Teora Cuántica de Campos y Cosmología

Javier Rubio Peña †

Capítulo 1

Introduction

1.1. Cuantización del campo escalar

Analicemos las consideraciones anteriores en un caso sencillo. Consideremos un campo escalar masivo real en un espacio tiempo plano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}\left(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi(x) - m^2\phi^2(x)\right) \tag{1.1}$$

La forma más sencilla a primera vista de generalizar esto a un espacio tiempo curvo es la generalización covariante de las ecuaciones de campo libre reemplazando las derivadas ordinarias por derivadas covariantes ∇_i, es decir utilizar la conocida como prescripción de acoplomiento mínimo[1]. La acción resultante será por tanto

$$S = \int \mathcal{L}(x) d^n x \tag{1.2}$$

donde n es la dimensión del espacio. Variando la acción con respecto al campo e igualando a cero obtenemos

$$(\nabla_\mu\nabla^\mu\phi + m^2)\phi(x) = 0,. \tag{1.3}$$

[1]Esto no es más que el resultado de aplicar el principio de equivalencia de Einstein, que nos dice que para conseguir el Lagrangiano de un campo dinámico en un campo gravitacional basta tomar el Lagrangiano invariante Lorentz para el campo en el espacio de Minkowski y

- Reemplazar la métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ por la métrica en la variedad $g_{\mu\nu}$.
- Reemplazar las derivadas ordinarias por derivadas covariantes.
- Multiplicar la densidad Lagrangiana por $\sqrt{-g}$ donde $g = \det g_{\mu\nu}$. Esto garantiza que la acción sea un escalar.

donde

$$\nabla_\mu \nabla^\nu \phi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \frac{\partial \phi}{\partial x^\nu} \right), \quad g = \det g_{\mu\nu} \tag{1.4}$$

Nótese que esta ecuación en el caso de $m = 0$ no es invariante conforme, lo que significa que al transformar la métrica bajo una transformación de la forma

$$g_{\mu\nu} \to g'_{\mu\nu} = e^{-2\sigma(x)} g_{\mu\nu} \tag{1.5}$$

no existe una transformación $\phi \to \phi' = F(\sigma)\phi$ tal que la ecuación preserve su forma. El significado físico de la invarianza conforme es que un campo no masivo no tiene no tiene una escala propia, y como consecuencia debería comportarse de la misma forma en espacios Reimannianos entre los que pueda establecerse una correspondencia del tipo (1.5). Nótese que la invarianza conforme no es una simetría de la naturaleza y por tanto no debería importarnos en absoluto su presencia o no en nuestras ecuaciones, pero tampoco nos estorba, pues podemos incluir un acoplo que nos garantice esa invarianza a través de un cierto parámetro ξ, y hacerlo 0 cuando sea necesario, recuperando el caso anterior. De hecho, en algunos casos, trabajar con una ecuación invariante conforme puede ser útil; por ejemplo, si nos encontramos en una métrica invariante conforme, como la de Friedmann-Robertson-Walker. Parece *intuitivo* pensar que el estudio de la ecuación de Klein-Gordon será más sencilla si *conserva la simetría de la misma.*

Una posible alternativa a la generalización covariante del campo escalar sería abandonar la prescripción de acoplamiento mínimo

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2}\sqrt{-g}\Big[\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi(x) - (m^2 + \xi R(x))\phi^2(x)\Big], \tag{1.6}$$

donde $R = R^\mu_\mu$ es el escalar de curvatura y ξ es una constante que juega un papel similar a m, es un parámetro que especifica nuestra teoría. A la vista del lagrangiano parece aún más evidente la posibilidad de inclusión del acoplo no mínimo, pues el término resultante es del mismo orden que el resto de términos del Lagrangiano. Nótese además que el lagrangiano anterior incluye el caso de un espacio tiempo plano, en el cual el escalar de curvatura R se anula. La correspondiente ecuación de onda, obtenida de la forma habitual sería

$$\left(\Box + \xi R + m^2\right)\phi(x) = 0 \tag{1.7}$$

donde $\Box = \Box_x = \nabla_\mu \nabla^\mu$. Si suponemos $\xi = \xi = (n-2)/[(4n-1)]$, donde n es la dimensión del espacio tiempo, entonces la invarianza conforme del campo escalar queda asegurada. Al realizar una transformación en la métrica del tipo (1.5) y al mismo tiempo una transformación en el campo de la forma

$$\phi(x) \to \phi'(x) = \exp\Big[\frac{n-2}{2}\sigma(x)\Big]\phi(x), \tag{1.8}$$

la ecuación (1.7) con $\xi = \xi_c$ se transforma en

$$\Big(\Box' + \xi_c R' + m^2 \exp[2\sigma(x)]\Big)\, \phi'(x) = 0 \tag{1.9}$$

donde $\Box'$ y R' se calculan en la métrica $g'_{\mu\nu}$.

Comparando (1.7) con (1.9) en el caso en el que $\xi = \xi_c$ la ecuación es invariante conforme. Variando la acción con el lagrangiano (1.6) con respecto a las variables ϕ y $\phi*$ obtenemos el tensor energía momento canónico

$$T^{can}_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi^*(x)\partial_\nu(x) + \partial_\nu \phi^*(x)\partial_\mu \phi(x) - g_{\mu\nu}\sqrt{-g}\mathcal{L}(x), \tag{1.10}$$

y variando con respecto a la métrica $g_{\mu\nu}$ obtenemos el tensor métrico

$$T_{\mu\nu}(x) = T^{can}_{\mu\nu}(x) - 2\xi\Big[R_{\mu\nu} + \nabla_\mu\nabla_\nu - g_{\mu\nu}\nabla_\rho\nabla^\rho\Big]\phi^*(x)\phi(x). \tag{1.11}$$

A diferencia de (1.10), la traza del tensor métrico (1.11) es igual a cero si $\xi = \xi_c$. Se tiene además la ley de conservación

$$\nabla^\mu T^{can}_{\mu\nu}(x) = \nabla^\mu T_{\mu\nu}(x) = 0. \tag{1.12}$$

1.2. Sobre la unicidad y existencia de las soluciones

En un espacio tiempo arbitrario, las condiciones de existencia y unicidad clásica de las soluciones de la ecuación de Klein-Gordon pueden ser muy diferentes de las de un espacio tiempo de Minkowski. Para ilustrar esto, consideremos dos ejemplos sencillos

1. Sea un toro 4-dimensional plano, con periodicidad espacial L y periodicidad temporal T, con T^2/L^2 irracional. En este espacio tiempo, la ecuación de Klein-Gordon con $m = 0$ y $\xi = 0$ admite solo la solución $\phi = constante$

2. Consideremos cualquier espacio con una singularidad de tipo tiempo, como por ejemplo el espacio tiempo de Minkowski con una línea tipo tiempo *borrada*, o la solución de Schwarzschild con masa negativa. Puesto que la ecuación de Klein-Gordon no restringe lo que puede *salir* de una singularidad, no existe posibilidad de unicidad para dicha ecuación con condicones iniciales dadas en una hipersuperficie de tipo espacial.

