1+\omega)}{(2+\omega)}$	$1+\Lambda$	0	0	0

Table 1.3: Los parámetros PPN en teorías escalar-tensor comparados con GR ($\alpha_3 = \zeta_i = 0$ para todos los casos).

Chapter 2

Efectos clásicos de GR en el sistema solar desde el punto de vista de BD

"The great tragedy of science is the slaying of a beautiful hypothesis by an ugly fact. "
Thomas H. Huxley

2.1 Introducción

Toda teoría física, por muy elegante que sea, deberá ser abandonada si sus predicciones no están de acuerdo con las observaciones. Es innegable la belleza intrínseca a la Relatividad General y su sencillez; sin embargo, como he intentado argumentar a lo largo de todos los desarrollos anteriores, es necesario realizar experimentos que distingan si la Relatividad General es la verdadera teoría de la gravitación (abuso del lenguaje por sencillez, en mi opinión, una teoría física no puede nunca catalogarse de verdadera) o si corresponde realmente el límite de alguna otra teoría como las teorías escalar-tensor estudiadas aquí.

Utilizando los resultados del capítulo anterior analizaré los efectos clásicos de la Relatividad General realizados en el sistema solar , tales como la deflexión de la luz por el sol, la precesión del perihelio, el retraso en el eco de radar y el efecto Lense-Thirring entre otros, desde el punto de vista de la teoría escalar-tensor. En algunos casos el estudio se limitará a traducir los parámetros postnewtonianos de la Relatividad General a los de la teoría de Brans-Dicke, en otros, como por ejemplo el efecto Lense-Thirring, realizaré un estudio detallado. Por último analizaré los distintos experimentos realizados hasta la fecha y resumiré sus cotas sobre la teorías escalar-tensor.

2.2 Deflexión de la luz por el sol

Uno de los resultados clave en los que se basa el triunfo de la Relatividad General sobre la teoría newtoniana de la gravitación es sin duda la deflexión de la luz por sol. La confirmación por Eddington de la desviación de la luz emitida por una estrella durante un eclipse de Sol en los días siguientes al fin de la Primera Guerra Mundial elevó a Einstein a la categoría de ídolo de masas, llegando a ser portada incluso de la revista *Times*. La deflexión total de un fotón

cuando pasa cerca del campo gravitacional debido a un objeto masivo viene dada por [1]:

$$\Delta\phi = \frac{4GM}{c^2 r_0}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right) \tag{2.1}$$

donde r_0 es la distancia del centro del objeto masivo al punto de máximo acercamiento del fotón. En el caso del Sol y suponiendo que el fotón pasa a una distancia mínima igual al radio solar tenemos

$$\Delta\phi = 1.75''\left(\frac{1+\gamma}{2}\right), \tag{2.2}$$

expresión que tiene dos contribuciones: un factor 1/2 debido a la teoría corpuscular y al principio de equivalencia que ya predijo Newton, y un nuevo factor $\gamma/2$ procedente de la curvatura del espacio tiempo. Para el caso de la relatividad la deflexión esperada sería $1.75''$, mientras que para la teoría de Brans-Dicke esta deflexión es ligeramente inferior

$$\Delta\phi = \frac{4GM}{c^2 r_0}\left(\frac{2\omega+3}{2\omega+4}\right) \tag{2.3}$$

2.3 La precesión de los periastros

La explicación de la precesión anómala del perihelio de Mercurio fue otro de los triunfos de GR. Este problema no había encontrado una solución en la mecánica celestial desde el anuncio en 1859 por Le Verrier de que, después de haber tenido en cuenta los efectos perturbativos del resto de planetas en la órbita de Mercurio y después de que el efecto de precesión de los equinocios en el sistema de coordenadas astronómicas hubiera sido sustraído, existía aún un avance no explicado en el avance del perihelio de Mercurio.

Sea una partícula prueba orbitando alrededor del Sol. La precesión del periastro de dicha órbita predicha por Relatividad General viene dada por:

$$\Delta\phi = \frac{6\pi GM}{c^2 a(1-e^2)}\left(\frac{2+2\gamma-\beta}{3}\right) rad/rev. \tag{2.4}$$

Las medidas actuales de la precesión del perihelio de Mercurio dan

$$\Delta\phi_{exp} = (42.97 \pm 0.04)''/siglo = \Delta\phi_{GR}\,(1.0002 \pm 0.0009) \tag{2.5}$$

con lo que para el caso de la teoría de Brans-Dicke tenemos

$$\left(\frac{2+2\gamma-\beta}{3}\right) rad/rev = \frac{3\omega+4}{3\omega+6} = 1.0002 \pm 0.0009 \tag{2.6}$$

que constituye una fuerte cota sobre el parámetro ω.

2.4 El retraso en el eco de radar

Irwin Shapiro predijo que las ondas de luz (o cualquier tipo de onda electromagnética) sufrirían un retraso al atravesar un campo gravitacional. Las ondas se verían "obligadas" a seguir curvas en el espacio-tiempo que harían que su camino fuera mas largo de lo esperado, lo que produciría un retraso en el tiempo de transmisión. Calculemos el retraso sufrido por una onda de radio

que viaja desde la tierra a una cierta sonda situada en conjunción superior, es reflejada y vuelve por el mismo camino, despreciando el efecto de la deflexión gravitacional de la luz. Tomemos coordenadas isotrópicas cartesianas en el desarrollo de Eddington

$$ds^2 = -B(\rho)dt^2 + A(\rho)d\mathbf{x}^2 \tag{2.7}$$

donde $\rho = (x^2 + r_0^2)$ es la coordenada radial isotrópica entre la tierra y el Sol, $\rho_\oplus$, o la sonda y el Sol, ρ_s. Supongamos $dy = dz = 0$. Un fotón viajando a lo largo de una geodésica tardará un tiempo

$$ct = \int_{-x_s}^{x_\oplus} \sqrt{\frac{A(\rho)}{B(\rho)}} = x_s + x_\oplus + \left(\frac{1+\gamma}{2}\right)\frac{2GM}{c^2}\ln\left(\frac{(x_\oplus + \sqrt{x_\oplus^2 + r_0^2})(x_s + \sqrt{x_s^2 + r_0^2})}{r_0^2}\right) \tag{2.8}$$

en recorrer el camino de ida. Evidentemente tardará el doble de tiempo en recorrer el camino de ida y de vuelta, siempre y cuando los planetas no se muevan. Si le restamos la predicción correspondiente al espacio de Minkowski se tiene

$$\Delta t = \left(\frac{1+\gamma}{2}\right)\frac{4GM}{c^2}\ln\left(\frac{4x_s x_\oplus}{r_0^2}\right) \tag{2.9}$$

Las medidas mas recientes de este efecto se han obtenido utilizando la sonda Cassini, cuando esta, en su viaje hacia Saturno, pasaba por conjunción superior el 21 de Junio de 2002. La cota obtenida fue

$$\gamma - 1 = (2.1 \pm .3) \times 10^{-5} \qquad (1\sigma), \tag{2.10}$$

lo que implica

$$\omega > 50,000, \tag{2.11}$$

que constituye la mayor cota obtenida para el parámetro ω hasta la fecha. Se espera que sea superada, al menos en un orden de magnitud en la próxima década.

2.5 El efecto Lense-Thirring en las teorías escalar tensor

El efecto Lense-Thirring es uno de los efectos más curiosos que predice la relatividad general. Este efecto también es predicho por la teoría de Brans-Dicke, y en principio los experimentos podrían permitirnos discernir cual de las dos opciones es la correcta. Antes de mostrar los resultados que se obtienen en la teoría de Brans-Dicke para el efecto Lense-Thirring pienso que sería conveniente recordar este efecto en relatividad general. En la aproximación de campo débil en relatividad general asumimos:

$$\Box\overline{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \tag{2.12}$$

donde $\overline{h}^\mu_\nu = h^\mu_\upsilon - \frac{1}{2}\delta^\mu_\nu h$ y donde estamos tomando el gauge armónico usual $\left(h^\mu_\upsilon - \frac{1}{2}\delta^\mu_\nu h\right)_{,\mu} = 0$. Si asumimos una distribución de materia no relativista con una densidad ρ y un campo de velocidades $\overrightarrow{v}$, la ecuación (2.12) nos da:

$$\Box\overline{h}_{00} = -\frac{16\pi G}{c^2}\rho \tag{2.13}$$

$$\Box\overline{h}_{0i} = \frac{16\pi G}{c^3}\rho v_i \tag{2.14}$$

donde v_i denota las componentes de la velocidad, y donde se han despreciado términos como p y $v_i v_j/c^4$. Fijémonos ahora en el caso particular de un campo gravitacional estacionario asociado a un cuerpo en rotación lenta. Las ecuaciones (2.13) y (2.14) se reducen entonces a

$$\nabla^2\left(\frac{c^2\overline{h}_{00}}{4}\right) \equiv \nabla^2(\varphi_g) = -4\pi G\rho \tag{2.15}$$

$$\nabla^2\overline{h}_{0i} = \frac{16\pi G}{c^3}\rho v_i \tag{2.16}$$

donde φ_g es el potencial gravitoeléctrico. Lejos de la fuente tendremos:

$$\Phi_g = \frac{GM}{r} \tag{2.17}$$

$$\overrightarrow{\overline{h}} = -\frac{2G(\overrightarrow{J}\times\overrightarrow{r})}{c^3 r^3} \equiv -\frac{2\overrightarrow{A}_g}{c^2} \tag{2.18}$$

donde $\overrightarrow{A}_g$ es el potencial vector gravitomagnético, $\overline{h}_{0i}$ son las componentes del vector $\overrightarrow{\overline{h}}$, y M y $\overrightarrow{J}$ son las masa y el momento angular de la fuente. En analogía con la electrodinámica definimos el campo gravitoeléctrico como $\overrightarrow{E_g} = -\nabla\Phi_g$ y el campo gravitomagnético como:

$$\overrightarrow{B}_g = \overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{A}_g = \frac{G}{c}\left[\frac{3\widehat{r}(\widehat{r}\cdot\overrightarrow{J}) - \overrightarrow{J}}{r^3}\right] \tag{2.19}$$

Es interesante darse cuenta de que la condición $\overline{h}^{\mu\nu}{}_{,\mu} = 0$ nos lleva directamente a $\nabla\cdot\overrightarrow{A}_g = 0$ (que es análogo al gauge de Coulomb del electromagnetismo).

En la teoría de Brans-Dicke las ecuaciones del campo estan dadas por (incluimos la velocidad de la luz c):

$$G_{\mu\upsilon} = \frac{8\pi G}{c^4\Phi}T^M_{\mu\nu} + \frac{\omega}{\Phi^2}\left(D_\mu\Phi D_\nu\Phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\,\Box\Phi\right) + \frac{1}{\Phi}(D_\mu D_\nu\Phi - g_{\mu\nu}\Box\Phi) \tag{2.20}$$

Al igual que hicimos en relatividad general podemos linearizar las ecuaciones de los campos de Brans-Dicke asumiendo que tanto la métrica $g_{\mu\nu}$ como el campo escalar Φ se pueden escribir como $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\upsilon}$ y $\Phi = \Phi_0 + \delta\Phi$, donde Φ_0 es una constante y $\delta\Phi = \delta\Phi(x)$ es un término a primer orden (se asume que tanto $|h_{\mu\upsilon}|$ como $\left|\delta\Phi\Phi_0^{-1}\right|$ son $\ll 1$). Bajo estas hipótesis :

$$\Box h_{\mu\nu} = -\frac{16\pi}{c^4\Phi_0}\left[T_{\mu\upsilon} - \frac{\omega+1}{2\omega+3}\eta_{\mu\nu}T\right] \tag{2.21}$$

donde hemos usado el gauge de Brans-Dicke

$$\left(h^\mu_\upsilon - \frac{1}{2}\delta^\mu_\nu h\right),\mu = \delta\Phi,_\upsilon\,\Phi_0^{-1}. \tag{2.22}$$

El problema de encontrar las soluciones a las ecuaciones de Brans-Dicke en la aproximación de campo débil se puede reducir por tanto a resolver las ecuaciones de Eistein linearizadas para el mismo tensor energia-momento [11]. De hecho, si $g^*_{\mu\nu}(G,x)$ es una solución conocida de las ecuaciones de Einstein en la aproximación de campo débil para un $T_{\mu\upsilon}$ dado, entonces,

la correspondiente solución para el mismo $T_{\mu\upsilon}$ vendrá dada en la aproximación de campo débil por

$$g_{\mu\upsilon}(x) = [1 - \delta\Phi G_0] g^*_{\mu\nu}(G_0, x) \tag{2.23}$$

donde G es la contante gravitacional, $G_0 = \Phi_0^{-1} = \left(\frac{2\omega+3}{2\omega+4}\right) G$ y la función $\delta\Phi(x)$ es una solución de la ecuación:

$$\Box\delta\phi = \frac{8\pi T}{c^4(2\omega+3)} \tag{2.24}$$

Definiendo $\overline{h}_{\mu\nu}$ como

$$\overline{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\upsilon} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\upsilon}h - \delta\Phi G_0\eta_{\mu\upsilon} \tag{2.25}$$

Es fácil ver de (2.21) que

$$\Box\overline{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G_0}{c^4}T_{\mu\nu} \tag{2.26}$$

Por tanto, en analogía con el caso de relatividad general si nos restringimos de nuevo al caso de fuentes estacionarias en movimiento lento, llegamos a:

$$\overline{h}_{00} \equiv \frac{4\varphi_g^{BD}}{c^2} = \frac{4G_0M}{c^2r}$$

$$\overrightarrow{\overline{h}} = -\frac{2G_0(\overrightarrow{J} \times \overrightarrow{r})}{c^3r^3} \equiv -\frac{2\overrightarrow{A}_g^{BD}}{c^2}$$

Definimos al igual que antes el campo gravitoeléctrico como $\overrightarrow{E_g}^{BD} = -\nabla\varphi_g^{BD}$ y el campo gravitomagnético como

$$\overrightarrow{B}_g^{BD} = \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A}_g^{BD} = \frac{G_0}{c}\left[\frac{3\widehat{r}(\widehat{r}\cdot\overrightarrow{J}) - \overrightarrow{J}}{r^3}\right] \tag{2.27}$$

Una vez introducidos los campos gravitomagnéticos en la teoría de Brans-Dicke, pasemos a estudiar el conocido como efecto Lense-Thirring. Como es sabido, el efecto Lense-Thirring consiste en la recesión de un giróscopo relativo a las estrellas distantes, o alternativamente, un " frame dragging" (no he encontrado una traducción, lo usaré así). Si denotamos el momento angular y la velocidad de precesión por $\overrightarrow{S}$ y $\overrightarrow{\Omega}$ respectivamente, entonces, el torque que actúa sobre el giróscopo predicho por la Relatividad General será

$$\overrightarrow{\tau} = \frac{1}{2}\overrightarrow{S} \times \left(-\frac{2}{c^2}\overrightarrow{B}_g\right) = \frac{d\overrightarrow{S}}{dt} = \overrightarrow{\Omega} \times \overrightarrow{S} \tag{2.28}$$

donde

$$\overrightarrow{\Omega} = \frac{1}{c^2}\overrightarrow{B}_g = G\left(\frac{3\widehat{r}(\widehat{r}\cdot\overrightarrow{J}) - \overrightarrow{J}}{c^3r^3}\right) \tag{2.29}$$

Por tanto en la teoría de Brans-Dicke la ecuación (2.29)se convierte en:

$$\overrightarrow{\Omega}^{BD} = \frac{1}{c^2}\overrightarrow{B}_g^{BD} = G_0\left(\frac{3\widehat{r}(\widehat{r}\cdot\overrightarrow{J}) - \overrightarrow{J}}{c^3r^3}\right) \tag{2.30}$$

Para comparar el valor de Ω predicho por la Relatividad General, con Ω^{BD}, predicho por la teoría de Brans-Dicke, debemos obtener, como ya viene siendo habitual, valores para ω. Según

las medidas realizadas con VLBI $\omega = 3500$ (siendo muy optimistas, como sabemos por las cotas de Cassini $\omega > 50,000$). Para una orbita polar a 650 Km de altura la precesión predicha para el eje del giróscopo es de 42 milisegundos de arco por año. La precisión esperada para los experimentos bajo esas condiciones (Gravity Probe B) está en torno a los 0.5 milisegundos de arco por año. Dado que $G_0 = \left(\frac{2\omega+3}{2\omega+4}G\right)$, el valor predicho por la teoría de Brans-Dicke es:

$$\Omega^{BD} = \frac{7003}{7004}\Omega \simeq 41.99 \text{ milisegundos de arco por año.} \tag{2.31}$$

Es decir, con la precisión actual de este tipo de experimentos nos es imposible diferenciar una teoría de otra.