Nos restringiremos en este trabajo a espacios tiempo donde la dinámica clásica gobernada por la ecuación de Klein-Gordon tenga una buena formulación de valores iniciales, analoga a la del espacio tiempo de Minkowski. Afortunadamente existe una condición sencilla en un espacio tiempo $(M, g_{\mu\nu})$ que garantiza que la ecuación tiene una formulación adecuada de valores iniciales. Centremos nuestra atención en espacios tiempo que sean orientables temporalmente, es decir, tales que podamos hacer una elección contínua a través del espacio tiempo de la mitad del cono de luz que constituye la *dirección futura* y de la mitad que corresponde a la *dirección pasada*. Sea $\Sigma \subset M$ un conjunto cerrado acrono, es decir, ningún par de puntos $p, q \in \Sigma$ se pueden unir por una curva de tipo tiempo. Definimos el dominio de dependencia de Σ por

$$D(\Sigma) = \{p \in M \ / \ cada\ curva\ causal\ inextendible\ a\ traves\ de\ p\ intersecte\ p\} \tag{1.13}$$

Si $D(\Sigma) = M$, se dice que tenemos una superficie de Cauchy para el espacio tiempo $(M, g_{\mu\nu})$. Se tiene entonces, que una superficie de Cauchy es automaticamente una hipersuperficie 3-dimensional, C^0. Si un espacio tiempo admite una superficie de Cauchy, entonces el espacio tiempo es *globalmente hiperbólico*. La definicin técnica de hiperbolicidad global se escapa a la extensión de este trabajo, pero hablando a grandes rasgos, la regin comprendida entre el cono de luz futuro y el cono de luz pasado no es nunca un conjunto compacto, sino que concierne mś precisamente al espacio de curvas que conecta los vértices, más que a las regiones de puntos entre ellos [20].

Un teorema clave relacionado con la estructura de espacios tiempo globalmente hiperbólicos es el siguiente

> **Teorema 1:** Si $(M.g_{\mu\nu})$ es globalmente hiperbólico con superficie de Cauchy Σ, entonces M tiene topología $\Re \times \Sigma$. Además M puede foliarse mediante una familia uniparamétrica de (N-1) superficies de Cauchy suaves Σ_t; es decir, podemos elegir una coordenada temporal *suave* t, tal que cada superficie de t constante es una superficie de Cauchy.

Puesto que cada curva causal se *registra* en una superficie de Cauchy Σ, es de esperar tener una evolución clásica determinista a partir de las condiciones iniciales dadas en Σ. Eso es lo que establecemos para la ecuación de Klein-Gordon en el siguiente teorema

> **Teorema 2:** Sea $(M, g_{\mu\nu})$ un espacio tiempo globalmente hiperbólico con una superficie de Cauchy de tipo espacial suave Σ.

Entonces, la ecuación de Klein-Gordon tiene una correcta formulación de valores iniciales en el siguiente sentido: Dado un par de funciones (C^∞) suaves ($\phi_0, \dot{\phi}_0$) en Σ, existe una única solución ϕ, definida para todo M, tal que en Σ tenemos $\phi = \phi_0$ y $n^\mu \nabla_\mu \phi = \dot{\phi}$, donde n^μ denota un vector unitario normal a Σ orientado hacia el futuro. Además, para cualquier subconjunto cerrado $S \subset \Sigma$, la solución ϕ, restringida a $D(S)$, depende sólo de los valores iniciales en S. Más es, ϕ es suave y varía de manera contínua con los datos iniciales.

El teorema superior sigue siendo válido si añadimos un término fuente a la derecha de la ecuación de Klein-Gordon. Se sigue inmediatamente de la propiedad de dependencia de dominio del teorema que existen funciones de Green avanzadas y retardadas únicas a la ecuación de Klein-Gordon con fuente [21],[22]. Es decir, tenemos

$$\phi(x,t) = \int_\Sigma d^N y \Big[G(\underline{\mathrm{x}}, \underline{\mathrm{y}}) \pi(0,y) - \sqrt{g} g^{0\mu}(\underline{\mathrm{y}}) \frac{\partial}{\partial y^\mu} G(\underline{\mathrm{x}}, \underline{\mathrm{y}}) \phi(0,y) \Big]. \qquad (1.14)$$

donde $G = G_{avan} - G_{ret}$, con G_{adv} y G_{ret} las soluciones fundamentales avanzada y retardada de

$$(\Box + m^2 + \xi R) G = \frac{\delta(\underline{\mathrm{x}} - y)}{\sqrt{g}}. \qquad (1.15)$$

y π es el momento canónico.

En todo lo que sigue restringiremos nuestros resultados a espacios *que se comportan bien*, es decir, globalmente hiperbólicos.

1.3. La ecuación de Dirac en un espacio-tiempo curvo

Consideremos ahora la interacción del campo de Dirac con un campo gravitacional clásico. Necesitamos encontrar una generalización covariante de la ecuación de Dirac. Las dificultades para hacer esto aumentan considerablemente con respecto al caso de espín entero puesto que necesitamos ampliar el concepto de spinor al caso de un espacio tiempo Riemanniano.

El requerimiento de invarianza Lorentz puede ser aplicado en el caso de una geometría Reimanniana sólo de forma local. En casa punto x del espacio tiempo podemos introducir un pseudoespacio euclideo tangente. Como base de este espacio tangente podemos tomar 4 vectores $h^\nu_{(\alpha)}(x)$, usualmente conocidos como *vierbein*, nombre que mantendremos en su forma original. El índice α toma los valores $\alpha = 0, 1, 2, 3$ y los vectores se encuentran normalizados de acuerdo con

$$h^{\nu}_{(\alpha)} h_{(\beta)\nu} = \eta_{\alpha\beta}, \tag{1.16}$$

donde $\eta_{\alpha\beta}$ es la métrica del espacio tangente. Introduzcamos también un conjunto de vectores recíprocos $h^{(\alpha)}_{\nu}$ definido por la condición

$$h^{(\alpha)}_{\nu} h^{\nu}_{(\beta)} = \delta^{\alpha}_{\beta}. \tag{1.17}$$

Además tenemos

$$h^{(\alpha)}_{\mu} h_{(\alpha)\nu} = g_{\mu\nu}. \tag{1.18}$$

En términos de $h^{\mu}_{(\alpha)}$ el elemento de línea se escribe

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} = \eta_{\alpha\beta} \left(h^{(\alpha)}_{\mu} dx^{\mu} \right) \left(h^{(\beta)}_{\nu} dx^{k} \right). \tag{1.19}$$

Ahora, podemos considerar la ecuación de Dirac invariante Lorentz con respecto a rotaciones arbitrarias del *vierbein.* Sin embargo, con respecto a transformaciones generales de coordenadas el spinor es un escalar. El concepto de derivada covariante $\vec{\nabla}_{\mu}$ de un espinor en un espacio Reimanniano se define imponiendo dos condiciones. En primer lugar, para un x fijo la cantidad $\vec{\nabla}_{\mu}\phi(x)$ debe ser un spinor con respecto a trasformaciones del *vierbein.* En segundo lugar, debe comportarse como un cuadrivector con respecto a transformaciones de coordenadas. Estos requisitos nos llevan a la siguiente definición

$$\vec{\nabla}_{\mu}\phi(x) = \left[\partial_{\mu} + \frac{1}{4} C_{\alpha\beta\delta} h^{(\delta)}_{\mu} \gamma^{\beta} \gamma^{\alpha} \right] \phi, \tag{1.20}$$

donde $C_{\alpha\beta\delta}$ son los coeficientes de Ricci, conectados con $h_{(\alpha)\mu}$ mediante

$$C_{\alpha\beta\delta} = \left(\nabla_{\nu} h^{\mu}_{(\alpha)} \right) h_{(\beta)\mu} h^{\nu}_{(\delta)}. \tag{1.21}$$

Reemplazando ahora en la ecuación de Dirac libre las matrices constantes γ por un cuadrivector relativo a transformaciones generales de coordenadas

$$\gamma^{\mu}(k) = h^{\mu}_{(\alpha)}(x) \gamma^{\alpha}, \tag{1.22}$$

obtenemos la generalización covariante de la ecuación de Dirac

$$\left(i\gamma^{\mu}(x) \vec{\nabla}_{\mu} - m \right) \phi(x) = 0. \tag{1.23}$$

que resulta a través de las ecuaciones de Euler-Lagrange de

$$\mathcal{L}(x) = \sqrt{-g} \Big\{ \frac{i}{2} \Big[\overline{\phi}(x) \gamma^{\mu}(x) \vec{\nabla}^{\mu}(x) \phi(x) - \left(\vec{\nabla}_{\mu} \overline{\phi}(x) \right) \gamma^{\mu}(x) \phi(x) \Big] - m \overline{\phi}(x) \phi(x) \Big\}. \tag{1.24}$$

de donde obtenemos el tensor métrico

$$T_{\mu\nu}(x) = \frac{i}{4}\Big[\overline{\phi}(x)\gamma_\nu(x)\vec{\nabla}_\mu\phi(x)+\overline{\phi}(x)\gamma_\mu(x)\vec{\nabla}_\nu\phi(x)-\left(\vec{\nabla}_\mu\overline{\phi}(x)\right)\gamma_\nu(x)\phi(x)-\left(\vec{\nabla}_\nu\overline{\phi}(x)\right)\gamma_\mu(x)\phi(x)\Big] \tag{1.25}$$

y la cuadricorriente

$$J_\nu(x) = \overline{\phi}(x)\gamma_\nu(x)\phi(x). \tag{1.26}$$

A diferencia de la ecuación de Klein-Gordon la ecuación de Dirac en un espacio tiempo curvo es invariante conforme en el caso $m = 0$ sin necesidad de añadir modificaciones adicionales si efectuamos simultaneamente una transformación en el campo de la forma

$$\phi(x) \to \phi'(x) = \exp\Big[\frac{n-1}{2}\sigma(x)\Big]\phi(x). \tag{1.27}$$

Como consecuencia, el tensor métrico coincide con el tensor energía momento canónica tras simetrizar en los índices μ y ν.

1.4. Interacción del campo de Dirac con un campo escalar

En el caso de existir algún otro campo escalar externo U interactuando con el campo de Dirac todas las cantidades de interés se puede obtener a través de la teoría libre realizando la sustitución $m \to m + U$. Por ejemplo la ecuación de campo correspondiente tendría la forma

$$\Big[i\gamma^\mu\partial_\mu - (m+U)\Big]\phi(x) = 0. \tag{1.28}$$

1.5. Producto interno de soluciones

Un concepto interesante es el del producto interno de un par de soluciones de la ecuación de Klein-Gordon. Se puede generalizar a partir del producto escalar entre dos campos escalares para el espacio-tiempo plano.

$$(f_1, f_2) = -i\int(f_1\partial_0 f_2^*)d^3x \tag{1.29}$$

Para un espacio-tiempo tipo Minkowski el producto escalar de dos campos escalares estaba relacionado con una integral a todo el espacio ($\mathcal{R}3$) y derivadas temporales de los campos. Ahora vamos a integrar sobre hipersuperficies correspondientemente perpendiculares a la coordenada respecto a la cual estamos integrando. Además, aparece en la definición el determinante de la métrica de esa hipersuperficie de modo que el elemento de superficie de la integral sea un escalar. Tenemos

$$(f_1, f_2) = i \int (f_2^* \partial_\mu f_1) \sqrt{-g} d\Sigma^\mu, \tag{1.30}$$

donde $d\Sigma^\mu = d\Sigma n^\mu$, siendo Σ el volumen elemental de una hipersuperficie espacial y n^μ un vector unidad tipo tiempo normal a dicha hipersuperficie. Nótese que el producto interno no es definido positivo. La propiedad crucial de este producto que define una estructura simplectica *natural*, donde *natural* significa que el producto interno es independiente de la elección de la hipersuperficie. Es decir, si Σ_1 y Σ_2 son dos superficies diferentes que no se intersecan tenemos

$$(f_1, f_2)_{\Sigma_1} = (f_1, f_2)_{\Sigma_2} \tag{1.31}$$

La demostración es sencilla. Asumamos que f_1 y f_2 son soluciones de la ecuación de KG. Además, si el espacio es tal que las hipersuperficies son no compactas, asumiremos que estas funciones se anulan en el infinito. Sea V el volumen cuatridimensional limitado por Σ_1 y Σ_2 y, si es necesario con fronteras de tipo tiempo en las cuales $f_1 = f_2 = 0$. Podemos escribir

$$(f_1, f_2)_{\Sigma_2} - (f_1, f_2)_{\Sigma_1} = i \int_{\partial V} (f_2^* \partial_\mu f_1) \sqrt{-g} d\Sigma^\mu = i \int_V \nabla_\mu (f_2^* \partial_\mu f_1) \sqrt{-g} dV, \tag{1.32}$$

donde en el último paso hemos utilizado la versión tridimensional de la ley de Gauss, y dV es el volumen de volumen cuatridimensional. Podemos reescribir el integrando como

$$\sqrt{-g}(\nabla_\mu (f_2 \partial_\mu f_1)) = \sqrt{-g}(\nabla_\mu (f_2^* \partial_\mu f_1 - f_1 \partial_\mu f_2^*)) = \sqrt{-g}(f_2^* \Box f_1 - f_1 \Box f_2^*) = 0 \tag{1.33}$$

donde hemos usado la ecuación de Klein-Gordon en el último paso.