2.6 Cotas experimentales en el regimen de campo débil: Resumen de la situación actual

Como vimos la teoría de Brans-Dicke es una teoría basada en un único parámetro definido por una función de acoplo lineal, $a(\varphi) = \alpha_0\,\varphi$. Actualmente el tratamiento es más general que el expuesto hasta este momento. Se consideran teorías escalar-tensor de la gravitación en las cuales la función de acoplo no es lineal,

$$a(\varphi) = a_0 + \alpha_0(\varphi - \varphi_0) + \frac{1}{2}\beta_0(\varphi - \varphi_0)^2 \tag{2.32}$$

donde $\alpha_0 \equiv \alpha(\varphi_0)$ y $\beta(\varphi) \equiv \frac{\partial\alpha(\varphi)}{\partial\varphi}$, evaluada en φ_0. Escrito en términos de $\alpha(\varphi)$

$$\alpha(\varphi) = \alpha_0 + \beta(\varphi - \varphi_0) + \beta^{(2)}(\varphi - \varphi_0)^2 + \cdots , \tag{2.33}$$

Se ha demostrado [38] [39] que las aproximaciones post-newtonianas de la relatividad general se pueden expresar en términos de los valores de $\alpha(\varphi)$ y de sus derivadas sucesivas, empezando con $\beta(\varphi) \equiv \frac{\partial\alpha(\varphi)}{\partial\varphi}$,

$$a(\varphi) = a_0 + \alpha_0(\varphi - \varphi_0) + \frac{1}{2}\beta_0(\varphi - \varphi_0)^2 \tag{2.34}$$

donde $\alpha_0 \equiv \alpha(\varphi_0)$ and $\beta_0 \equiv \beta(\varphi_0)$. En concreto puede demostrarse que los parámetros postnewtonianos γ^{PPN} y β^{PPN} se expresan en términos de α_0 y β_0 como

$$\gamma^{\rm PPN} - 1 = -\frac{2\alpha_0^2}{1+\alpha_0^2}\,, \qquad \beta^{\rm PPN} - 1 = \frac{1}{2}\,\frac{\alpha_0\beta_0\alpha_0}{(1+\alpha_0^2)^2}\,. \tag{2.35}$$

El factor α_0^2 viene de considerar el intercambio de una partícula escalar entre dos cuerpos, mientras que el término $\alpha_0\beta_0\alpha_0$ viene del intercambio de un escalar entre tres cuerpos. El caso $\beta_0 = 0$ se reduce a la teoría de Brans-Dicke con parámetro $2\omega + 3 = 1/\alpha_0^2$.

Los experimentos realizados en el sistema solar imponen restricciones muy fuertes a los valores que pueden tomar los parámetros postnewtonianos γ^{PPN} y β^{PPN} (y con ello el valor de ω en la teoría de Brans-dicke). Los resultados obtenidos en dichos experimentos se muestran en la tabla 2.1 y en la figura 2.1.

Experimento	Cota experimental
Precesión del perihelio	$\lvert 2\,\gamma^{\rm PPN} - \beta^{\rm PPN} - 1\rvert < 3 \times 10^{-3}$
Lunar Laser Ranging	$4\beta^{\rm PPN} - \gamma^{\rm PPN} - 3 = (-0.7 \pm 1) \times 10^{-3}$
VLBI	$\lvert\gamma^{\rm PPN} - 1\rvert < 4 \times 10^{-4}$
Sonda Cassini	$\gamma^{\rm PPN} - 1 = (2.1 \pm 2.3) \times 10^{-5}$

Table 2.1: Ligaduras impuestas por los experimentos en el sistema solar a los parámetros γ^{PPN} y β^{PPN}.

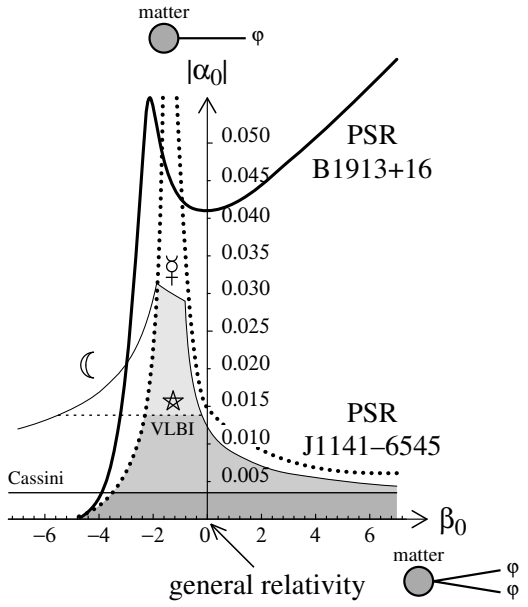

Figure 2.1: Ligaduras impuestas por los experimentos en el sistema solar y en el pulsar binario a la función de acoplo campo-materia $\ln A(\varphi) = \alpha_0(\varphi - \varphi_0) + \frac{1}{2}\beta_0(\varphi - \varphi_0)^2 + \mathcal{O}(\varphi - \varphi_0)^3$. La región permitida se muestra sombreada. El eje vertical ($\beta_0 = 0$) corresponde a la teoría de Brans-Dicke con parámetro $2\omega + 3 = 1/\alpha_0^2$. En eje horizontal ($\alpha_0 = 0$) corresponde a las teorias que son perturvativamente equivalentes a GR, es decir, que predicen no desviación de la misma (a cualquier orden $1/c^n$) en las condiciones de campo débil del sistema solar.

Chapter 3

Regimen de campo fuerte: el pulsar binario y la producción de ondas gravitacionales

"It is the nature of all greatness not to be exact"
Edmund Burke,1774

3.1 Introducción

En el capítulo anterior analizamos las consecuencias de las teorías escalar-tensor en la aproximación de campos poco intensos y velocidades pequeñas, es decir, en lo que se conoce como régimen de campo débil. El objetivo de este capítulo es analizar las consecuencias de estas teorías en la aproximación relativista o regimen de campo fuerte. Comenzaré analizando los distintos tipos de ondas gravitacionales (polarizaciones) permitidos en las teorías escalar-tensor, para pasar posteriormente a analizar los procesos en los cuales dichas ondas gravitacionales pueden ser producidas. En concreto, estudiaré los colapsos esféricos de tipo Oppenheimer-Snyder y el pulsar binario, poniendo especial énfasis en las cotas experimentales que proporcionan este tipo de sistemas.

3.2 Ondas escalares en la teoría escalar tensor

Las ondas gravitacionales son ondas en el espacio-tiempo producidas por eventos violentos en el universo. Son emitidas por masas aceleradas, del mismo modo que una carga acelerada emite ondas electromagnéticas. Albert Einstein predijo la existencia de ondas gravitacionales en 1916, pero sólo a partir de 1990 la tecnología llegó a estar lo suficientemente desarrollada como para permitir su detección, aunque fuera de manera indirecta, a través del pulsar binario. El descubrimiento de dicho pulsar brindó a sus descubridores, Taylor y Hulse, un premio Nóbel en 1993.

La teoría de la Relatividad General de Einstein predice dos polarizaciones para las ondas gravitacionales, los modos + y $\times$. La diferencia fundamental entre la Relatividad General y las teorías escalar-tensor es que en esta última, además de los modos tensoriales, aparece un modo escalar que se propaga como una onda gravitacional.

Consideremos perturbaciones lineales de la métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ y de un campo escalar constante Φ_0.

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \tag{3.1}$$
$$\Phi = \Phi_0 + \delta\Phi. \tag{3.2}$$

A lo largo de esta sección utilizaremos la metrica plana $\eta^{\mu\nu}$ and $\eta_{\mu\nu}$ para subir y bajar índices. Las ecuaciones de campo se escriben en esta aproximación:

$$\frac{1}{2}(h_{\mu}{}^{\alpha}{}_{,\nu\alpha} + h_{\nu}{}^{\alpha}{}_{,\mu\alpha} - h_{\mu\nu}{}^{,\alpha}{}_{\alpha} - h_{,\mu\nu}) - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}(h_{\alpha\beta}{}^{,\alpha\beta} - h_{,\alpha}{}^{\alpha}) = \frac{8\pi}{\Phi_0}T_{\mu\nu} + \frac{1}{\Phi_0}(\delta\Phi_{,\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\Box\delta\Phi), \tag{3.3}$$
$$\Box\delta\Phi = \frac{8\pi}{3+2\omega}T, \tag{3.4}$$

donde $\omega \equiv \omega(\Phi_0)$ and $h \equiv h_{\alpha}{}^{\alpha}$. Introduciendo:

$$\theta_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} + \frac{\delta\Phi}{\Phi_0}\eta_{\mu\nu}. \tag{3.5}$$

las ecuaciones (3.3) y (3.4) se convierten en:

$$\theta_{\mu\alpha,\nu}{}^{\alpha} + \theta_{\nu\alpha,\mu}{}^{\alpha} - \theta_{\mu\nu}{}^{,\alpha}{}_{\alpha} - \theta_{,\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}(\theta_{\alpha\beta}{}^{,\alpha\beta} - \theta_{,\beta}{}^{\beta}) = \frac{16\pi}{\Phi_0}T_{\mu\nu}, \tag{3.6}$$
$$\Box\delta\Phi = \frac{8\pi}{3+2\omega}T, \tag{3.7}$$

donde $\theta \equiv \theta_{\alpha}{}^{\alpha}$. Definimos ahora $\bar{\theta}_{\mu\nu}$ y $\bar{h}_{\mu\nu}$ como:

$$\bar{\theta}_{\mu\nu} \equiv \theta_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\theta, \tag{3.8}$$

y

$$\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h. \tag{3.9}$$

Usando el gauge de Brans-Dicke:

$$\bar{h}^{\mu\alpha}{}_{,\alpha} = \frac{\delta\Phi^{,\mu}}{\Phi_0}. \tag{3.10}$$

las ecuaciones de campo se escriben:

$$\Box\bar{\theta}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi}{\Phi_0}T_{\mu\nu}, \tag{3.11}$$
$$\Box\delta\Phi = \frac{8\pi}{3+2\omega}T. \tag{3.12}$$

ecuaciones, que en ausencia de materia, son ecuaciones de onda. Podemos usar el resto de grados de libertad para hacer que $\bar{\theta}_{\mu\nu}$ sea transverso y sin traza. Entonces, las perturbaciones pueden separarse en el modo + , el modo × y el modo escalar. La forma de la perturbación métrica de la onda plana se escribe

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{\delta\phi}{\phi_0}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.13}$$

donde h_+, $h_\times$ representan los modos + y $\times$, respectivamente. Nótese que la expresión (3.13) tiene la forma:

$$h_{\mu\nu} = h^{GR}_{\mu\nu} - \frac{\delta\phi}{\phi_0}\eta_{\mu\nu} \tag{3.14}$$

donde $h^{GR}_{\mu\nu}$ es la perturbación que aparece en relatividad general y $\eta_{\mu\nu}$ en la métrica de Minkowski. La teoría de Brans-Dicke predice por tanto la existencia de ondas escalares, a diferencia de la relatividad general donde sólo nos encontrabamos polarizaciones $\times$ y + (Veáse la figura 3.1) .

3.3 Ondas gravitacionales escalares en colapsos tipo Oppenheimer-Snyder

A diferencia de la Relatividad General, las teorías escalar-tensor predicen ondas gravitacionales escalares incluso en el caso de un colapso gravitacional esfericamente simétrico. La detección de ondas gravitacionales escalares podría constituir no sólo una revolución en el marco teórico sino que abriría una nueva ventana a la astrofísica pues permitiría conocer el radio inicial y la masa de la estrella.

Como vimos en el capítulo anterior el tratamiento actual de las teorías escalar-tensor considera teorías funciónes de acoplo no lineales

$$a(\varphi) = a_0 + \alpha_0(\varphi - \varphi_0) + \frac{1}{2}\beta_0(\varphi - \varphi_0)^2 \tag{3.15}$$

donde $\alpha_0 \equiv \alpha(\varphi_0)$ y $\beta(\varphi) \equiv \frac{\partial\alpha(\varphi)}{\partial\varphi}$, evaluada en φ_0. Escrito en términos de $\alpha(\varphi)$

$$\alpha(\varphi) = \alpha_0 + \beta(\varphi - \varphi_0) + \beta^{(2)}(\varphi - \varphi_0)^2 + \cdots, \tag{3.16}$$

En todo lo que sigue asumiré que nos encontramos en el frame de Einstein. Asumamos que $|\alpha_0| \ll 1$ (aunque esto pueda excluir efectos no perturbativos interesantes), y expandamos el tensor métrico, el campo escalar y el tensor energía momento en términos de α_0,

$$T_{\alpha\beta} = T^{(E)}_{\alpha\beta} + \alpha_0 t^{(1)}_{\alpha\beta} + \alpha_0^2 t^{(2)}_{\alpha\beta} + O(\alpha_0^3), \tag{3.17}$$

$$g_{\alpha\beta} = g^{(E)}_{\alpha\beta} + \alpha_0 h^{(1)}_{\alpha\beta} + \alpha_0^2 h^{(2)}_{\alpha\beta} + O(\alpha_0^3), \tag{3.18}$$

$$\varphi = \varphi_0 + \alpha_0\varphi^{(1)} + \alpha_0^2\varphi^{(2)} + O(\alpha_0^3). \tag{3.19}$$

De la ecuación (1.26) obtenemos, para el orden más bajo en α_0,

$$G^{(E)}_{\alpha\beta} = 8\pi T^{(E)}_{\alpha\beta}. \tag{3.20}$$

Lo que significa que $g^{(E)}_{\alpha\beta}$ y $T^{(E)}_{\alpha\beta}$ son las soluciones en Relatividad General. Para el siguiente orden en α_0 se tiene,

$$G^{(1)}_{\alpha\beta} = 8\pi t^{(1)}_{\alpha\beta}. \tag{3.21}$$

que también tiene la misma forma que las ecuaciones de Einstein, de forma que la métrica de las teorías escalar-tensor se desvía de la Relatividad General en $O(\alpha_0^2)$; por tanto, podemos determinar el campo escalar hasta O(α_0) resolviendo la ecuación de onda para el campo escalar.

$$\Box^{(E)}\varphi = -4\pi\alpha(\varphi)T^{(E)}. \tag{3.22}$$

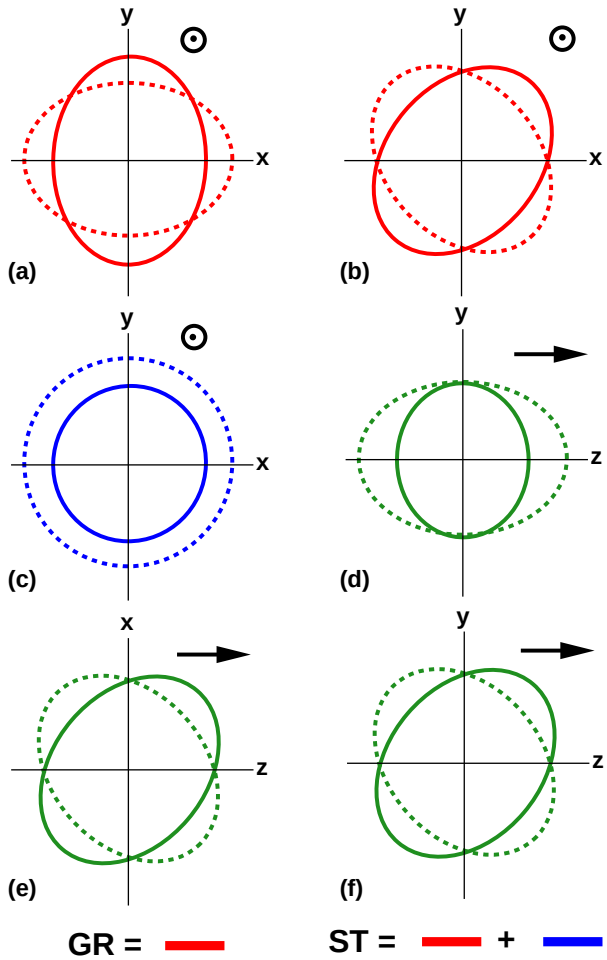

Figure 3.1: En cualquier teoría métrica de la gravedad existen seis polarizaciones distintas para las ondas gravitacionales planas. La figura superior muestra el desplazamiento que produce cada modo sobre un anillo de partículas prueba. Las ondas se propagan en la dirección $+z$ y no existe desplazamiento fuera del plano de la figura. En (a), (b) y (c), la onda se propaga fuera del plano; en (d), (e), y (f), lo hace en el plano. En la Relatividad General, solamente aparecen los modos (a) y (b) que corresponden a las polarizaciones + y $\times$ respectivamente ; sin embargo, en las teorías escalar-tensor el modo escalar (c) también está presente.

Supongamos el colapso de una nube de polvo esféricamente simétrica y homogénea. La conocida como solución de Oppenheimer-Snyder describe este tipo de collapso. En el interior de dicha esfera de polvo el elemento de línea se puede escribir en la forma (Friedmann):

$$\begin{aligned} ds^2 &= -d\tau^2 + a(\tau)^2(d\chi^2 + \sin^2\chi d\Omega^2) && (3.23)\\ &= a(\eta)^2(-d\eta^2 + d\chi^2 + \sin^2\chi d\Omega^2), && (3.24)\\ d\Omega^2 &= d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2, && (3.25) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} a(\eta) &= \frac{1}{2}a_0(1+\cos\eta), && (3.26)\\ \tau(\eta) &= \frac{1}{2}a_0(\eta+\sin\eta). && (3.27) \end{aligned}$$

La densidad de la nube de polvo viene dada por

$$\rho(\eta) = \frac{3a_0}{8\pi}a^{-3} = \frac{3}{8\pi a_0{}^2}\left\{\frac{1}{2}(1+\cos\eta)\right\}^{-3}. \tag{3.28}$$

Los rangos de variación de η and χ son

$$0 \le \eta < \pi, \tag{3.29}$$

y

$$0 \le \chi \le \chi_0 < \frac{\pi}{2}. \tag{3.30}$$

Sea $r_s(t)$ el radio de la superficie estelar. En el exterior de la nube de polvo ($r > r_s(t)$), el espacio-tiempo se expresa, como sabemos, por la métrica de Schwarzschild:

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega^2. \tag{3.31}$$

Las condiciones de empalme entre el interior y el exterior estelar son tales que los radios en ambas métricas sean iguales y que la superficie estelar se mueva en una geodésica. Dichas condiciones son:

$$\begin{aligned} r_s &= a(\eta)\sin\chi_0, && (3.32)\\ M &= \frac{1}{2}a_0\sin^3\chi_0, && (3.33)\\ t &= 2M\ln\left|\frac{\left(\frac{r_{s0}}{2M}-1\right)^{\frac{1}{2}}+\tan\frac{\eta}{2}}{\left(\frac{r_{s0}}{2M}-1\right)^{\frac{1}{2}}-\tan\frac{\eta}{2}}\right| \\ &\quad +2M\left(\frac{r_{s0}}{2M}-1\right)^{\frac{1}{2}}\left[\eta+\left(\frac{r_{s0}}{4M}\right)(\eta+\sin\eta)\right], && (3.34) \end{aligned}$$

donde $r_{s0} \equiv r_s(t=0)$.

Reescribamos la ecuación (3.22) en el marco de un colapso del tipo Oppenheimer-Snyder usando las métricas (3.25) y (3.31). La ecuación de onda en el interior de la nube ($0 \le \chi \le \chi_0$) será

$$\frac{1}{a^2}\left\{-\frac{1}{a^2}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(a^2\frac{\partial\delta\varphi}{\partial\eta}\right)+\frac{1}{\sin^2\chi}\frac{\partial}{\partial\chi}\left(\sin^2\chi\frac{\partial\delta\varphi}{\partial\chi}\right)\right\} = 4\pi\alpha(\varphi)\rho, \tag{3.35}$$

mientras que el exterior ($r > r_s(t)$) vendrá dada por

$$-\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\frac{\partial^2\delta\varphi}{\partial t^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left\{r^2\left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{\partial\delta\varphi}{\partial r}\right\}=0. \tag{3.36}$$

Definamos ahora una variable ζ en lugar de $\delta\varphi$ como

$$\zeta \equiv a\sin\chi\delta\varphi \quad (interior) \tag{3.37}$$

$$\zeta \equiv r\delta\varphi \quad (exterior).$$

Sustituyendo esta nueva variable en las ecuaciones (3.35) y (3.36), se tiene

$$-\frac{\partial^2\zeta}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial\chi^2}=-\left(1+\frac{a''}{a}\right)\zeta+4\pi\alpha(\varphi)\rho a^3\sin\chi \quad \text{(interior)}, \tag{3.38}$$

$$-\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial r_*^2}=\frac{2M}{r^3}\left(1-\frac{2M}{r}\right)\zeta \quad \text{(exterior)}, \tag{3.39}$$

donde r_* es una coordenada relentizada definida de forma similar a lo que hacíamos con las coordenadas de Eddington-Filkelstein.

$$r_* = r+2M\ln\left(\frac{r}{2M}-1\right), \tag{3.40}$$

Introduciendo ahora las coordenadas "nulas"

$$u = \eta-\chi, \tag{3.41}$$

$$v = \eta+\chi, \tag{3.42}$$

para el interior y

$$\tilde{u} = t-r_*, \tag{3.43}$$

$$\tilde{v} = t+r_*, \tag{3.44}$$

en el exterior, y utilizando (3.28) para reescribir ρ, se tiene

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial u\partial v}=\frac{1}{4}\left(1+\frac{a''}{a}\right)\zeta-\frac{3}{8}\alpha(\varphi)a_0\sin\chi \quad \text{(interior)}, \tag{3.45}$$

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial\tilde{u}\partial\tilde{v}}=-\frac{M}{2r^3}\left(1-\frac{2M}{r}\right)\zeta \quad \text{(exterior)}, \tag{3.46}$$

Resta definir las condiciones de contorno del problema. La condición para el centro de la nube de polvo será exigir que la derivada del campo escalar en la dirección radial sea cero, es decir,

$$\frac{\partial\delta\varphi}{\partial\chi}=0 \quad \text{at} \quad \chi=0. \tag{3.47}$$

En la superficie estelar el campo φ y su derivada en la dirección normal a la frontera deben ser contínuas,

$$\delta\varphi|_{in} = \delta\varphi|_{ex}, \tag{3.48}$$

$$n^\mu\delta\varphi_{,\mu}|_{in} = n^\mu\delta\varphi_{,\mu}|_{ex}, \tag{3.49}$$

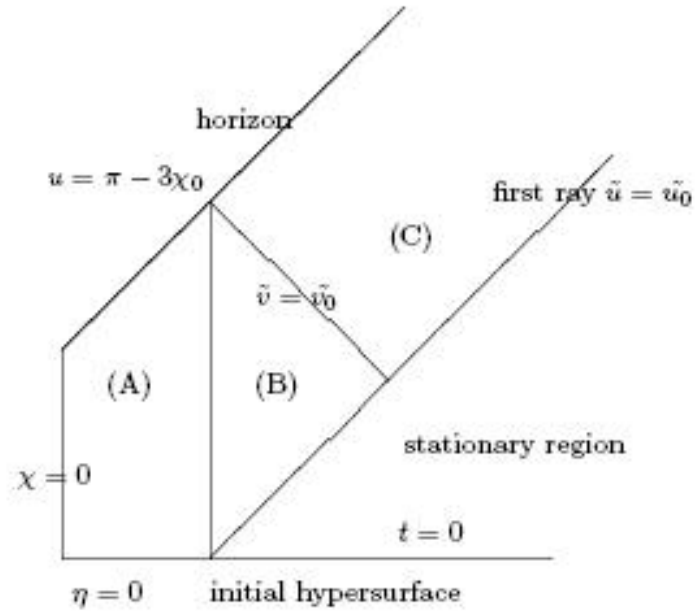

Figure 3.2: Regiones del espacio-tiempo de Oppenheimer-Snyder para θ y ϕ constantes , expresadas en coordenadas características.

en $\chi = \chi_0$ (interior) y $r = r_s(t)$ (exterior), donde n^μ es el vector normal a la frontera. Por simplicidad tomaremos la condición inicial $\varphi = \varphi_0$ y que la derivada temporal de φ se anula en la hipersuperficie inicial $\eta = 0$ $t = 0$. Por tanto, en el interior de la nube se tendrá

$$\delta\varphi = 0, \tag{3.50}$$

$$\frac{\partial \delta\varphi}{\partial \eta} = 0, \tag{3.51}$$

at $\eta = 0$, y en el exterior

$$\delta\varphi = 0, \tag{3.52}$$

$$\frac{\partial \delta\varphi}{\partial t} = 0. \tag{3.53}$$

Desde un punto de vista físico podemos pensar que estas son las condiciones iniciales de una estrella altamente relativista en equilibrio hidrodinámico, en la cual, en un cierto momento t=0, "desconectamos" la presión interna, con lo que dicha estrella empieza a colapsar[1].

Veamos cuales son los resultados numéricos. Para ello dividamos el espacio-tiempo de Oppenheimer-Snyder en tres regiones (A),(B) y (C) tal y como se muestra en la figura 3.2 y siguiendo a Cunningham, Price y Moncrief.

En la figura 3.3 se muestra la forma de la onda gravitacional escalar para $r = 100M$ en la teoría de Brans-Dicke desde el colapso de una nube de polvo con radio inicial $r_{s0} = 10M$. El eje de ordenadas es $\zeta = r\delta\varphi$. La solución es proporcional al parámetro α_0 y por eso normalizamos

[1]Consultense apuntes de Astrófisica Estelar de cualquier otra universidad

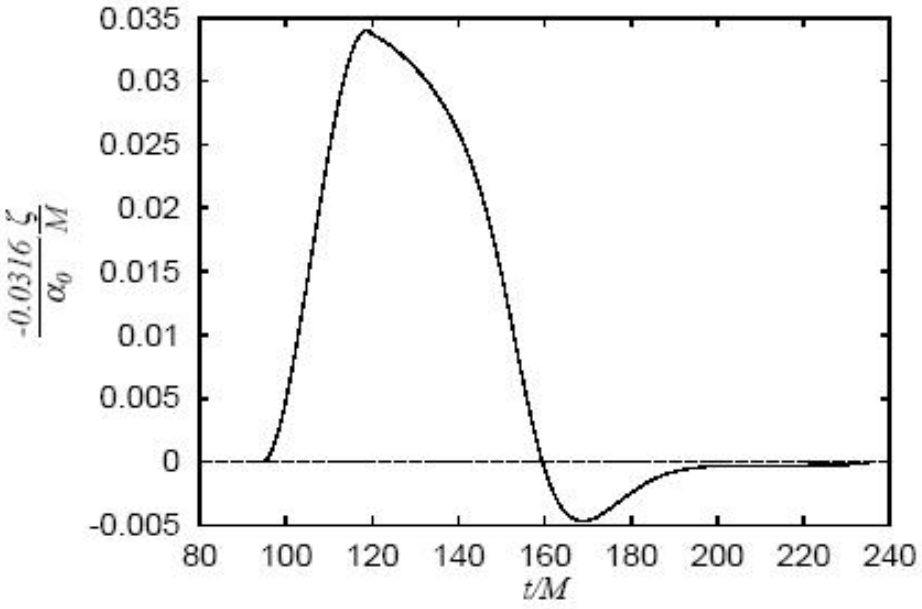

Figure 3.3: Forma de una onda gravitacional escalar para $r = 100M$. El radio inicial se tomo $r_{s0} = 10M$. La ordenada es $\zeta = r\delta\varphi$. La abscisa representa el tiempo t desde el inicio del colapso en $t = 0$.

ζ como $\alpha_0 = -0.0316$ correspondiente a $\omega = 500$ [2]. Puede verse que el campo escalar alcanza un valor máximo La amplitud de este pico puede estimarse como [29]

$$\delta\varphi \sim \frac{\alpha_0 M}{r}. \tag{3.54}$$

Después de alcanzar dicho máximo el campo escalar decrece por debajo de su valor asintótico φ_0 para aumentar después de forma monótona de nueva hacia el valor φ_0.

La figura 3.4 muestra el campo escalar en el interior de la nube de polvo. El radio inicial es r_{s0} es 10M. Las abscisas son las coordenadas nulas $u = \eta - \chi$ and $v = \eta + \chi$.

La figura 3.5 muestra la evolución temporal del campo escalar vista por un observador comovil. La abscisa es el tiempo conforme η y los números que aparecen en las curvas son los valores de las coordenadas radiales fijas χ de los observadores comoviles.

En la figura 3.6 se muestra la evolución temporal de la configuración inicial del campo escalar en la hipersuperficie en el tiempo conforme $\eta = const.$ La abscisa es la coordenada radial χ y los números de cada curva son los valores de η.

Como ya se mencionó, a $\eta = 0$ el campo escalar es φ_0, es decir, $\zeta = 0$ en todo lugar. Posteriormente φ aumenta homogeneamente en la región central ($u \sim v$) debido a que la fuente del campo escalar es la bola de polvo homogénea y la información de la superficie aún no ha llegado a la región central en las primeras etapas. Dicha información se propaga hacia el interior a la velcidad de la luz y alcanza el centro en un tiempo $\eta = \chi_0$. Después de la reflexión, la configuración de la masa de polvo en el interior alcanza un estado *cuasiestático* y el campo

[2] La cota es antigua, pero puesto que el tratamiento original es numérico no he repetido los cálculos. De todas formas la importancia es relativa, pues es un factor de escala.

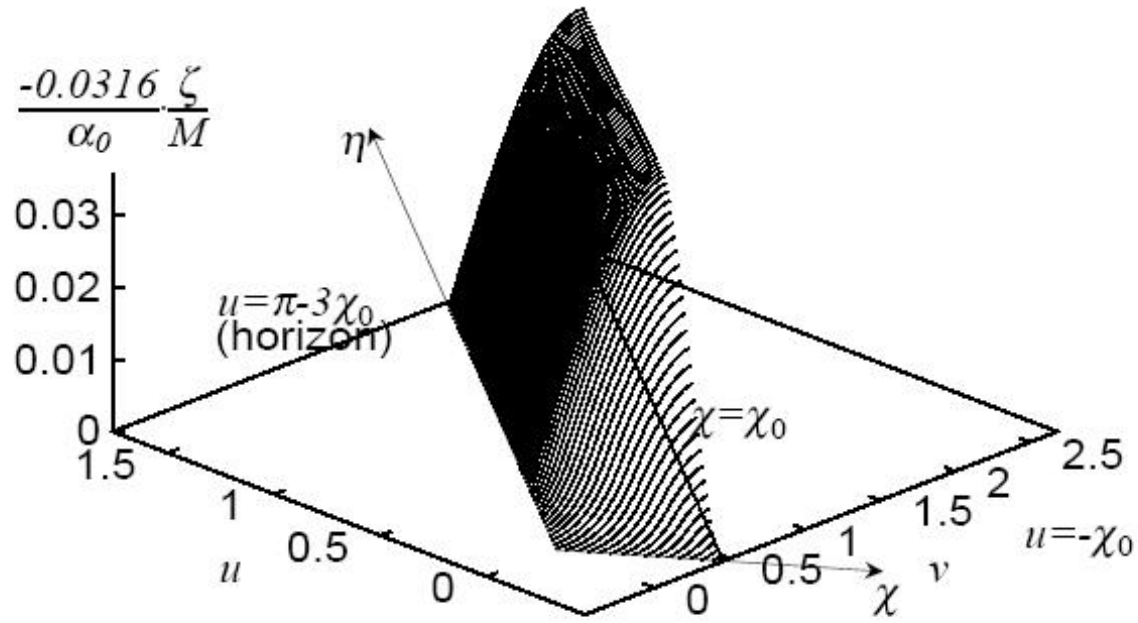

Figure 3.4: El campo escalar en el interior de la nube de polvo en la teoría de Brans-Dicke El radio inicial r_{s0} es $10M$. (a) La ordenada es $\zeta = a \sin\chi\delta\varphi$. Las abscisas son las coordenadas "nulas" $u = \eta - \chi$ y $v = \eta + \chi$.