1.6. Cuantización canónica en un espacio tiempo curvo

1.6.1. Idea del método

La cuantización de un campo en un espacio tiempo curvo, generalmente no homogéneo y no estacionario, se puede llevar a cabo por métodos canónicos. Supongamos una foliación del espacio-tiempo en hipersuperficies espaciales. Sea Σ una hipersuperficie particular caracterizada por un valor de la coordinada temporal t. La cuantización del campo $\phi(x)$ se lleva a cabo imponiendo las relaciones de conmutación (o anticonmutación canónicas) de la forma

$$[\phi(t,\mathbf{x}),\phi(t,\mathbf{x'})]_{\mp}=[\pi(t,\mathbf{x}),\pi(t,\mathbf{x'})]_{\mp}=0, \tag{1.34}$$

$$[\phi(t,\mathbf{x}),\pi(t,\mathbf{x'})]_{\mp}=i\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x'}), \tag{1.35}$$

donde π es el momento canónico conjugado de ϕ, $\pi=\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\dot{\phi}}$, y $\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x'})$ es una función delta en la hipersuperficie con la propiedad

$$\int \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x'})d\Sigma=1. \tag{1.36}$$

1.6.2. El espacio de Fock

Consideremos ahora el procedimiento de segunda cuantización y de la construcción de un espacio de Fock para un campo ϕ. Sea $\{\phi_i^+(x),\phi_i^-(x)\}$ un conjunto de soluciones clásicas normalizadas de la ecuación de ondas para el campo considerado, constituyendo un conjunto ortonormal que satisface

$$(\phi_i^+(x),\phi_j^+(x))=\mp\delta_{ij} \tag{1.37}$$

$$(\phi_i^-(x),\phi_j^-(x))=\delta_{ij} \tag{1.38}$$

$$(\phi_i^+(x),\phi_j^-(x))=0, \tag{1.39}$$

donde el índice i numera soluciones; los índices $(\pm)$ corresponden a soluciones con energía positiva o negativa, y los signos $\mp$ se relacionan con bosones y fermiones. El conjunto $\{\phi_i^+(x),\phi_i^-(x)\}$ junto con los productos internos anteriores define un espacio de Hilbert H. Siendo H el espacio de Hilbert de *una partícula* definimos el espacio de Fock de estados del campo como

$$\mathcal{F}(\mathcal{H})=\mathcal{C}\oplus\Big[\oplus_{n=1}^{\infty}\otimes_X^n\mathcal{H}\Big] \tag{1.40}$$

donde $\mathcal{C}$ son números complejos y $\otimes_X$ es el producto directo simetrizado $(X=S)$ o antisimetrizado $(X=A)$, según se trate de bosones o fermiones. Cualquier estado del campo $\psi\in\mathcal{F}$ se escribe en la forma

$$\psi=(\psi_0,\psi_1,\psi_2,\ldots), \tag{1.41}$$

donde ψ_0,ψ_1,ψ_2 son las proyecciones en el espacio de estados de $0,1,2...$ *partículas*. Podemos definir una transformación

$$a^-(\phi^-):\mathcal{F}(\mathcal{H})\longrightarrow\mathcal{F}(\mathcal{H}) \tag{1.42}$$

de forma que los operadores a_i asociados a los ϕ son de la forma

$$a^-(\phi^-)\psi=(\phi^-\cdot\psi_1,\sqrt{2}\phi^-\cdot\psi_2,\ldots) \tag{1.43}$$

y los adjuntos

$$a^+(\phi^+)\psi = (0, \psi_0\phi, \sqrt{2}\psi_1 \otimes \phi^+, \ldots). \tag{1.44}$$

Si definimos los dominios de a^- y a^+ de manera que sean subespacios de $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ tales que las normas del lado derecho de las ecuaciones anteriores sean finitas, es fácil verificar que a^+ es el adjunto de a^-.

1.6.3. Foliación del espacio tiempo

La construcción de un hamiltoniano, o la identificación de un momento canónico, implica derivadas de la acción. Para realizar estas derivadas es necesario privilegiar un sistema de coordenadas o dirección en el espacio-tiempo. La manera usual es utilizar el formalismo desarrollado por Arnowitz, Dresser y Misner, conocido como ADM o foliación $3+1$.

Sea $(M, g_{\mu\nu})$ un espacio tiempo globalmente hiperbólico. Para obtener una formulación de espacio de fases de la ecuación de Klein-Gordon, debemos introducir un *slicing* de M por superficies de Cauchy de tipo espacial Σ_t, denotadas por el parámetro t. La métrica $g_{\mu\nu}$ induce una métrica $h_{\mu\nu}$ en cada Σ_t

$$g_{\mu\nu} = n_\nu n_\nu - h_{\mu\nu}. \tag{1.45}$$

donde n^μ es un vector normal a Σ dirigido hacia el futuro. Introducimos ahora un campo vector de *evolución temporal*, t^μ, en M, satisfaciendo $t^\mu\nabla_\mu t = 1$. Descompongamos t^μ como

$$t^\mu = Nn^\mu + N^\mu \tag{1.46}$$

donde n^μ es el vector normal a Σ_t y N_μ es tangencial . Nos referiremos en lo que sigue a N como la función *lapse* y a N^μ como el vector *shift*. La interpretación es sencilla: la función *lapse* está relacionada con la separación entre hipersuperficies, mientras que la función *shift* tiene que ver con el movimiento de un punto al pasar de una hipersuperficie a otra.

Introducimos ahora coordenadas locales t, x^1, x^2, x^3 con $t^\mu\nabla_\mu x^i = 0$, y $i = 1, 2, 3$, tal que $t^\mu\nabla_\mu = \partial t$ y $N^\mu\partial_\mu = N^i\partial_i$. En estas coordenadas la métrica se escribe

$$ds^2 = (Ndt)^2 - h_{ij}(Ndt + dx^i)(N^j dt + dx^j) \tag{1.47}$$

y además

$$(\partial\phi)^2 = \frac{1}{N^2}(\partial_0\phi - N^i\partial_i\phi)^2 - h^{ij}\partial_i\phi\partial_j\phi. \tag{1.48}$$

El determinante g de la métrica cuadridimensional se relaciona con el de la métrica tridimensional mediante $g = -N^2h$. Introduciendo todo lo anterior en la acción de Klein-Gordon tenemos

$$S = \int \mathcal{L} dt \tag{1.49}$$

con

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\int_{\Sigma_t}\Big[-(n^\mu \nabla_\mu \phi)^2 + h^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - m^2\phi^2\Big]N\sqrt{h}d^3x \tag{1.50}$$

Usando la relación

$$n^\mu\nabla_\mu\phi = \frac{1}{N}(t^\mu - N^\mu)\nabla_\mu\phi = \frac{1}{N}\dot{\phi} - \frac{1}{N}N^\mu\nabla_\mu\phi \tag{1.51}$$

encontramos que la densidad de momento, π, canonicamente conjugado a la variable ϕ en Σ_t, viene dado por

$$\pi = \frac{\delta S}{\delta\dot{\phi}} = (n^\mu\nabla_\mu\phi)\sqrt{h} \tag{1.52}$$

Por tanto, un punto del espacio de fases clásico $\mathcal{M}$, de la ecuación de Klein Gordon en un espacio-tiempo curvo, consiste en la especificación de las funciones $\phi(x)$ y $\pi(x)$ en una superficie de Cauchy Σ_0. Para que todas las estructuras estén matemáticamente bien definidas, especificamos $\mathcal{M}$ requiriendo que π y ϕ sean suaves. Sea $\mathcal{S}$ el espacio de soluciones de la ecuación de Klein-Gordon resultantes de los datos iniciales en $\mathcal{M}$. Por el Teorema 2 de la sección 1.2 cada $[\phi,\pi] \in \mathcal{M}$ da lugar a un único elemento de $\mathcal{S}$, de forma que podemos identificar $\mathcal{M}$ y $\mathcal{S}$. Además este teórema implica que $\mathcal{S}$ es independiente de la elección de Σ_0 pues $[\phi,\pi]$ serán suaves en la superficie de Cauchy Σ_0 si y sólo si es suave en todas las superficies de Cauchy. Nótese que la evolución dinámica en $\mathcal{M}$ a tiempo t corresponde a evaluar los elementos asociados de $\mathcal{S}$ y los momentos canonicamente conjugados π en la superficie Σ_t.