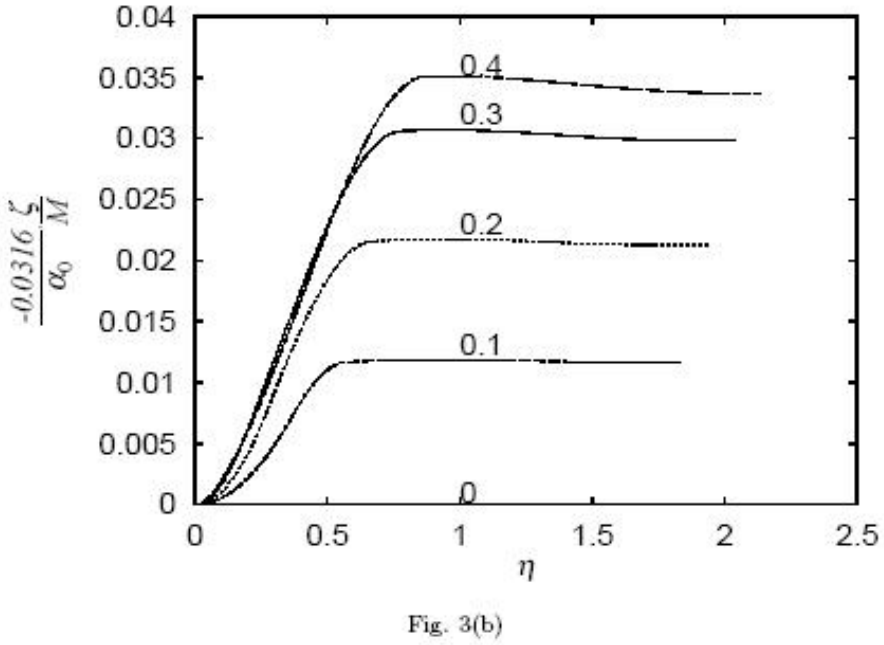

Figure 3.5: La evolución del campo escalar vista por observadores comóviles.

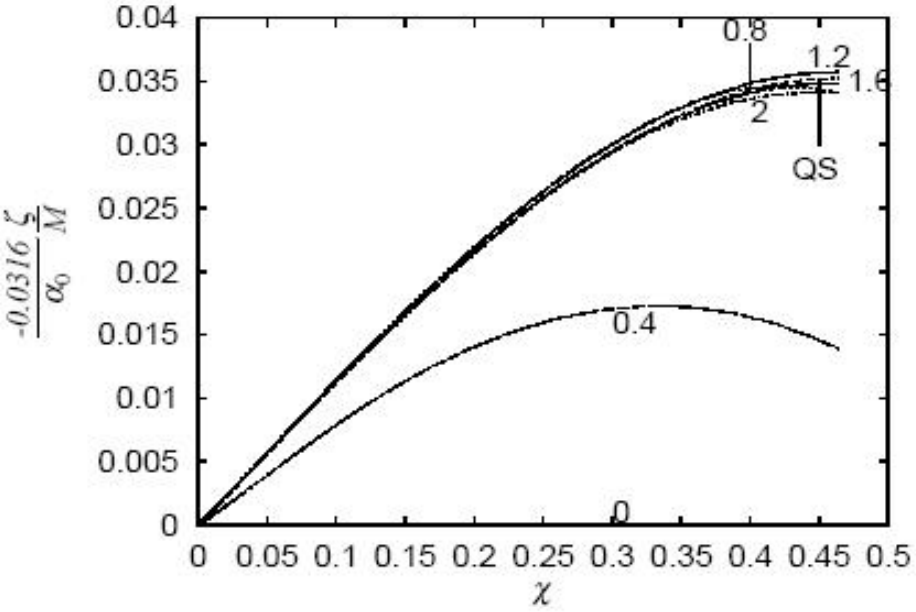

Figure 3.6: Configuración del campo escalar en la hipersuperficie $\eta = cte$.

escalar evoluciona también de manera *cuasiestática*. Finalmente el campo escalar cae dentro del horizonte de eventos.

La solución numérica $\zeta = r\delta\varphi$ en el exterior del polvo se muestra en las figuras 3.7 y 3.8. Como se puede ver en ambas figuras, el campo escalar aumenta primero respecto de su valor φ_0 debido a la presencia del polvo. Una vez que se ha formado el horizonte de eventos, el campo en el interior no puede afectar al campo en el exterior. El campo escalar se aproxima a su valor asintótico una vez que la onda ha pasado al observador a $r = const.$

Es posible estudiar el comportamiento de estas soluciones con respecto al radio inicial y al parámetro que define la teoría, pero no haremos esto aquí para no extendernos demasiado. La amplitud de la onda nos daría información de la energía autogravitante del cuerpo. Si obtenemos experimentalmente la forma de una onda gravitacional escalar, podremos determinar su amplitud, su frecuencia característica y sus frecuencias modales. La amplitud de la onda nos daría información de la energía autogravitante del cuerpo y puesto que la frecuencia modal es inversamente proporcional a la masa podríamos obtener información acerca de la fuente. Además, si conocemos la distancia a la fuente por otro método, podríamos determinar el parámetro de Brans-Dicke ω; es más, podríamos determinar el radio inicial de su frecuencia característica. Resumiendo lo anterior:

(1) En la teoría de Brans-Dicke el back-reaction del campo escalar sobre el espacio tiempo va como $O(1/\omega)$, de forma que si $\omega \gg 1$, este efecto es despreciable.

(2) En la teoría de Brans-Dicke (y en general en las teorías escalar-tensor) el campo escalar se aproxima a su valor asintótico una vez que ha pasado al observador en $r = const.$

(3) En la teoría de Brans-Dicke es posible determinar la masa, el radio inicial y el parámetro de Brans-Dicke de la forma de la onda gravitacional y de la distancia a la fuente.

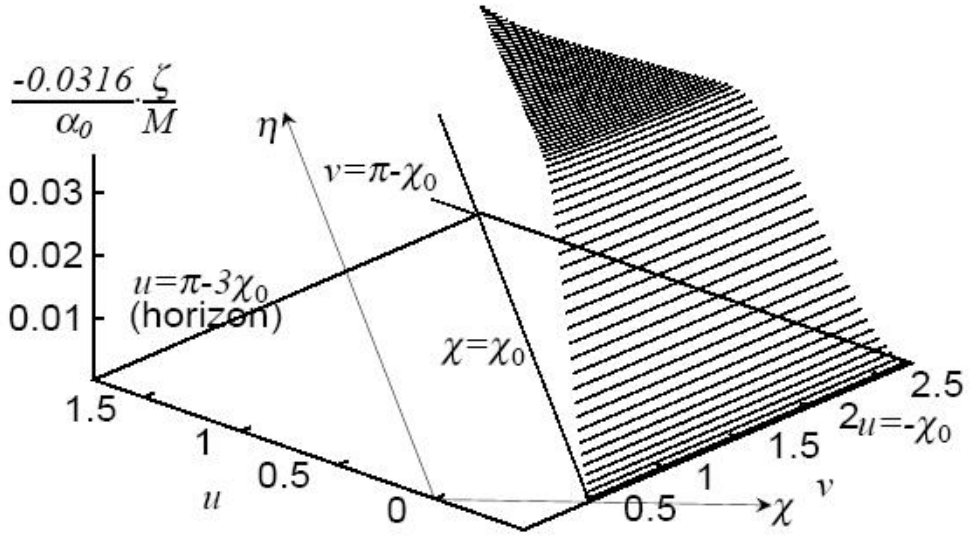

Figure 3.7: El campo escalar en el exterior del polvo en la teoría de Brans-Dicke (region (B) de la figura 3.2). El radio inicial es 10M.

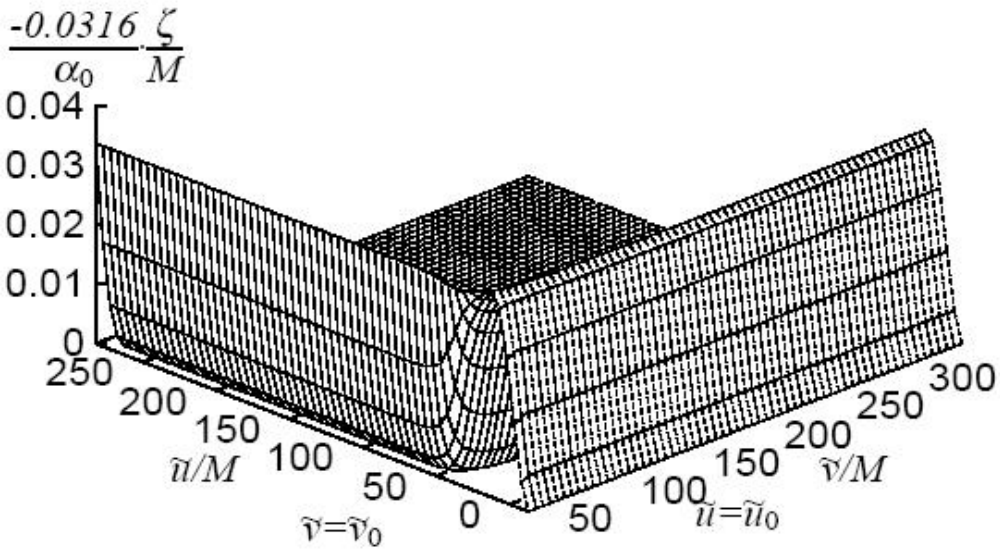

Figure 3.8: El campo escalar en el exterior del polvo en la teoría de Brans-Dicke (region (C) de la figura 3.2). El radio inicial es 10M. La ordenada es $\zeta = r\delta\varphi$ y las abscisas $\tilde{u} = t - r_*$ y $\tilde{v} = t + r_*$.

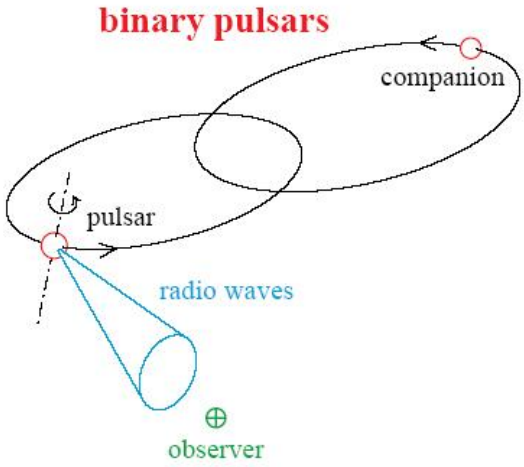

Figure 3.9: El pulsar binario constituye un reloj en movimiento de alta precisión: la herramienta ideal para testar la relatividad general.

3.4 El pulsar binario y las teorías escalar-tensor

Los pulsares binarios son maravillosas herramientas para testar la relatividad general en el regimen de campo fuerte. Un pulsar es una estrella de neutrones rotando rapidamente y emitiendo un haz de ondas de radio, como si de un faro se tratase (veáse la figura 3.9).

Los experimentos nos muestran que los pulsares, cuando son lo suficientemente viejos, son relojes extremadamente estables. Un pulsar A orbitando en torno a un objeto B es por tanto un reloj en movimiento, la mejor herramienta que uno podría imaginar para testar la Relatividad General!. Los efectos relativistas que se producen en estos pulsares dependen de las masas m_A y m_B, las cuales no son directamente medibles. Sin embargo, bastan dos de estos efectos para determinarlas. Con esto y utilizando un tercer observable es posible realizar tests de la Relatividad General. En el caso del famoso pulsar binario $1913+16$, descubierto por Hulse y Taylor, se han determinado con gran precisión tres de los parámetros del pulsar: (i) El retraso temporal Einsteniano γ_T, que combina el efecto Doppler a segundo orden ($\propto v_{\rm A}^2/2c^2$, donde $v_{\rm A}$ es la velocidad del pulsar) con el redshift debido a la compañera ($\propto Gm_{\rm B}/r_{\rm AB}c^2$, donde $r_{\rm AB}$ es la distancia entre el pulsar y la compañera); (ii) El avance del periastro $\dot{\omega}$ (efecto relativista de orden v^2/c^2);y (iii) la tasa de cambio del periodo orbital, $\dot{P}$, debida a la emisión de ondas gravitacionales (un efecto de orden v^5/c^5 en GR, pero de orden v^3/c^3 en las teorías escalar-tensor)

La figura 3.10 muestra el plano de las dos masas *a priori* desconocidas, $m_{\rm A}$ and $m_{\rm B}$. Para cada uno de los parámetros relativistas, la predicción de una cierta teoría dada es consistente con los experimentos sólo a lo largo de un línea estrecha. En Relatividad General, el hecho de que las tres líneas se encuentren en un único punto significa que existe un par de masas $(m_{\rm A}, m_{\rm B})$ que son simultaneamente consistentes con los tres observables físicos, lo cual es una extraordinaria confirmación de la teoría einsteniana de la gravitación.

Obviamente, las líneas de las que hemos hablado se verán deformadas en las teorías escalar tensor, y en el caso de que no encuentren un punto de intersección común la teoría deberá ser descartada. La parte derecha de la figura 3.10 ilustra este caso. Las teorías permitidas son aquellas que se situan por debajo de la línea denotada como PSR B1913+16 en la figura 2.1.

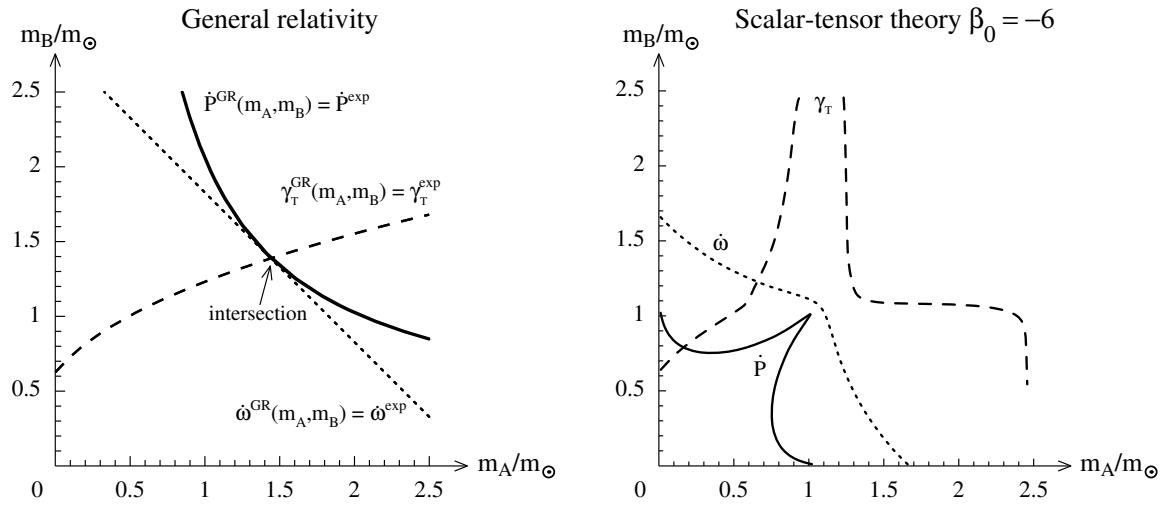

Figure 3.10: Plano de masas (m_A = pulsar, m_B = compañera) para el pulsar binario de Hulse-Taylor, PSR B1913+16 en Relatividad General (a la izquierda) y para una teoría escalar-tensor con $\beta_0 = -6$ (derecha). La anchura de las líneas es mayor que las barras de error 1σ. Puede verse que mientras que GR pasa brillantemente el test, el valor $\beta_0 = -6$ debe ser desechado.

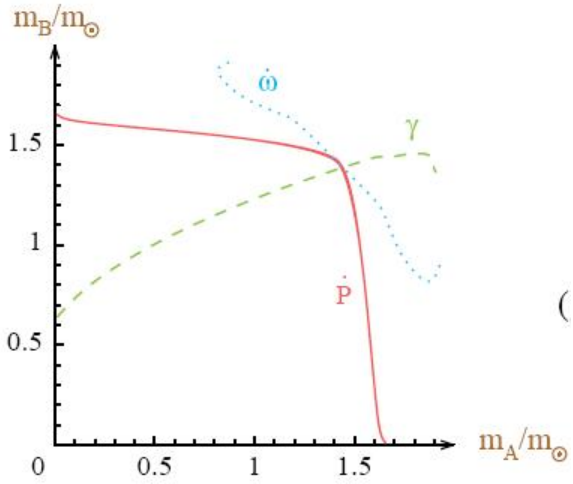

Figure 3.11: Plano de masas para una teoría escalar tensor con valor $\beta_0 = -4.5$. Puede verse claramente que, aunque las líneas se encuentran deformadas con respecto a las de la figura 3.10 correspondiente a GR, los tres test encuentran un punto de intersección común en esta teoría, a diferencia de los que ocurría con $\beta_0 = -6$.

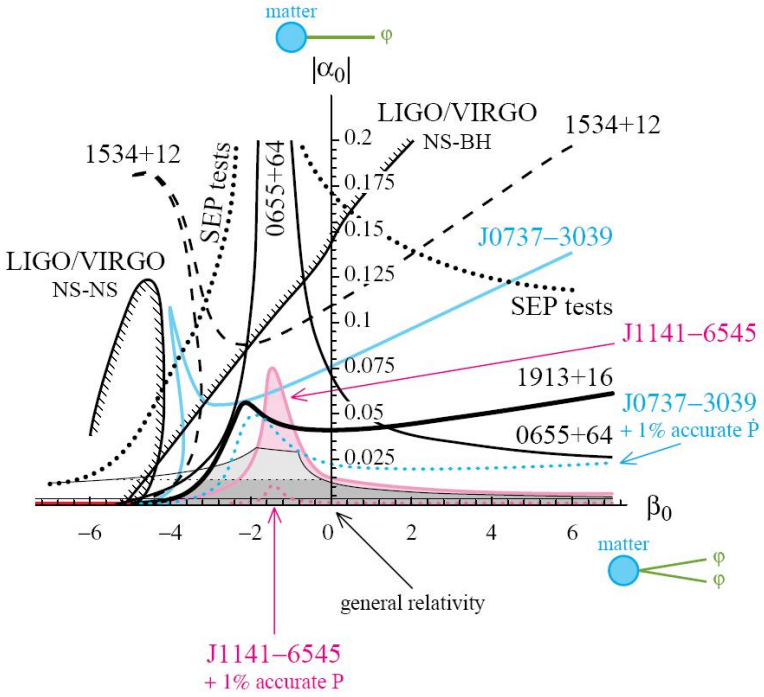

Figure 3.12: Cotas actuales a las teorías escalar tensor con acoplos no lineales. Se incluyen tanto los resultados obtenidos en el sistema solar como los obtenidos utilizando los sistemas binarios.

Dicha gráfica muestra claramente las diferencias cualitativas entre los experimentos realizados en el sistema solar y los realizados en los sistemas binarios. Estos últimos imponen (veáse la figura 3.11)

$$\beta_0 > -4.5\,, \tag{3.55}$$

incluso para un valor extremadamente pequeño de α_0. Reescribiendo esta cota en términos de los parámetros postnewtonianos $\beta^{\rm PPN}$ and $\gamma^{\rm PPN}$ se tiene,

$$\frac{\beta^{\rm PPN}-1}{\gamma^{\rm PPN}-1} < 1.1\,. \tag{3.56}$$

El carácter singular (0/0) de este cociente da cuenta de porqué tal conclusión no podía obtenerse a traves de experimentos realizados en el régimen de campo débil.

Son muchos los pulsares que se conocen con una buena precisión en la actualidad (veáse el Apéndice B para obtener información sobre algunos de ellos). En la figura 3.12 se incluyen todas las cotas existentes actualmente sobre la teoría escalar tensor, ya sea debidas a experimentos en el sistema solar o mediante pulsares. Destacan, por su perspectiva de futuro, las ligaduras impuestas por el sistema PSR J1141−6545, recientemente medido, constituido por una estrella de neutrones y una enana blanca. Nótese la fuerte acotación que aporta este pulsar sobre los parámetros de acoplo. Este sistema binario es extraordinariamente asimétrico. Destaco esta característica , pues esta asimetría es fundamental para testar una de las diferencias mas fuertes entre la teoría einsteniana de la gravitación y la teoría de Brans-Dicke: la predicción de radiación gravitacional dipolar. No entraré a discutir aquí este efecto de manera profunda,

pero pienso que es importante comentarlo y discutir de manera cualitativa esta diferencia entre ambas teorías.

La teoría de la Relatividad General satisface, como vimos, el Principio de Equivalencia Fuerte porque contiene un, y sólo un, campo gravitacional, la métrica $g_{\mu\nu}$ (de hecho es la única teoría que lo hace). No existe por tanto radiación dipolar ya que el "momento dipolar" (centro de masas) de un sistema aislado es uniforme en el tiempo (conservación del momento), y la "masa inercial " que determina el momento dipolar es la misma que la masa que genera las ondas gravitacionales (SEP).

En cambio en la teoría de Brans-Dicke esto no tiene porque cumplirse (violación del SEP). El origen de la radiación dipolar en la teoría de Brans-Dicke es la diferencia entre la energía de ligadura autogravitacional por unidad de masa entre los dos cuerpos que forman un sistema binario dado. La existencia de radiación gravitacional dipolar podría, en principio, ser significativamente más fuerte que la radiación cuadrupolar usual, pues depende de potencias menores de la velocidad orbital v, y además, depende de la energía de ligadura por unidad de masa de los cuerpos, la cual, para una estrella de neutrones puede corresponder a un 40 por ciento del total. De forma esquemática, el flujo de energía emitido en forma de ondas gravitacionales sería

$$\begin{aligned}\text{Flujo de energía} = &\left\{\frac{\text{Cuadrupolo}}{c^5} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^7}\right)\right\}_{\text{helicidad 2}} \\ &+ \left\{\frac{\text{Monopolo}}{c}\left(0+\frac{1}{c^2}\right)^2 + \frac{\text{Dipolo}}{c^3}(\alpha_{\rm A}-\alpha_{\rm B})^2 + \frac{\text{Cuadrupolo}}{c^5} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^7}\right)\right\}_{\text{helicidad 0}} \end{aligned} \tag{3.57}$$

El primer corchete contienen la predicción de relatividad general, de orden v^5/c^5, mientras que el segundo contiene las contribuciones adicionales predichas por las teorías escalar-tensor. [3] En particular, la contribución dipolar es de orden v^3/c^3, mucho mayor que el término cuadrupolar usual de la Relatividad General. Este nuevo flujo de energía podría llegar a alterar significativamente la órbita del sistema binario. Sin embargo, en aquellas teorías de la gravedad próximas, en algún sentido, a GR es de esperar que la radiación dipolar no sea un efecto tan pronunciado, y este es precisamente el caso de la teoría de Brans-Dicke. Los sistemas con una alta simetría, como es el caso del pulsar binario, $1913+16$ no son buenos sistemas para buscar diferencias entre GR y la teoría de Brans-Dicke y proporcionan una cota muy baja para el parámetro ω. En cambio, en un sistema binario constituido por objetos distintos, tales como una enana blanca o un agujero negro como compañeros, los efectos de radiación dipolar serían mucho más pronunciados; este es precisamente el caso del mencionado PSR J1141−6545. Nótese que las cotas impuestas por este pulsar son casi tan importantes como las impuestas por los experimentos en el sistema solar, incluso en la región $\beta_0 > 0$. Se espera que este pulsar proporcione cotas de los parámetros de Eddington en torno a $|\gamma^{\rm PPN}-1| \sim 10^{-6}$ para finales de esta década.

Resumiendo, los experimentos realizados en el sistema solar imponen fuertes ligaduras a $\ln A(\varphi)$ (acoplo lineal a la materia α_0), mientras que los experimentos en el régimen de campo fuerte, imponen restricciones a su segunda derivada β_0 (acoplo cuadrático a la materia), imponiendo que no sea excesivamente grande y negativa.

[3] Es conveniente hacer aquí una observación. Determinadas elecciones de la función $\omega(\phi)$ pueden evitar la producción de radiación dipolar. Por ejemplo, si $\omega(\phi) = (4-3\phi)/(2\phi-2)$ (Teoría de G constante de Barker), se satisface, a orden postnewtoniano, el Principio de Equivalencia Fuerte; la constante gravitacional G medida localmente es constante, y la teoría no produce por tanto radiación dipolar.

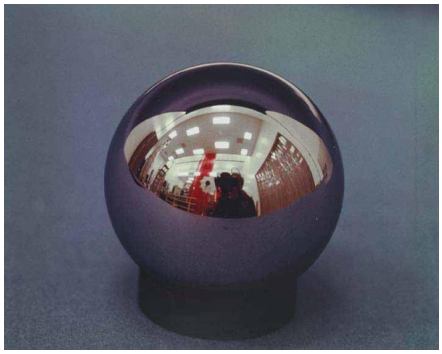

Figure 3.13: Los giróscopos utilizados en Gravity Probe B constituyen las esferas más perfectas jamas creadas por el hombre.

3.5 Los dispositivos actuales y los que han de venir

No sería adecuado terminar esta sección dedicada a los resultados experimentales sin mencionar los dispositivos actuales de medición y, lo que es más importante, los que apareceran en el futuro. Por supuesto no estan todos, pero si los mas significativos (muchos de ellos son proyectos similares llevados a cabo por distintos grupos). Describiré a continuación estos prodigios de la técnica, su utilidad, indicando en cada uno de ellos la cota aproximada esperada para la teoría escalar-tensor a partir de sus mediciones.

3.5.1 Gravity Prove B

El Stanford-Lockheed-NASA Gyroscope Experiment, llamado también Gravity Probe B, es un experimento diseado por la NASA y la Universidad de Stanford. El experimento medirá con gran precisión los minúsculos cambios en la dirección de cuatro giróscopos contenidos en un satélite orbitando a 650 km de altitud directamente sobre los polos y testeará con ello los dos efectos predichos por relatividad general: la precesión geodética y el frame dragging. El objetivo es detectar y medir estos dos efectos con una precisión mayor que 0.5 milisegundos de arco por año. Para esto es necesario la utilización de giróscopos esféricos que difieran de una esfera perfecta en menos de 12 nm (veáse la figura 3.13).

Aunque el objetivo anteriormente expuesto es el principal GP-B, medirá también la precesión causada por la curvatura del espacio ordinario alrededor de la Tierra. Las medidas de este último efecto podrían situar la cota para el parámetro ω en 10^5 o incluso más.

3.5.2 LISA

El Laser Interferometer Space Antenna (LISA) es un detector de ondas gravitacionales que esta siendo diseñado para ser lanzado en un periodo comprendido entre el 2010 y el 2015. Consta de una disposición triangular de tres satélites orbitando alrededor del Sol en una órbita similar a la Tierra y utilizará interferometría laser para abrir una ventana a ondas gravitacionales de baja frecuencia y para complementar las ventanas de alta frecuencia que están siendo actualmente exploradas por interferómetros en tierra. Se espera que LISA sea capaz observar ondas procedentes de sistemas binarios conocidos, agujeros negros y otros objetos compactos y posiblemente también de transiciones de fase en el Universo primitivo.

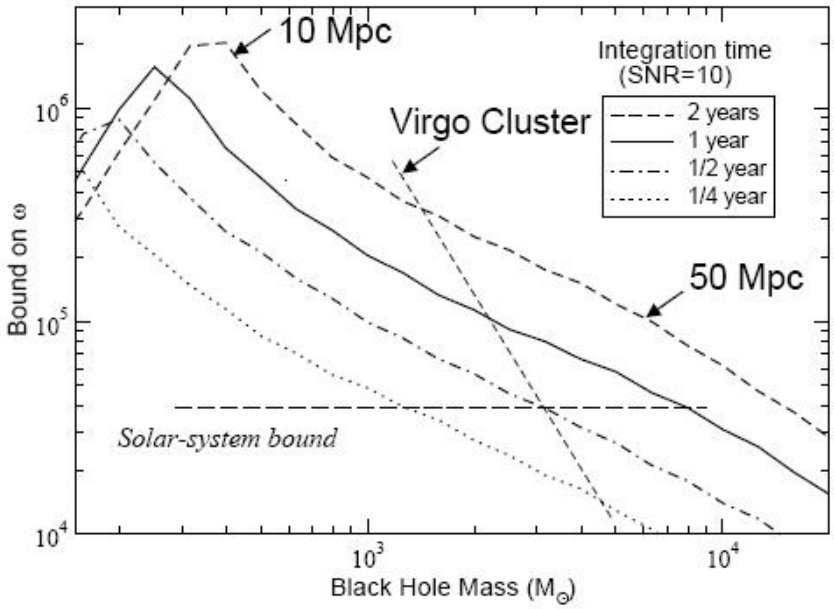

Figure 3.14: Posibles ligaduras al parámetro ω usando LISA

LISA puede constituir también una forma nueva e interesante de testar la física fundamental. Algunos autores como Will, Yunes y Scharre [61] han demostrado que las observaciones de ondas procedentes de sistemas binarios podrían podrían utilizarse para obtener cotas a teorías alternativas a la gravedad, como por ejemplo la teoría escalar-tensor. Estimaron que mediante observaciones de una estrella de neutrones de $1.4M_{\odot}$ orbitando en torno a un agujero negro masivo de masa en torno a $1000M_{\odot}$ en el cluster de Virgo con un cociente señal-ruido en torno a 10 se podría elevar la cota a 3×10^5. Para masas menores la cota podría situarse en torno a 2×10^6 (veáse figura 3.14). La cota es independiente de la longitud de brazo de LISA.

3.5.3 GAIA

GAIA es una misión espacial astrométrica global, actualmente en desarrollo (ver figura 3.15). Su lanzamiento esta previsto para 2010. Su objetivo principal es continuar con el trabajo de su predecesor Hipparcos [4], determinar la estructura y forma de nuestra galaxia y construir el mayor y más preciso mapa de la misma. Tendrá una resolución de 0.1 segundos de arco. Se espera que alcance una cota para el parámetro postnewtoniano γ en torno a 5×10^{-7} (recuérdese que actualmente la cota más fuerte es la obtenida por la sonda Cassini $\gamma-1 = (2.1\pm.3)\times10^{-5}$), que elevaría brutalmente la cota inferior para el parámetro $\omega \sim 2 \times 10^6$. Del mismo modo, es de esperar que $\beta \sim 3\times10^{-4} - 10^{-5}$ (entre 10 y 100 veces mejor que las medidas de Lunar Laser Ranging actuales).

[4]Recuérdese que este satélite ya proporcionó en su momento un fuerte cota del parámetro γ^{PPN}.

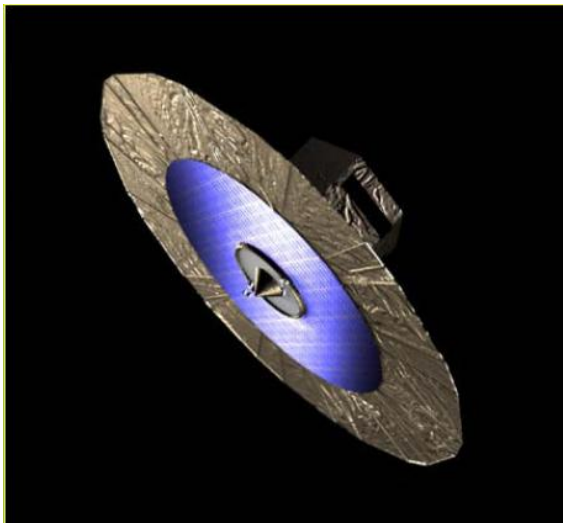

Figure 3.15: La misión GAIA tomará el relevo del satelite Hipparcos. Tiene como objetivo principal determinar la estructura y forma de nuestra galaxia.