Impongamos las relaciones de conmutación canónicas a tiempos iguales

$$[\phi(t,\mathbf{x}),\phi(t,\mathbf{x'})]_\mp = [\pi(t,\mathbf{x}),\pi(t,\mathbf{x'})]_\mp = 0, \tag{1.53}$$

$$[\phi(t,\mathbf{x}),\pi(t,\mathbf{x'})]_\mp = i\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x'}). \tag{1.54}$$

ϕ y π son ahora operadores autoadjuntos, con ϕ satisfaciendo la ecuación de Klein-Gordon. Además tenemos las ecuaciones para los campos

$$i\dot{\pi} = [\pi, H] \qquad i\dot{\phi} = [\phi, H] \tag{1.55}$$

donde H es el hamiltoniano

$$H = \int_{\Sigma_t} d^3x(\pi\dot{\phi} - \mathcal{L}). \tag{1.56}$$

1.6.4. Segunda cuantización

Podemos representar el campo ϕ por la expansión

$$\phi(x) = \sum_i \left[a_i \phi_i^-(x) + a_i^+ \phi_i^+\right], \tag{1.57}$$

donde asumimos suma sobre los índices discretos e integración sobre los contínuos y los coeficientes a_i y a_i^+ son los operadores de aniquilación y creación respectivamente que se siguen de las relaciones de ortogonalidad

$$a_i = (\phi_i^-, \phi) \quad a_i^+ = \mp(\phi_i^+, \phi). \tag{1.58}$$

De las relaciones de conmutación canónicas se obtienen (1.53) y (1.54) se siguen las relaciones de conmutación para los operadores de creación y aniquilación

$$\left[a_i^\pm, a_j^\pm\right]_\mp = 0, \quad \left[a_i^{-*}, a_j^+\right]_\mp = \left[a_i^-, a_j^{+*}\right]_\mp = \delta_{ij}. \tag{1.59}$$

Los operadores introducidos anteriormente se deben definir como operadores en algún espacio de Hilbert. Un estado de vacío en el espacio de Fock viene definido por

$$a_i|0\rangle = a_i^*|0\rangle = 0, \quad \langle 0|0\rangle = 1, \tag{1.60}$$

donde $a_i^- \equiv a_i$, adoptaremos esta notación de aquí en adelante por simplicidad. Un estado normalizado que contenga n partículas y m antipartículas se puede reprensentar de la forma

$$|j_1, \ldots, j_n; j_1, \ldots, j_m\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_1! \ldots n_s! m_1! \ldots m_r!}} \prod_{k=1}^{n} a_{j_k}^{+*} \prod_{l=1}^{m} a_{i_l}^+|0\rangle, \tag{1.61}$$

Se supone además que en un estado dado hay n_i, m_i bosones y antibosones con los mismos números cuánticos j, i ; para fermiones $n_1 = \ldots = n_s = m_1 = \ldots = m_r = 1$. Los operadores creación y destrucción actuan en los estados que contienen n bosones idénticos con números cuánticos i de la forma

$$a_i^{+*} = \sqrt{n+1}|(n+1)_i\rangle \quad ; \quad a_i|n_i\rangle = \sqrt{n}|(n-1)_i\rangle \tag{1.62}$$

Si consideramos operadores bilineares en $a_i^\pm$

$$N_j = a_j^{+*} a_j \ ; \ \tilde{N}_i = a_i^+ a_i^* \ ; \ N = \sum_j N_j \ ; \ \tilde{N} = \sum_i \tilde{N}_i, \tag{1.63}$$

los valores de expectación son

$$\langle j_1, \ldots, j_n; i_1, \ldots, i_m|N_{j_\alpha}|j_1, \cdots, j_n; i_1, \ldots, i_m\rangle = n_\alpha; \tag{1.64}$$

$$\langle j_1, \ldots, j_n; i_1, \ldots, i_m | N | j_1, \ldots, j_n; i_1, \ldots, i_m \rangle = \sum_{\alpha=1}^{s} n_\alpha = n, \tag{1.65}$$

e identico resultado para los operadores tildados. Los operadores bilineares definidos (1.63) son el densidad espacial de número de partículas (antipartículas) y el número total de partículas respectivamente. Los valores de expectación de dichos operadores en el estado $|0\rangle$ son cero.

En el espacio de Fock existe una regla de superselección: aquellos operadores que no conmuten con los operadores N y $\tilde{N}$ no son observables.

El número de partículas en la representación de Fock puede ser arbitrario pero necesariamente es finito.

Todas las consideraciones anteriores se basaban en algún conjunto ortonormal completo de soluciones clásicas $\{\phi_i^+(x), \phi_i^-(x)\}$. En el espacio de Minkowski las autofunciones del operador translación temporal ∂_t, generador del grupo de Poincaré, forman un conjunto válido de soluciones de este tipo, y ϕ^+ se interpreta como la solución de frecuencia negativa y ϕ^- como la solución de energía negativa. El vacío $|0\rangle$ resulta ser invariante bajo transformaciones del grupo de Poincare, y por tanto, el procedimiento de construcción de un espacio de Fock para campos libres cuantizados no es en absoluto ambiguo. Sin embargo, en un espacio curvo la situación es bastante diferente. La invarianza bajo translaciones en el tiempo desaparece, y nos es imposible introducir un operador de translación temporal cuyas autofunciones sean $\phi_i^\pm$.[2] La interpretación de los elementos del conjunto ortonormal de soluciones como soluciones de frecuencia positiva o negativa en un momento dado del tiempo carece de sentido. Un conjunto ortonormal de soluciones diferente adquiere la misma importancia que el dado. Véase el capitulo siguiente para profundizar en este aspecto.

Elijamos una base distinta a la base $\{\phi_i^+(x), \phi_i^-(x)\}$ anterior, $\{\psi_i^+(x), \psi_i^-(x)\}$. Podemos imaginar que estamos considerando un espacio tiempo asintoticamente plano en el pasado y en el futuro, pero que no es plano en los estados intermedios. Podemos asociar la primera de las bases al estado *pasado* y la segunda al estado *futuro* y construir ambas de manera que sean ortonormales, satisfaciendo las relaciones (1.37). Aunque hemos definido estos conjunto de soluciones por sus propiedades asintóticas en las diferentes regiones, siguen siendo soluciones de la ecuación de ondas en todo el espacio tiempo. Esto nos permite expandir una de las bases en términos de la otra

$$\phi_i^+ = \sum_j \left(\alpha_{ij} \psi_j^+ - \beta_{ij} \psi_j^- \right); \tag{1.66}$$

$$\phi_i^- = \sum_j \left(\alpha_{ij}^* \psi_j^- \mp \beta_{ij}^* \psi_j^+ \right), \tag{1.67}$$

[2]Veáse el capítulo siguiente para una discusión más profunda de este aspecto

donde α_{ij},β_{ij} son algunas matrices infinitas y los signos $\mp$ corresponden a los casos bosónico y fermiónico. Representemos ahora el campo en la expansión

$$\phi(x) = \sum_i \left[\psi_i^-(x)b_i + \psi_i^+(x)b_i^+\right], \tag{1.68}$$

donde $b_i \equiv b_i^-$. De las expresiones (1.57),(1.66),(1.68) se obtiene que los operadores a_i están conectados con los operadores a_j a través de las conocidas como transformaciones de Bogoliubov

$$a_i = \sum_j \left(\alpha_i j b_j + \beta_{ij} b_j^+\right); \tag{1.69}$$

$$a_i^* = \sum_j \left(\alpha_{ij} b_j^* \pm \beta_{ij} b_j^{+*}\right). \tag{1.70}$$

La ortogonalidad de las bases $\phi_i^\pm$,$\psi_i^\pm$ implica que los coeficientes satisfacen

$$(\alpha^+\alpha \mp \beta^T\beta^*)_{ij} = \delta_{ij}; \tag{1.71}$$

$$\alpha^+\beta = \beta^+\alpha^*. \tag{1.72}$$

La inversa de las transformaciones tiene la forma

$$b_i = \sum_i (\alpha_{ij}^+ a_j - \beta_{ij}^T a_j^+) \tag{1.73}$$

$$b_i^* = \sum_i (\alpha_{ij}^+ a_j^* \mp \beta_{ij}^T a_j^{*+}). \tag{1.74}$$

Usando los nuevos operadores $b^\pm$ podemos construir un nuevo vacío definido por

$$b_i|\tilde{0}\rangle = b_i^*|\tilde{0}\rangle \qquad \langle\tilde{0}|\tilde{0}\rangle = 0 \tag{1.75}$$

y estados normalizados que contienen p partículas y q antiparticulas

$$|w_p, \ldots, w_p; z_1, \ldots, z_m\rangle = \frac{1}{\sqrt{p_1! \ldots p_u! q_1! \ldots q_v!}} \prod_{k=1}^{p} b_{w_k}^{+*} \prod_{l=1}^{q} b_{z_l}^+|\tilde{0}\rangle. \tag{1.76}$$

El número medio de partículas en la región *futura* será por tanto

$$\langle N_k\rangle = \langle 0|b_i^+ b_i|0\rangle = \sum_i |\beta_{ij}|^2. \tag{1.77}$$

y el número total vendrá dado por

$$\langle N_{total}\rangle = \sum_k |\beta_k|^2, \tag{1.78}$$

donde la suma puede interpretarse como una integral cuando sea necesario. Por tanto, si cualquiera de los coeficientes β_{ij} son distintos de cero, es decir, si ocurre cualquier mezcla de soluciones de frecuencia positiva y negativa, entonces el campo gravitacional crea partículas.

Una pregunta natural ante el resultado anterior es si el número de partículas creadas es o no fínito. Responderemos a esa pregunta en algunos casos concretos en el siguiente capítulo.

Capítulo 2

Sobre el vacío y las partículas

I think that a particle must have a separate reality independent of the measurements. That is an electron has spin, location and so forth even when it is not being measured. I liked to think that the moon is there even if I am not looking it
A. Einstein (1879-1955)

Shall I refuse my dinner just because I do not fully understand the process of digestion?
Oliver Heaviside (1850-1925)

2.1. Introducción

Sería cobarde por mi parte no abordar el problema del concepto de partícula en un espacio-tiempo no estacionario, aun a riesgo de equivocarme. No pretendo hacer una discusión excesivamente formal de este aspecto, ya que ello me llevaría a introducir conceptos y matemáticas que desviarían la atención del tema central. Más bien intentaré guiar al lector a través de una serie de razonamientos y cálculos sencillos, que espero consigan convencerle de la ambiguedad y no necesidad del concepto de partícula en lo que se refiere a la construcción de la teoría.

2.2. El efecto Unruh

En la capítulo anterior anterior hemos llegado a la conclusión de que es posible definir un gran número de vacíos en un espacio tiempo curvo diferentes entre sí. Nuestro concepto *habitual* de un vacío físico es un estado sin partculas. Cúal de todos los conjuntos de modos posibles da lugar a la "mejor"descripción de un vacío físico?. La respuesta a esta pregunta no es tan sencilla como podría parecer, pues, como todo físico debe a lo largo de su vida recordar, en la construcción de una teoría no basta con una formulación de la misma en el sentido axiómatico sino que es necesario especificar también los detalles del proceso de medición que se usa para detectar la presencia de cuantos [1]. De hecho, el estado de movimiento del instrumento de medida puede afectar a la hora de determinar si se observan o no partículas.

Veamos esto en un caso sencillo: el espacio tiempo de Minkowski. Supongamos un detector de partículas que se mueve a lo largo de la línea de universo descrita por las funciones $x^\mu(\tau)$[2], donde τ es el tiempo propio. Describiremos el campo de interacción del detector por el Lagrangiano de interacción $cm(\tau)\phi[x(\tau)]$, donde c es un acoplo pequeño y m es el operador momento monopolar [3] del detector. Supongamos que el campo ϕ est en el estado de vacío $|0_M\rangle$ definido por $a_{\mathbf{k}}|0_M\rangle = 0$ para cualquier $\mathbf{k}$, donde el subíndice significa *vacío de Minkowski*. Para una trayectoria general, el detector no permanecerá en su estado fundamental E_0, sino que pasará a un estado excitado $E > E_0$, mientras que el campo haga una transición a un estado excitado $|\psi\rangle$. Para un acoplo c suficientemente pequeño la amplitud de esta transición vendrá dada a primer orden en teoría de perturbaciones por

$$ic\langle E, \psi| \int_{-\infty}^{\infty} m(\tau)\phi[x(\tau)]d\tau|\ 0_M, E_0\rangle, \tag{2.1}$$

donde, en el caso de que el detector se *apagara* de manera adiabática fuera de algún intervalo podríamos restringir los límites de integración a ese intervalo.

[1] Las corrientes serían en principio las cantidades más obvias que una desearía medir. Sin embargo, las medidas de $T_{\mu\nu}$ y j^μ, adecuadamente renormalizados, es bastante difícil de llevar a cabo. La única forma de medir $T_{\mu\nu}$ es medir el campo gravitacional que produce, lo que requiere medidas del campo gravitacional en muchos puntos en torno a la región en la que se desea conocer $T_{\mu\nu}$. Además, puesto que $T_{\mu\nu}$ no es por si mismo un observable (es decir, invariante bajo difeomorfismos), debemos introducir un sistema de coordenadas físico en el que proyectarlo. Un sistema de coordenadas físico se necesita también para medir el campo gravitacional en si mismo (es decir, el tensor de Riemann) de una forma no ambigua. Consideraciones similares se tienen para j^μ. La única forma de medirlo es medir el campo de Yang-Mills que produce. De nuevo, debemos hacer medidas en muchos puntos y emplear técnicas adecuadas que aseguren que estamos tratando con cantidades invariantes gauge. Por todo lo anterior, y con el objeto de conseguir simplicidad, nos centramos en una prueba más directa del campo.