Figure 3.16: Una de las dos instalaciones con las que cuenta el Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory LIGO, dedicado a la detección de ondas gravitacionales

3.5.4 LIGO

El Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory (LIGO) esta dedicado a la detección de ondas gravitacionales y a la medida de la mismas. Consta de dos instalaciones (Livingston y Hanford) ampliamente separadas dentro de los Estados Unidos, que operan simultaneamente (ver figura 3.16). Una de las razones de la existencia de dos localizaciones es la posible aparición de fenomenos locales, tales como pequeos terremotos o ruido acústico, que podrían generar confusión en los datos experimentales. Esto puede ocurrir en un cierto lugar, pero es muy dificil que ocurran simultaneamente en dos lugares tan separados.

Chapter 4

Relación con otras teorías modernas

"The effort to understand the universe is one of the very few things that lifts human life a little above the level of farce, and gives it some of the grace of tragedy. "
Steven Weinberg

4.1 Introduccíon

La teoría de Brans-Dicke no es sólo interesante como una alternativa posible a la Relatividad General. Quizá su mayor interés es que es el límite a bajas energías de otras teorías más fundamentales como puede ser la teoría de cuerdas. Sin embargo, la teorías escalar-tensor aparecen, de forma más o menos oculta, en otros campos como la cosmología; sirvan de ejemplo los modelos de quintaesencia o la variación de la contanste cosmológica, Higgs, etc .... En esta sección intentaré explicar la relación existente entre estas teorías. Analizaré de forma expositiva el problema de la constante cosmológica y su posible "solución" basándose en teorías que incluyan un potencial escalar. Expondré además, con mayor extensión (quizá por debilidad personal hacia el tema), la teoría de cuerdas y su límite a bajas energías y concluiré con las cotas a la variación de la constante gravitacional, otra de las predicciones de la teoría escalar-tensor.

4.2 Relación con la teoría de cuerdas

La mayor parte de los físicos consideran que la teoría de la gravedad a bajas energías debe ser una aproximación efectiva de alguna teoría fundamental de gravedad cuántica a energías más allá de la escala Planck ($M_{Pl} \sim 10^{19} GeV$). La teoría de cuerdas puede constituir un prometedor origen del campo escalar. La teoría de cuerdas, a diferencia de la mecánica cuantica, asume que las partículas elementales son objetos extensos unidimensionales. Además de propagarse las cuerdas también pueden oscilar. Sus diferentes modos de oscilación pueden ser interpretados como diferentes partículas elementales, cada una en posesión de sus propios números cuánticos. Uns cuerda particular puede ser abierta o cerrada. En algunas teorías de cuerdas ambas coexisten, mientras que otras, consideran sólo uno de los dos tipos. Cuando una cuerda se propaga en el espacio-tiempo describe una superficie denominada la "hoja del universo" de la cuerda (*worldsheet*) , equivalente a la "linea del universo" que describe una partícula puntual en el espacio de Minkowski. Las coordenadas que definen el *worldsheet* son $\sigma = \sigma^2$ y $\tau = \sigma^2$, donde σ se interpreta como una coordenada espacial mientras que τ es una coordenada temporal. En

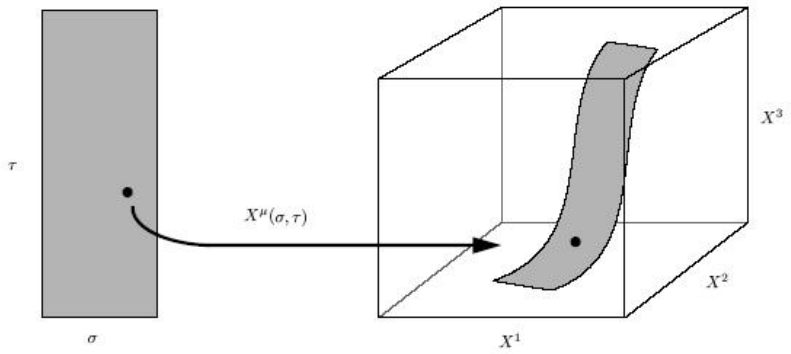

Figure 4.1: El *worldsheet* de una cuerda embebido en un cierto espacio. X mapea el *worldsheet* al espacio de acogida.

el *worldsheet* existen campos, tales como el campo bosónico $X(\sigma,\tau)$. Desde el punto de vista del espacio tiempo $X(\sigma,\tau)$ es una coordenada que da la posición en el espacio tiempo, que por ahora tomaremos como el espacio de Minkowski, de un punto (σ,τ) del *worldsheet*.

Una vez presentadas las cuerdas, aunque de forma grotesca, la pregunta fundamental que surge es: Cómo se relacionan las teorías de cuerdas con la cosmología?. Abordar el tema a fondo es complicado y queda fuera de el tiempo y extensión de este trabajo (y seguramente de los conocimientos del autor), pero intentaré dar una explicación ligera de cuales son los pasos a seguir.

Tomaremos como punto de partida la acción para una partícula clásica relativista. Como sabemos la acción gobierna la dinámica de una partícula puntual exigiendo que su trayectoria geodésica en el espacio-tiempo sea mínima. Una generalización al caso de cuerdas, sencilla de entender, es que la dinámica de una cuerda clásica venga determinada por el requerimiento de que el área del *worldsheet* sea mínima. Esto puede formularse en términos de la conocida como acción de Polyakov:

$$S_{NG} = -\frac{1}{4\pi\alpha'}\int_A d\sigma d\tau \sqrt{h} h^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu. \tag{4.1}$$

donde el campo h es un campo no dinámico que juega el papel de una métrica del *worldsheet*. Variando la acción respecto de este campo se puede encontrar, como es usual, un tensor energía momento. La acción dada es invariante bajo difeomorfismos y bajo transformaciones conformes y podría generalizarse incluyendo un término Gauss-Bonnet, nosotros no haremos esto.

El siguiente paso en nuestro camino a encontrar una relación con la cosmología será generalizar la acción de Polyakov del espacio de Minkowski a uno general. Pasemos de la métrica η a una métrica general $g(X)$:

$$S_{NG} = -\frac{1}{4\pi\alpha'}\int_A d^2x \sqrt{h} h^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu g_{\mu\nu}(X). \tag{4.2}$$

Claramente, la acción anterior constituye una generalización de la acción de Polyakov y , aunque no es obvio en principio, es la forma correcta de describir la propagación de cuerdas en un sistema general, posiblemente curvado. Hasta aquí todo parece más o menos fácil de entender, y de explicar por mi parte. La parte hetérea del asunto comienza ahora.

Puede demostrarse que una perturbación en el espacio de Minkowski es equivalente a evaluar el espacio plano en teoría de cuerdas en un fondo de gravitones coherentes. Esto lleva a incluir

una serie de campos no masivos: el tensor antisimétrico B y el dilatón Φ. El resultado de esto es (ver Polchinski, sección 3.7):

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'}\int_A d^2x\sqrt{h}\left(h^{\alpha\beta}g_{\mu\nu}(X) + i\epsilon^{\alpha\beta}B_{\mu\nu}(X)\right)\partial_\alpha X^\mu\partial_\beta X^\nu + \frac{1}{4\pi}\int_A d^2x\sqrt{h}R\Phi(X), \quad (4.3)$$

donde R es el escalar de curvatura de *worldsheet*. Esta acción, en el límite de bajas energías, será la que nos lleve a la teoría de Brans-Dicke. Haciendo un desarrollo en α' la parte relevante del lagrangiano a bajas energías viene dada por:

$$\mathcal{L}_{\rm ST} = \sqrt{g}e^{-2\Phi}\left(R + 2g^{\mu\nu}\partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi - \frac{1}{12}H_{\mu\nu\lambda}H^{\mu\nu\lambda}\right), \quad (4.4)$$

donde $H_{\mu\nu\lambda} = \partial_\mu B_{\nu\lambda} + \partial_\nu B_{\mu\lambda} + \partial_\lambda B_{\mu\nu}$ y R es el tensor de Ricci (construído de g). Si en esta expresión hacemos $\phi = 2e^{-\Phi}$, los dos primeros términos de esta ecuación se escriben:

$$\mathcal{L}_{\rm ST1} = \sqrt{-g}\left(\frac{1}{2}\xi\phi^2 R - \frac{1}{2}\epsilon g^{\bar\mu\bar\nu}\partial_{\bar\mu}\phi\partial_{\bar\nu}\phi\right), \quad (4.5)$$

donde hemos hecho la identificación $\epsilon = -1$, $\xi^{-1} = 4$. Esta expresión, sorprendentemente, presenta la misma apariencia que la parte gravitacional del Lagrangiano de Brans-Dicke y justifica el cambio de notación con respecto a la de los autores (1.19). Con la identificación $\epsilon = -1, \xi^{-1} = 4$, obtenemos $\omega = -1$. Nótese que el valor de $\xi^{-1} = 4$ es extremadamente grande comparado con el valor obtenido en los ultimos experimentos realizados en el sistema solar:

$$\zeta^2 \sim \xi \lesssim 5\times 10^{-6}, \quad \text{ó} \quad \omega \gtrsim 50,000. \quad (4.6)$$

Una posible explicación de esto es que en algún momento de la evolución del Universo el valor de campo escalar haya sido fijado.

4.3 Teorías escalar tensor y cosmología

Los campos escalares se encuentran también presentes en los modelos que más fielmente reproducen los datos experimentales. En particular la teoría de inflación se basa en la existencia de un escalar Φ en un potencial $V(\Phi)$ (por ejemplo parabólico), que se comporta como un fluido con una densidad de energía positiva y una presión negativa. Esto produce un periodo de crecimiento exponencial del universo , que puede explicar porque regiones disconexas en el presente pudieron estar conectadas hace mucho tiempo. La isotropía de fondo cósmico de microondas (CMB) puede ser entendida entonces. Las observaciones (Ia Supernovae) nos muestran que hay en torno al 70 por ciento de energía oscura en nuestro universo actual ($\Omega_\Lambda \simeq 0.7$), sugiriendo que la expansión se ha reacelerado recientemente (desde redshift $z \sim 1$). Esto puede explicarse por la presencia de una constante cosmológica Λ en relatividad general, pero la cantidad $\Omega_\Lambda \simeq 7$, expresada en unidades naturales, da un valor extremadamente pequeño $\Lambda \simeq= 3\times 10^{-122}c^3/(\hbar G)$, lo cual es extremadamente problemático para los físicos de partículas si Λ es interpretado como una energía de vacío. Esta es la principal razón por la cual se han propuesto modelos de quintaesencia, en los cuales la constante cosmológica se reemplaza de nuevo por el potencial $V(\Phi)$ de un campo escalar, cuya evolución hacia un mínimo de V durante la expansión cosmológica explica de forma "más natural" porque el valor actual $V(\Phi_0) \simeq \Lambda/2$ es tan pequeño.

4.4 Variación de la constante gravitacional

Parece ser que Dirac fue el primero que vislumbró la posibilidad de una variación temporal de las constantes de la naturaleza [1], entre ellas la constante gravitacional G. En su artículo "A new basis for cosmology" escribe

> *Any two of the very large dimensionless numbers occurring in Nature are connected by a simple mathematical relation, in which the coefficients are of the order of magnitude unity.*

Como ejemplo, consideremos el cociente entre la fuerza electrostática y la gravitacional entre un protón y un electrón

$$N_1 = \frac{e^2}{Gm_p m_e} \simeq 2 \times 10^{39}, \tag{4.7}$$

donde e es la carga eléctrica, m_p es la masa del protón y m_e es la masa del electrón. Si comparamos esto con el cociente entre el radio del horizonte de Hubble H_0^{-1} y el radio clásico del electrón

$$N_2 = \frac{H_0^{-1}}{e^2 m_e^{-1}} \simeq 3 \times 10^{40} h^{-1}, \tag{4.8}$$

vemos que, curiosamente, ambas casi coinciden en orden de magnitud, lo que motiva la hipótesis de grandes números de Dirac. Entonces, argumenta Dirac, si la "igualdad" $N_1 = \mathcal{O}(1) \times N_2$ se mantiene por siempre, la constante gravitacional debe decrecer en el tiempo como $G \propto t^{-1}$[41]. Probablemente, la coincidencia entre N_1 y N_2 sea sólo accidental, pero esto fue suficiente como para abrir la caja de Pandora.

Hoy en día sabemos que esto está relacionado con el problema de las jerarquías. De hecho se dice que las constantes de acoplo "corren" (logaritmicamente) cuando la energía aumenta y se cree que llegarían a unificarse probablemente a la escala de cuerdas.

La teoría de Brans-Dicke, como la mayoría de las teorías que violan en principio de equivalencia fuerte, predice que la constante gravitacional G puede variar en el tiempo a medida que el universo evoluciona. La tasa de variación debería ser del orden de la tasa de expansión del universo, es decir,

$$\frac{\dot{G}}{G} = \sigma H_0 \tag{4.9}$$

donde H_0 es la constante de Hubble y σ es un parámetro adimensional que varía desde $\sigma \simeq -3q_0(\omega+2)^{-1}$ para $q_0 \ll 1$ a $\sigma \simeq -3.34 q_0^{1/2}(\omega+2)^{-1}$ para $q_0 \gg 1$ pasando por $\sigma \simeq -(\omega+2)^{-1}$ para $q_0 = 1/2$, donde q_0 es el parámetro de deceleración [2]. Actualmente sabemos que el universo se encuentra acelerado, por lo que $\sigma \simeq -3q_0(\omega+2)^{-1}$.

Se han llevado a cabo numerosas observaciones para determinar las cotas sobre la variación de la "constante" gravitacional. Los métodos utilizados incluyen estudios de la evolución del sol, observaciones de eclipses lunares, medidas lunar-laser-ranging etc...Un resumen de las mismas se muestra en la tabla 4.1. Es importante destacar que las cotas a la constante G pueden venir no sólo a través de medidas directas, sino también de medidas indirectas. Se ha demostrado que las variaciones temporales de las constantes físicas estan relacionadas unas con otras [57],[58],[59], de forma que experimentos para testar $\dot{\alpha}/\alpha$ pueden ser usados para hacer una estimación de $\dot{G}/G$ y viceversa. No entraré a revisar aquí las cotas para $\dot{G}/G$ derivadas de las cotas para el resto de constantes fundamentales, pero pueden encontrarse en cualquier artículo de review sobre el tema. Analicemos cada una de las cotas sobre $\dot{G}/G$ cotas por separado.

[1] Se piensa que también pudo ser Milne en 1935

Método	Redshift	$\dot{G}/G$ (10^{-12} año^{-1})
Viking Lander Ranging [42]	0	2 ± 4
Lunar Laser Ranging [44]	0	1 ± 8
Double Neutron Star Binary [46]	0	11 ± 11
Pulsar-White Dwarf Binary [47]	0	-9 ± 18
Helioseismology [54]	0	< 1.6
Neutron Star Mass [55]	$0 - 3 \sim 4$	-0.6 ± 2.0
BBN [51]	10^{10}	$-27 \sim 21$

Table 4.1: Cotas experimentales a la variación de la constante gravitacional. En el caso de los pulsares binarios y las estrellas de neutrones las cotas son dependientes de la teoría de la gravedad en el regimen de campo fuerte y de la ecuación de estado para las estrellas de neutrones.

4.4.1 Medidas de Viking y Lunar-Laser-Ranging

Es fácil ver el efecto que tendría una constante gravitacional variable si escribimos G como $G = G_0 + \dot{G}_0(t - t_0)$. Esto produce un cambio en la ecuación de movimiento, que pasa a ser

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = -\frac{GM\mathbf{x}}{r^3} = -\frac{G_0 M\mathbf{x}}{r^3} - \frac{\dot{G}_0}{G_0}\frac{G_0 M}{r}\frac{\mathbf{x}(t-t_0)}{r^2}. \tag{4.10}$$

Puede verse que la variación de G induce un término de aceleración que se añade a los términos newtonianos y relativistas usuales, lo que afectaría al movimiento de los cuerpos, como por ejemplo, al movimiento de los planetas. Medidas de la distancia Tierra-Marte utilizando la sonda Viking han permitido obtener una cota para $\dot{G}$ [42] : $\dot{G}/G = (2 \pm 4) \times 10^{-12}$año^{-1} .