[2] Asumimos que estas funciones vienen dadas, de manera que no debemos añadir ninguna cantidad para describir la dinámica del detector.

[3] En el mundo real el primer campo no masivo de importancia en el campo electromagnético. Según esto deberíamos introducir un detector bipolar. En ese caso, la amplitud de probabilidad dependería no solamente del estado de movimiento del detector, sino también de la forma en que varía la orientación espacial del dipolo con el tiempo propio. Esta complicación extra se omite aquí puesto que no aporta nada nuevo a las ideas principales.

La evolucíon de $m(\tau)$ se escribe

$$m(\tau) = e^{iH_0\tau} m(0) e^{-iH_0\tau}, \tag{2.2}$$

donde $H_0|E\rangle = E|E\rangle$. Con esto, la amplitud de transición se escribe

$$ic\langle E|m(0)|E_0\rangle \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(E-E_0)\tau} \langle\psi|\phi(x)|0_M\rangle d\tau. \tag{2.3}$$

Si expandimos ϕ en términos de los modos de onda plana usuales en el espacio de Minkowski, resulta evidente, que, a este orden en teoría de perturbaciones, sólo podemos tener transiciones al estado conteniendo un cuanto de frecuencia $\omega = (|\mathbf{k}|^2 + m^2)^{1/2}$, $|\psi\rangle = |1_{\mathbf{k}}\rangle$. Tenemos entonces, con la normalización usual,

$$\langle 1_{\mathbf{k}}|\phi(x)|0_M\rangle = \int d^3k'(16\pi^3\omega)^{-1/2}\langle 1_{\mathbf{k}}|a^+_{\mathbf{k'}}|0_M\rangle e^{-i\mathbf{k'}\ \mathbf{x}+i\omega' t} = (16\pi^3\omega)^{-1/2} e^{-i\mathbf{k}\ \mathbf{x}+i\omega t}. \tag{2.4}$$

Nótese que $\mathbf{x}$ en la ecuación anterior no es una variable independiente, sino que viene determinada por la trayectoria del detector. Supongamos que sigue una línea de universo inercial, es decir,

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}t = \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}\tau(1 - v^2)^{-1/2} \tag{2.5}$$

donde $\mathbf{x}_0$ y $\mathbf{v}$ son constantes, con $|\mathbf{v}| < 1$. Con esto, la integral en la ecuación (2.3) se escribe

$$c(16\pi^3\omega)^{-1/2} e^{-i\mathbf{k}\ \mathbf{x}_0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(E-E_0)\tau} e^{i\tau(\omega-\mathbf{k}\ \mathbf{v})(1-\mathbf{v}^2)^{-1/2}} d\tau \tag{2.6}$$

$$= (4\pi\omega)^{-1/2} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}_0} \delta(E - E_0 + (\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})(1 - v^2)^{-1/2}). \tag{2.7}$$

Siempre y cuando $\mathbf{k}\cdot\mathbf{v} \leq |\mathbf{k}||\mathbf{v}| < \omega$ y $E > E_0$, el argumento de la función δ será positivo y la amplitud de transición se anula. La transición es prohibida en base a la conservación de la energía, una consecuencia directa de la invarianza Poincaré. Sin embargo, siempre podíamos haber elegido una trayectoria más complicada, de forma que la integral de la ecuación (2.3) podría no dar lugar a una función delta y el resultado sería distinto de cero. En ese caso, es interesante calcular la probabilidad de transición a todas las posibles E y ψ, que se obtiene elevando al cuadrado el módulo de la ecuación (2.3), y sumando sobre E y el conjunto completo de ψ, obteniéndose

$$c^2 \sum_E |\langle E|m(0)|E_0\rangle|^2 \mathcal{F}(E - E_0), \tag{2.8}$$

donde

$$\mathcal{F}(E) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' e^{-iE(\tau-\tau')} G^+(x(\tau), x(\tau')), \tag{2.9}$$

es la función respuesta del detector[4], y es independiente de los detalles del mismo y determinada por la función de Wightman Green de frecuencia positiva G^+ definida por

$$G^+(x, x') = \langle 0|\phi(x)|\phi(x')|0\rangle. \tag{2.10}$$

Esta función respuesta representa el baño de *partículas* que experimente el detector como resultado de su movimiento. El factor adicional en la ecuación (2.8) representa la *selectividad* del receptor a ese baño, y depende claramente de la estructura del mismo.

Vemos que el detector en un movimiento no inercial, y por tanto acelerado, absorbe energía y tienen lugar transiciones a estados excitados, como si estuvieramos bañados por radiación térmica. Por otro lado tenemos $\langle 0_M| : T_{\mu\nu} : |0_M\rangle = 0$. Transformando a un sistema acelerado tenemos $\langle 0_M| : T'_{\mu\nu} : |0_M\rangle = 0$, de forma que ambos observadores, inercial y no inercial, !están de acuerdo en que el tensor energía momento del campo se anula!. Nuevamente el fenómeno es una indicación de que el concepto tradicional de partícula sólo es aplicable en circunstancias muy restrictivas.

Nos surge ahora de manera inmediata la pregunta: Si el estado $|0\rangle$ no puede suministrar la energía necesaria al detector, cómo podemos reconciliar dicha excitación con el principio de conservación de la energía?. Además la transición que eleva la energía del detector de E_0 a E viene acompañada por la aparición de un cuanto en el campo ϕ, de manera que tanto el detector como el campo ganan energía!.

La explicación a esto surge al considerar el agente que da aceleración al detector en un primer momento. Cuando el detector se acelera, su acoplo al campo produce la emisión de cuantos, que producen una cierta *resistencia* a la fuerza de aceleración. El trabajo realizado por la fuerza externa para vencer esta resistencia suministra la energía que *alimenta* el campo a través de los cuantos emitidos por el detector y también el detector que simultaneamente sufre transiciones. En lo que se refiere al detector, el efecto neto es la absorción de cuantos distribuidos termicamente.

2.3. Minkowski y la invarianza Poincaré

Con independencia del proceso de medición, en la teoría cuántica de campos en un espacio de Minkowski no tuvimos ningún problema para construir un espacio de vectores de estados. La construcción de un espacio de estados,

[4]La integral doble que aparece en esta expresión puede diverger. En ese caso se deben omitir las integraciones y tratar con la tasa de transición $R(E)$ a los estados excitados.

desde un punto de vista físico se reduce a la definición de un vacío y a la interpretación de los campos cuantizados en términos de partículas. En este tipo de espacios, la interpretación corpuscular del campo cuantizado libre se basa en la invarianza de la teoría bajo el grupo de Poincaré. La invarianza traslacional en el tiempo permite introducir una separación del operador campo en partes de frecuencia positiva y negativa $\phi^{\pm}(x)$ y definir un estado de vacío requiriendo que

$$\phi^{-}(x)|0\rangle = 0. \tag{2.11}$$

En este caso, la definición del concepto de partícula no depende del tiempo. Esta construcción del espacio de Fock no depende de la elección de la base en el espacio de soluciones clásicas de las ecuaciones de campo si las funciones de la base satisfacen la condición

$$\partial_0 \phi_i^{\pm}(x) = \pm i\omega_i \phi_i^{\pm}(x). \tag{2.12}$$

Realmente, si $\phi_i^{\pm}$ y $\psi_i^{\pm}$ son dos bases que satisfecen la condición anterior entonces, como es fácil de ver con la ayuda de la ecuación (1.57) y de la forma explicita del correspondiente producto escalar que todos los coeficientes de la transformación de Bogolubov (1.66) se anulan. De este tipo es, por ejemplo, la conexión existente entre las bases de las ondas planas y las esféricas. La misma situación tiene lugar también cuando la igualdad (2.12) se satisfece por dos bases conectadas por una transformación de Lorentz.