De manera similar las medidas Lunar-Laser-Ranging han sido utilizadas para medir con gran precisión los parámetros del sistema solar, en concreto la separación tierra-luna. De los datos obtenidos entre 1969 y 1994 se obtuvo una nueva cota [43]: $\dot{G}/G = (0.1 \pm 10.4) \times 10^{-12}$año^{-1}; mientras que para los datos obtenidos entre 1970 y 1994 se obtuvo [44], $\dot{G}/G = (1 \pm 8) \times 10^{-12}$año^{-1} .

4.4.2 Medidas realizadas utilizando los pulsares PSR 1913+16 y PSR 0655+64

A pesar de que las cotas $\dot{G}/G$ usando medidas en el sistema solar pueden obtenerse de manera fenomenológica simplemente reemplazando G por $G_0 + \dot{G}_0(t - t_0)$ en las ecuaciones de movimiento de Newton, esto no puede hacerse para las medidas realizadas utilizando el pulsar binario. Esto se debe a que las teorías escalar tensor violan el principio de equivalencia fuerte

(SEP), y por tanto la masa y el momento de inercia de un cuerpo ligado gravitacionalmente pueden variar al variar G. Debido a que las estrellas de neutrones son altamente relativistas, la variación fraccional de estas cantidades puede ser comparable a $\Delta G/G$. De igual modo, la variación de la masa puede afectar al periodo del pulsar de forma que añada o sustraiga una cierta cantidad al efecto directo de la variación de G. Las cotas para los pulsares PSR 1913+16 y PSR 0655+64 dependen por este motivo de la teoría y deben considerarse meramente estimativas. A orden newtoniano el periodo orbital de un sistema de dos cuerpos viene dado por

$$P_b = 2\pi \left(\frac{a^3}{Gm}\right)^{1/2} = \frac{2\pi \ell^3}{G^2 m^2 (1-e^2)^{3/2}}, \tag{4.11}$$

donde a es el semieje mayor, $\ell = r^2\dot{\phi}$ es el momento angular por unidad de masa, m es un parámetro de masa de orden Newtoniano y e es la excentricidad de la órbita. Esto lleva a una tasa de evolucion del periodo orbital dada por:

$$\frac{\dot{P}_b}{P_b} = -2\frac{\dot{G}}{G} + 3\frac{\dot{\ell}}{\ell} - 2\frac{\dot{m}}{m}. \tag{4.12}$$

Damour, Gibbons and Taylor mostraron que el límite fenomenológico apropiado de $\dot{G}$ viene dado por:

$$\frac{\dot{G}}{G} = -\frac{\delta \dot{P}_b}{2P_b}, \tag{4.13}$$

donde $\delta\dot{P}_b$ representa cualquier parte de la derivada del periodo orbital observada que no puede ser explicada. De las observaciones del pulsar binario PSR 1913+16 se obtuvo una cota adicional: $\dot{G}/G = (1.0 \pm 2.3) \times 10^{-11}\text{año}^{-1}$ [45] (veáse también [46] y [47]). Nótese que la simplificación de que $\dot{P}_b/P_b$ está dominado por $-2\dot{G}/G$ sólo es válida para cuerpos cuyas energía de autogravitación sea despreciable. Cuando estos efectos son tenidos en cuenta la cota es algo más débil dependiendo de la ecuación de estado.

4.4.3 Medias basadas en la estructura y evolucion estelar

La gravedad juega un papel fundamental en la estructura y evolución de las estrellas. Por este motivo una estrella puede ser un buen instrumento para medir la variación de G [52]. Se puede demostrar con facilidad con un simple análisis dimensional que la luminosidad de una estrella es proporiconal a G^7. El aumento de G es de forma efectiva equivalente, por la ecuación de Poisson, a incrementar la masa o densidad media de una estrella, la que incrementa su peso molecular medio y por tanto su luminosidad. Puesto que una estrella más luminosa quema más hidrogeno, la profundidad de la zona convectiva se ve afectada. La helioseismologia [53] nos pérmite comprobar la estructura de los interiores estelares . Comparando el espectro de oscilaciones de modos p (ondas acústicas) de modelos solares con G variable con las observaciones se obtiene: $|\dot{G}/G| \leq 1.6 \times 10^{-12}\text{añ}^{-1}$ [54] .

Como sabemos el balance entre la presión de degenereración de Fermi para un gas de electrones y la fuerza gravitacional determina la conocida como masa de Chandrasekhar

$$M_{Ch} \simeq G^{-3/2} m_p^{-2}, \tag{4.14}$$

donde m_p es la masa del protón. Dado M_{Ch} fija la escala de masas para los últimos estadíos evolutivos de estrellas masivas, es de esperar que la masa media de una estrella de neutrones

venga dada por la masa de Chandrasekhar. Las medidas de las masas de estrellas de neutrones con edades comprendidas entre $z < 3 \sim 4$ proporcionan una cota, $\dot{G}/G = (-0.6 \pm 2.0) \times 10^{-12}$año^{-1} [55].

4.4.4 Nucleosíntesis en el Big Bang

La abundancia de $^4\mathrm{H_e}$ está determinada principalmente por la tasa neutron-proton anterior a la nucleosíntesis, que viene dada aproximadamente por la condición de equilibrio:

$$Y_p = 2\frac{(n/p)_\mathrm{f}\exp(-t_\mathrm{N}/\tau)}{1+(n/p)_\mathrm{f}\exp(-t_\mathrm{N}/\tau)} \tag{4.15}$$

donde $(n/p)_\mathrm{f} = \exp(-Q/kT_f)$ es el cociente neutrón-protón a una cierta temperatura ("freeze-out") que viene determinada por $G_F^2(kT_\mathrm{f})^5 = \sqrt{GN}(kT_\mathrm{f})^2$, siendo N el número de grados de libertad relativistas, $Q = m_\mathrm{n} - m_\mathrm{p} = 1.29$ MeV la diferencia de masas entre el neutrón y el protón, τ el tiempo de vida medio del neutrón, G_F la constante de Fermi y t_N el tiempo después del cual la densidad de fotones se hace lo suficientemente baja para que la fotodisociación sea despreciable.

De la expresión anterior puede verse claramente que T_f viene determinada por la competición entre la tasa de interacción electrodébil y la tasa de expansión del Universo. En función de los acoplos gravitacional y débil se tiene :

$$T_f \propto G_F^{-2/3}G^{1/6}, \tag{4.16}$$

El efecto que tiene la variación de G en las abundancias de elementos primodiales (sobre todo $^4\mathrm{H_e}$) se ve claramente de las ecuaciones (4.15) y (4.16): un aumento de G aumenta la tasa de expansión del Universo, lo que desplaza el "freeze-out" a una época anterior y por tanto, aumenta la abundancia de $^4\mathrm{H_e}$. Si tenemos en cuenta que Y_p esta comprendido entre 0.22 y 0.25 [2] [56] , entonces $-0.32 < \Delta G/G < 0.08$, lo que corresponde a una variación $\dot{G}/G = (-0.55 \sim 2.2) \times 10^{-11}$año^{-1}.

4.4.5 Análisis de los datos y conclusión

Hemos visto en los apartados anteriores que los test de la variación de las constantes constituyen realmente test de la física más fundamental, especialmente de la Relatividad General.

Como podemos ver los datos no son en absoluto concluyentes. De hecho existe una gran contradicción entre algunos de ellos. Los más creíbles son los realizados utilizados por Lunar-Laser-Ranging (Muller et al, 1993 and William et al, 1996). Probablemente, futuras misiones espaciales como el satélite Earth SEE o μSCOPE, misiones a otros planetas y/o mejoras en el lunar-laser-ranging serán un paso decisivo para resolver el problema de las variaciones temporales de G y determinar la confianza en las distintas teorías que la predicen, entre ellas las teorías escalar-tensor.

[2] Y_p se encuentre actualmente entre 0.24 y 0.25

4.5 Resumen y conclusiones

La Relatividad General de Einstein constituye en la actualidad el "modelo estandar" de la gravitación y ha superado con creces todos los test experimentales. Sin embargo, todas y cada una de las predicciones de la teoría Einsteniana se encuentran fijadas, pues la teoría no contiene parámetros ajustables que pudieran ser modificados; es en este sentido - como diría Jose Manuel Sánchez Ron en alguno de sus libros - una teoría de absolutos, más que una teoría de relativos. Cada test de la misma constituye una muerte potencial o una prueba de la existencia de una nueva física. Aunque es de admirar que, nacida del pensamiento puro hace más de 80 años, haya superado todas y cada una de la pruebas a las que ha sido sometida, la posibilidad de encontrar discrepancias continuará en los años venideros. Las teorías escalar-tensor son la alternativa mejor motivada a la Relatividad General. Entre sus "ventajas" con respecto a GR destacamos la presencia de un parámetro ajustable ω y que constituyen el límite a bajas energías de teorías más ambiciosas como la teoría de cuerdas. El valor del parámetro ω se encuentra fuertemente acotado por tres tipos distintos de tests, (i) experimentos realizados en el sistema solar, que imponen fuertes ligaduras a $\ln A(\varphi)$ (acoplo lineal a la materia α_0), (ii) los realizados en el régimen de campo fuerte, que imponen restricciones a su segunda derivada β_0 (acoplo cuadrático a la materia), y (iii) la cosmología. A día de hoy los experimentos no permiten distinguir cual de las dos teorías de la gravitación es la correcta. Quizá las teorías escalar-tensor no sean más que una mera creación matemática fruto de la imaginación humana, pero quizá no ...

Agradecimientos

Me hubiera gustado disponer de un poco más de tiempo para incluir algunos aspectos en mi opinión interesantes. No obstante, creo que en conjunto este trabajo cumple el objetivo que me había propuesto, proporcionar un "lanscape" de las teorías escalar-tensor, y en concreto de la teoría de Brans-Dicke. La elaboración de esta exposición ha llevado una gran cantidad de trabajo. Me gustaría por eso agradecer a los profesores del resto de materias el tremendo esfuerzo que van a tener que realizar para aprobarme sus asignaturas (lo unico que espero es aprobar al menos gravitación y cosmología [3] ...).

[3] Esta es la versión original de esta frase, quizá lo más adecuado ahora sería: "Lo unico que espero es aprobar al menos gravitación y cosmología *en Septiembre*"

Appendix A

Derivación de las ecuaciones de los campos

Dada la acción de Brans-Dicke

$$S_{\mathrm{JBD}} = \frac{1}{16\pi}\int d^4x\sqrt{g}\left(\Phi R - \frac{\omega}{\Phi}g^{\mu\nu}\partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi\right) + S_M, \tag{A.1}$$

las ecuaciones de evolución se pueden obtener con relativa facilidad variando dicha acción con respecto a la métrica al igual que hacíamos para calcular las ecuaciones de Einstein. Variaremos primero $\int d^4x\sqrt{g}\Phi R$. Esto, como es de esperar, debería darnos las ecuaciones de Einstein en ausencia de materia más algunos términos adicionales. Expresando el tensor de Ricci como $R = R^{\mu\nu}g_{\mu\nu}$ y haciendo uso de la propiedad

$$dg = g\ g^{\mu\nu}dg_{\mu\nu},\ \delta\sqrt{g} = \frac{1}{2\sqrt{g}}g^{\mu\nu}\delta_{\mu\nu}, \tag{A.2}$$

se obtiene

$$\int d^4x\sqrt{g}\ \Phi\ R^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = \int d^4x\ \sqrt{g}\ \Phi\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right) + \int d^4x\ \sqrt{g}\ \Phi\ \left(\delta R^{\mu\nu}\right)g_{\mu\nu} \tag{A.3}$$

El primer término es bien conocido, pues es idéntico al que aparece en las ecuaciones de Einstein. El segundo término se anulaba en el caso de Relatividad General al integrar sobre la frontera, sin embargo, veremos que ahora este término también contribuye debido a la presencia del potencial escalar ϕ. Veamos cuanto vale. De la definición de R

$$R = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta}\left(\Gamma^{\gamma}_{\alpha\gamma,\beta} - \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta,\gamma} + \Gamma^{\gamma}_{\alpha\delta}\Gamma^{\delta}_{\gamma\beta} - \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}\Gamma^{\delta}_{\gamma\delta}\right) \tag{A.4}$$

podemos obtener su variación

$$\delta R_{\alpha\beta} = \delta\Gamma^{\gamma}_{\alpha\gamma,\beta} - \delta\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta,\gamma} + \delta\Gamma^{\gamma}_{\alpha\delta}\Gamma^{\delta}_{\gamma\beta} + \Gamma^{\gamma}_{\alpha\delta}\delta\Gamma^{\delta}_{\gamma\beta} - \delta\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}\Gamma^{\delta}_{\gamma\delta} - \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}\delta\Gamma^{\delta}_{\gamma\delta} \tag{A.5}$$

que junto con la definición de la conexión afín

$$\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g^{\gamma\delta}\left(\partial_\alpha\ g_{\beta\delta} + \partial_\beta\ g_{\alpha\delta} - \partial_\delta\ g_{\alpha\beta}\right) \tag{A.6}$$

nos da

$$\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta,\epsilon} = \frac{1}{2}g^{\gamma\delta}\partial_\epsilon\left(\partial_\alpha\ g_{\beta\delta} + \partial_\beta\ g_{\alpha\delta} - \partial_\delta\ g_{\alpha\beta}\right) + \frac{1}{2}\left(\partial_\epsilon g^{\gamma\delta}\right)\left(\partial_\alpha\ g_{\beta\delta} + \partial_\beta\ g_{\alpha\delta} - \partial_\delta\ g_{\alpha\beta}\right) \tag{A.7}$$

$$= \frac{1}{2} g^{\gamma\delta} \partial_\epsilon \left(\partial_\alpha \ g_{\beta\delta} + \partial_\beta \ g_{\alpha\delta} - \partial_\delta \ g_{\alpha\beta} \right) + \frac{1}{4} \left(\partial_\epsilon g^{\gamma\delta} \right) g_{\delta\gamma} \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}.$$

De aquí en adelante continuaremos los cálculos en un sistema de referencia Reimanniano, en el cual los símbolos de Christoffel se anulan y sólo sobreviven sus derivadas. Al final sólo tenemos que tener en cuenta términos en segundas derivadas de la métrica:

$$\delta R^{[\partial\partial g]}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\gamma\delta} \partial_\beta \left(\partial_\alpha \delta g_{\gamma\delta} + \partial_\gamma \delta g_{\alpha\delta} - \partial_\delta \delta g_{\alpha\gamma} \right) - \frac{1}{2} g^{\gamma\delta} \partial_\gamma \left(\partial_\alpha \delta g_{\beta\delta} + \partial_\beta \delta g_{\alpha\delta} - \partial_\delta \delta g_{\alpha\beta} \right) \tag{A.8}$$

$$= \frac{1}{2} g^{\gamma\delta} \left(\partial_\beta \partial_\alpha \delta g_{\gamma\delta} + \partial_\gamma \partial_\delta \delta g_{\alpha\beta} - \partial_\beta \partial_\delta \delta g_{\alpha\gamma} - \partial_\gamma \partial_\alpha \delta g_{\beta\delta} \right) \tag{A.9}$$

y

$$g^{\alpha\beta} \delta R^{[\partial\partial g]}_{\alpha\beta} = g^{\gamma\delta} \left(\partial^2 \delta g_{\gamma\delta} - \partial^\alpha \partial_\delta \delta g_{\alpha\gamma} \right) \tag{A.10}$$

Puesto que las conexiones afines Γ se han omitido a lo largo del desarrollo, podemos reemplazar las derivadas ordinarias por derivadas covariantes.

$$\int \Phi \Big[\Box \left(g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta} \right) - D^\alpha D_\gamma \left(g^{\gamma\beta} \delta g_{\alpha\beta} \right) \Big] \sqrt{g} \ d^4x = \int \Big[g^{\alpha\beta} \Box \Phi - D^\alpha D_\gamma \Phi \Big] \delta g_{\alpha\beta} \sqrt{g} \ d^4x \tag{A.11}$$

Por último la densidad lagrangiana $\mathcal{L}^{\mathcal{M}}$ asociada a la materia y la parte cinética de la densidad lagrangiana de Dicke producen también contribuciones al tensor energía momento. Para el caso de la materia tenemos

$$\delta S^M = \int \delta \left(\sqrt{g} \mathcal{L}^{\mathcal{M}} \right) dx^4 = \int \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \left(\sqrt{g} \mathcal{L}^{\mathcal{M}} \right)}{\partial g_{\alpha\beta}} \delta g_{\alpha\beta} \ d^4x \tag{A.12}$$

Para el tipo de acoplo a la materia considerado podemos suponer que $\frac{\partial \mathcal{L}^{\mathcal{M}}}{\partial g_{\alpha\beta,\gamma}} = 0$. Esto define el tensor electromagnético

$$T^{\alpha\beta} = -\frac{2}{\sqrt{g}} \frac{\partial \left(\sqrt{g} \mathcal{L}^{\mathcal{M}} \right)}{\partial g_{\alpha\beta}} \tag{A.13}$$

Teniendo en cuenta todo lo anterior y las normalizacones se obtiene finalmente las ecuaciones de evolución en la teoría de Brans-Dicke.

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} = \frac{8\pi}{\Phi} \left(T^{\mu\nu}_M + T^{\mu\nu}_\Phi \right) + \frac{1}{\Phi} \left(D^\mu D^\nu \Phi - g^{\mu\nu} \Box \Phi \right), \tag{A.14}$$

donde el tensor electromagnético del campo escalar se puede obtener de la parte cinética de la densidad lagrangiana de Dicke

$$-\frac{\omega}{\Phi} g_{\mu\nu} D^\mu \Phi D^\nu \Phi \tag{A.15}$$

Después de incluir las normalizaciones se obtiene

$$T^{\mu\nu}_\Phi = \frac{\omega}{8\pi\Phi} \left(D^\mu \Phi D^\nu \Phi - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \Box \Phi \right) \tag{A.16}$$

término con el cual recuperamos la expresión (1.15).

Queda por determinar la ecuación de evolución del campo Φ. Para ello hagamos variaciones de la acción (A.1) con respecto a $\delta\Phi$.

$$
\begin{aligned}
\delta S_{JBD} &= \int \left[R\left(\delta\Phi\right) + \omega \tfrac{D_\mu \Phi D^\mu \Phi}{\Phi^2} \delta\Phi - 2\omega \tfrac{D_\mu(\delta\Phi) D^\mu \Phi}{\Phi} \right] \sqrt{g}\; d^4x \\
&= \int \left[R + \omega \tfrac{D_\mu \Phi D^\mu \Phi}{\Phi^2} + 2\omega D_\mu \left(\tfrac{D^\mu \Phi}{\Phi} \right) \right] \left(\delta\Phi\right) \sqrt{g}\; d^4x \\
&= \int \left[R + \omega \tfrac{D_\mu \Phi D^\mu \Phi}{\Phi^2} + 2\omega \left(\tfrac{\Box\Phi}{\Phi} - \tfrac{D^\mu \Phi D_\mu \Phi}{\Phi^2} \right) \right] \left(\delta\Phi\right) \sqrt{g}\; d^4x \\
&= \int \left[R - \omega \tfrac{D_\mu \Phi D^\mu \Phi}{\Phi^2} + 2\omega \left(\tfrac{\Box\Phi}{\Phi} \right) \right] \left(\delta\Phi\right) \sqrt{g}\; d^4x
\end{aligned} \tag{A.17}
$$

Igualando ahora la variación de la acción a cero y teniendo en cuenta que $\delta\Phi$ es arbitrario tenemos

$$
2\omega \left(\frac{\Box\Phi}{\Phi} \right) - \omega \frac{D_\mu \Phi D^\mu \Phi}{\Phi^2} = -R \tag{A.18}
$$

Utilizando ahora la ecuación (A.14)se tiene

$$
-R = \frac{8\pi}{\Phi} \left(T^M + T_\Phi \right) - \frac{1}{\Phi} \left(3\Box\Phi \right). \tag{A.19}
$$

Sustituyendo R y T_Φ llegamos finalmente a:

$$
\Box\Phi = \frac{8\pi}{(3+2\omega)} T^M \tag{A.20}
$$

Appendix B

Otros sistemas estelares para testar la relatividad general

Como vimos, la radiación dipolar es una consecuencia directa de la violación del Principio de Equivalencia Fuerte, y por tanto, en caso de ser descubierta significaría la muerte potencial de la teoría de la Relatividad General, la única teoría que lo satisface. Existen bastantes pulsares de caracter asimétrico, potenciales "generadores" de radiación dipolar, veremos algunos de ellos a continuación. Además el objetivo de esta sección es mostrar, que a pesar de lo prometedor de estos sistemas y a la relativa sencillez teórica de los modelos, las observaciones presentan gran cantidad de dificultades inherentes a las mismas, tales como la transferencia de masa, aceleraciones a tres cuerpos etc...

"Life is not so easy"

B.1 El pulsar 4U1820-30

Se cree que este sistema está constituido por una estrella de neutrones y una enana de baja masa en una órbita con periodo $685.008s$. No es el sistema ideal para testar las teorías de la gravitación debido a que su evolución se ve afectada por la transferencia de masa de la compañera a la estrella de neutrones. De hecho se cree que la transferencia de masa se encuentra controlada por la emisión gravitacional. Debido a estas complicaciones los análisis de las implicaciones de la teoría de Brans-Dicke son independientes de modelos. Will y Zaglauer (1989) generalizaron modelos de transferencia de masa en relatividad general a las teorías de Brans y Dicke.

B.2 El pulsar 1744-24A

Se trata de un pulsar "eclipsante" en el cluster globular Terzan 5, que con un periodo orbital de tan sólo 1.8 horas, $e = 0$, y una función de masa de 3.215×10^{-4}, parece poseer una compañera de tan sólo $0.09 M\odot$. La gran asimetría de este sistema lo transforma en un prometedor emisor de radiación gravitacional dipolar pero las observaciones son complicada debido a la posibilidad de aceleraciones del cluster así como de la aparente existencia de un viento substancial debido a la compañera (la causa de los eclipses), lo que podría complicar el movimiento orbital. Sin embargo, incluso si las medidas de $\dot{P}_b$ alcanzaran solamente el 50 por ciento de la precisión

Parámetros observados y derivados	
Ascension recta, α (J2000)	$11^{\rm h}41^{\rm m}07022(6)$
Declinacion, δ (J2000)	-654519089(9)
Period del pulso, P (ms)	393.8978340370(2)
Época de referencia (MJD)	51369.8525
Medida dispersión $\rm cm^3\ pc^{-1}$	116.048(2)
Derivada del periodo, $\dot{P}$ (10^{-15})	4.294593(3)
Periodo orbital, $P_{\rm b}$ (days)	0.1976509587(3)
Semieje mayor proyectado x (s)	1.85894(1)
Excentricidad orbital, e	0.171876(2)
Epoca del periastro, T_0 (MJD) .	51369.854553(1)
Longitud del periastro, ω ()	42.457(2)
Parámetros Damour-Deruelle PK	
γ (s)	0.00072(3)
$\dot{\omega}$ $(\rm yr^{-1})$	5.3084(9)
$\dot{P}_{\rm b}(10^{-12})$	–0.43(10)
Damour-Deruelle GR fit	
Masa de la compañera, $(\rm M_\odot)$ ..	0.986(20)
Masa del pulsar, $(\rm M_\odot)$	1.30(2)
Suma de masas, M $(\rm M_\odot)$	2.2883(5)
Parámetros derivados	
Inclinacion orbital, i ()	$i > 75$

relativa a la predicción relativista general de $\dot{P}_b/P_b \sim 1.3 \times 10^{-8}$ la cota en ω excedería el valor 1000 (Nice and Thorsett).

B.3 El pulsar J1141-6545

Fue descubierto en 1999. Sus parámetros característicos se muestran al inicio de esta página; no obstante, comentamos a continuación las características más relevantes. Es un sistema "extraño" y joven ($\sim 1.4 Myr$) y por tanto no reciclado, como indica su bajo periodo entre pulsos ($0.4s$). El periodo orbital es corto ($P = 4\ h\ 45\,\rm min$), y por tanto se esperan fuertes efectos relativistas. Se piensa que la compañera es una enana blanca con un 90 por ciento de nivel de confianza, pero la excentricidad de la orbita ($e = 0.17$) es sorprendentemente grande. De hecho casi todos los sistemas binarios constituidos por una estrella de neutrones y una enana blanca tienen una excentricidad despreciable. La explicción más aceptada es que la estrella de neutrones se formó después que la enana blanca. Inicialmente, la masa progenitora era demasiado pequeña como para evolucionar a una estrella de neutrones, pero acretó materia de su compañera, explotando finalmente como una Supernova de tipo Ib/c, dando un "empujón" a la recien nacida estrella de neutrones.

Este pulsar es, por mucho, el sistema que impone unas ligaduras más fuertes a las teorías escalar- tensor, debido a su gran asimetría. Se espera que pruebe valores para los parámetros de Eddington en torno a $|\gamma_{PPN} - 1| \sim 10^{-6}$ en la proxima década.

Bibliography

[1] Juan García Bellido , Apuntes de Gravitación y Cosmología (Curso 2004-2005)

[2] S.Weinberg , Gravitation and Cosmology ,John Wiley ,New York (1972)

[3] C.M.Will , Theory and Experiment in Gravitational Physics , Cambridge University Press, Cambridge ,(1993)

[4] La relatividad general es invariante bajo difeomorfismos , pero no bajo transformaciones conformes . Ver apéndices del libro de [5] para un claro tratamiento de ambos conceptos.

[5] R.M.Wald , General Relativity ,The University of Chicago Press , Chicago ,(1984)

[6] R. d'Inverno , Introducing Einstein's Relativity , Clarenton Press, Oxford (1992)

[7] H.Bondi, J.Samuel ,[gr-qc607009]

[8] J.Barbour, H.Pfister , Mach's Principle-From Newton's Bucket to Quamtum Gravity, Birkhauser, Boston (1995)

[9] Bertotti et al.,Nature **425**,374(2003)

[10] C. Brans, R. H. Dicke, Phys. Rev. 124 (1961) 925

[11] A. Barros, C. Romero, Phys. Lett. A 245 (1998) 31

[12] A.Barros , C.Romero [gr-qc/0304025],(2003)

[13] A.Bhadra [gr-qc/0409091] ,(2004)

[14] J. Lense, H. Thirring, Phys. Z. 19 (1918) 156 (Traducción inglesa de B. Mashhoon, F.W. Hehl, D. S. Theiss, Gen. Rel. Grav. 16 (1984) 711)

[15] J.García-Bellido , M.Quiros ,Phys. Lett. B 243 (1990) 45

[16] A.Miyazaki , [gr-qc/0012104], (2000)

[17] Y.Fujii [gr-qc/0410097], (2004)

[18] Sciama D.W. Mon.Not.Roy.Astron.Soc. 1953 V.113 p.34

[19] C.H.Brans [gr-qc/9705069], (1997)

[20] V.Faraoni [gr-qc/9902083], (1999)

[21] A.Anchordoqui, S.E.Perez , M.L.Trobo ,[gr-qc/9804074] , (1998)

[22] C.T. Cunningham, R.H. Price and V. Moncrief, Astrophys. J. **224**, 643 (1978).

[23] G. Esposito-Farese [gr-qc/0409081] , (2004)

[24] D. Blaschke , M. Dabrowski [hep-th/0407078],(2004)

[25] D.N. Vollick, On the viability of the Palatini form of 1/R gravity,[gr-qc/0312041].

[26] G. Magnano, Are there metric theories of gravity other than general relativity?, [gr-qc/9511027]

[27] L.M. Sokolowski, Uniqueness of the metric line element in dimensionally reduced theories , Class. Quant. Grav. **6**, 59 (1989).

[28] L.M. Sokolowski, Physical versions of nonlinear gravity theories and positivity of energy, Class. Quant. Grav. **6**, 2045 (1989).

[29] M. Shibata, K. Nakao and T. Nakamura, Phys. Rev. D **50**, 7304 (1994).

[30] M. Ferraris, M. Francaviglia and G. Magnano, Remarks on the physical metric in nonlinear theories of gravitation, Class. Quant. Grav **7**, 261 (1990).

[31] G. Magnano, L.M. Sokolowski, On physical equivalence between nonlinear gravity theories and a general-relativistic self-gravitating scalar field , Phys. Rev. D **50**, 5039 (1994) [también en gr-qc/9312008].

[32] L.M. Sokolowski, Universality of Einstein's general relativity, plenary talk at the 14th Conference on General Relativity and Gravitation, Florence, 1995 [gr-qc/9511073].

[33] V. Faraoni, E. Gunzig and P. Nardone, Conformal transformations in classical gravitation theories and in cosmology, Fundam. Cosm. Phys. **20**, 121 (1999) [también en gr-qc/9811047].

[34] S. Bellucci, V. Faraoni and D. Babusci, Scalar gravitational waves and Einstein frame, [hep-th/0103180].

[35] V. Faraoni and E. Gunzig, Einstein frame or Jordan frame?, Int. J. Theor. Phys. **38**, 217 (1999) [también en astro-ph/9910176]

[36] S. Capozziello, R. de Ritis, A. A. Marino, Some aspects of the cosmological conformal equivalence between "Jordan frame" and "Einstein frame", Class. Quant. Grav. **14**, 3243 (1997) [gr-qc/9612053].

[37] R. H. Dicke, Mach's principle and invariance under transformation of units, Phys. Rev. **126**, 2163 (1961).

[38] T. Damour and G. Esposito-Farèse, Class. Quantum Grav. **9**, 2093 (1992).

[39] T. Damour and G. Esposito-Farèse, Phys. Rev. D **53**, 5541 (1996).

[40] T.Oetiker, The Not So Short Introduction to LaTeX2e , Version 4.14 , 2004.

[41] P.A.M. Dirac, Nature **139** (1937) 323.

[42] R.W. Hellings et al., Phys. Rev. Lett. **51** (1983) 1609.

[43] J. Müller, M. Schneider, M. Soffel and H. Ruder, Astrophys.J. **382** (1991) L101.

[44] J.G. Williams, X.X. Newhall and J.O. Dickey, Phys. Rev. D **53** (1996) 6730.

[45] T. Damour, G.W. Gibbons and J.H. Taylor, Phys. Rev. Lett. **61** (1988) 1152.

[46] T. Damour and J.H. Taylor, Astrophys.J. **366** (1991) 501.

[47] V.M. Kaspi, J.H. Taylor and M.F. Ryba, Astrophys.J. **428** (1994) 713.

[48] D.B. Guenther, L.M. Krauss and P. Demarque, Astrophys.J. **498** (1998) 871.

[49] S. E. Thorsett, Phys. Rev. Lett. **77** (1996) 1432.

[50] T.P. Walker, G. Steigman, D.N. Schramm, K.A. Olive and H.-S. Kang, Astrophys.J. **376** (1991) 51.

[51] F.S. Accetta, L.M. Krauss and P. Romanelli, Phys. Lett. **248B** (1990) 146.

[52] E. Teller, Phys. Rev. **73** (1948) 801.

[53] J. Christensen-Dalsgaad, D.O. Gough and M.J. Thompson, Astrophys.J. **378** (1991) 413.

[54] D.B. Guenther, L.M. Krauss and P. Demarque, Astrophys.J. **498** (1998) 871.

[55] S. E. Thorsett, Phys. Rev. Lett. **77** (1996) 1432.

[56] T.P. Walker, G. Steigman, D.N. Schramm, K.A. Olive and H.-S. Kang, Astrophys.J. **376** (1991) 51.

[57] V.N. Melnikov, *Int. J. Theor. Phys.* **33**, 1569 (1994).

[58] V.N. Melnikov. In: "Results of Science and Technology. Gravitation and Cosmology". Ed.: V.N. Melnikov, 1991, v.1, p.49 (in Russian).

[59] V.N. Melnikov, "Multidimensional Classical and Quantum Cosmology and Gravitation. Exact Solutions and Variations of Constants." CBPF-NF-051/93, Rio de Janeiro, 1993; V.N. Melnikov, in: "Cosmology and Gravitation", ed. M. Novello, Editions Frontieres, Singapore, 1994, p. 147.

[60] J.Polchinski "String Theory. vol.1: an introduction to the bosonic string" Cambridge Univ.Press (1998).

[61] Clifford m.Will, Nicolás Yunes 2004 [gr-qc/0403100]

[62] W.F.Davis, Gravitational Radiation in the Bras-Dicke theory and Rosen Bimetric Theories of Gravity with a comparison with General Relativity.