En un espacio tiempo Reimanniano no existe una regla para elegir un conjunto de funciones bases mediante requerimientos de invarianza, de forma que la interpretación corpuscular es inaceptable.

El segundo problema es encontrar los valores de expectación de los observables locales, el más importante de los cuales es el tensor energía momento, ya que es la fuente del campo gravitacional a través de las ecuaciones de Einstein. Este problema esta intimamente relacionado con el anterior, ya que, para definir un observable como el correspondiente valor de expectación del correspondiente operador en un estado del campo, necesitamos construir el espacio de estados[5].

[5]Además, por si fuera poco, los valores de expectación de los operadores bilineares en cualquier estado contienen divergencias, de forma que se necesita formular un procedimiento para eliminarlas en términos de renormalizaciones.

2.4. Interpretación corpuscular en un espacio curvo

Como vimos en la sección anterior, la ambiguedad en la construcción del espacio de Fock está relacionada con la ausencia de una separación invariante del campo en modos de frecuencia positiva y negativa. Normalmente se dice que ocurre una mezcla de las soluciones de frecuencia negativa y positiva. Este fenómenos fue mencionado por primera vez por Schrdinger en relación con el campo gravitacional [30]. En términos de la segunda cuantización, la mezcla de frecuencias significa la creación de partículas (ocurre una amplificación paramétrica de los osciladores cuantizados del campo). Veámos algunas consideraciones de este efecto desde un punto de vista *heurístico*. Supongamos que nos encontramos en los alrededores del algún punto del espacio tiempo M. El cuadrado (invariante) del tensor de curvatura toma un valor

$$R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} \sim r^{-4}, \tag{2.13}$$

donde r es el radio de curvatura. Introduzcamos ahora un sistema coordenado localmente Galileano hasta distancias del orden de r del punto M. Podemos entonces construir un conjunto completo de funciones de una partículas $\phi_i^{\pm}$, las cuales, para frecuencias $\omega_i \gg r^{-1}$, serán de frecuencia positiva o negativa en el sentido de la igualdad (2.12) con respecto al tiempo coordenado. Sin embargo, para frecuencias

$$\omega_i \leq r^{-1} \tag{2.14}$$

la diferencia entre los modos de frecuencia positiva y negativa desaparece en general, lo que corresponde a la incertidumbre de orden unidad en el número de partículas en el modo i. En analogía con la electrodinámica, podemos describir cualitativamente la creación de partículas como una *rotura de los loops de vacío* por el campo gravitacional externo. Puesto que la gravitación actua de manera similar sobre partículas y antipartículas, lo anterior se explica aquí mediante fuerzas de marea.

Una distancia característica entre las partículas del par virtual es la longitud Compton $l_C = m^{-1}$. Para definir una fuerza de marea consideremos la ecuación de la desviación geodésica

$$\frac{d^2n^\mu}{ds^2} = R^\mu_{\nu\rho\sigma}u^\nu n^\rho u^\sigma, \tag{2.15}$$

donde u^μ es la cuadrivelocidad de una partícula del par,n^μ es un vector de tipo espacial que conecta con la segunda partícula, y además, $n_\mu n^\mu - l_C^2$. Esta ecuación define la aceleración relativa entre ambas partículas. Para *romper* este par virtual y convertirlo en un par real mediante fuerzas de marea, es necesario que, en el centro de masas del sistema, su trabajo a una distancia del orden de l_C exceda $2m$. Usando $u^0 = 1, u^i = 0, n^0 = 0$, $|n^i| \sim l_C$ en la ecuación de la desviación geodésica obtenemos

$$|R^i_{0j0}| \geq l_C^{-2} = m^2. \tag{2.16}$$

En otras palabras, para obtener una creación de partículas el efecto de la curvatura del espacio tiempo debe ser al menos del orden de la inversa de la longitud Compton. Para un campo no masivo no existe tal umbral, pero, como se ve de la ecuación (2.14), el espectro de las partículas creadas estará concentrado en la región de energías del orden $\omega \sim r^{-1}$, de forma que el efecto será significativo sólo para curvaturas espacio temporales suficientemente grandes. En un campo gravitacional intenso, con curvatura $r^{-1} \gg m$, se crean multitud de partículas ultrarelativistas con energía $\omega \gg m$. El tensor energía momento de la materia creada es del orden de

$$|T_{\mu\nu}| \sim \int^{r^{-1}} \omega^3 d\omega \sim r^{-4}. \tag{2.17}$$

Al mismo tiempo, a partir de las ecuaciones de Einstein, se ve que el campo gravitacional, caracterizado por el radio de curvatura r, se crea por una distribución de materia con tensor energía momento

$$|T^{(b)}_{\mu\nu}| \sim G^{-1}|R^{\mu}_{\nu\rho\sigma}| \sim G^{-1}r^{-2}, \tag{2.18}$$

donde G es la constante gravitacional. Comparando las dos ecuaciones anteriores vemos que $r \sim G^{1/2} \sim 10^{-33}$ cm, de forma que la materia creada influirá en la métrica del espacio tiempo, pues, en este caso, $T_{\mu\nu} \sim T^{(b)}_{\mu\nu}$. Nótese que el valor de r, como era de esperar, se corresponde con el rango de aplicación del campo gravitacional clásico.

Es obvio que, en ausencia de la invarianza Poincaré, es imposible construir una interpretación corpuscular de los campos cuantizados en un espacio tiempo arbitrario. No obstante, en algunos casos es posible introducir una noción de partículas si imponemos requerimientos adicionales siguiendo ciertas consideraciones físicas.

2.5. *Backgrounds* estáticos y estacionarios

Consideremos ahora el caso de un espacio tiempo estático, en el cual existe una definición natural y independiente del tiempo de partículas. Se dice que un espacio tiempo es estático si posee un vector de Killing ξ^μ ortogonal a alguna familia de superficies de tipo espacial $\{\Sigma\}$. Podemos entonces tomar como coordenada temporal un parámetro arbitrario τ en las curvas integrales del campo ξ^μ y considerar la familia $\{\Sigma\}$ como superficies de tiempo constante. La métrica de este espacio tiempo tiene la forma

$$ds^2 = g_{00} d\tau^2 - g_{ij} dx^i dx^j, \tag{2.19}$$

donde g_{00} y g_{ij} dependen sólo de las coordenadas espaciales x^i. Sea $T_{\mu\nu}$ el tensor métrico energía momento del campo ϕ en cuestión. La simetría translacional, cuyo generador es ξ^μ, nos lleva a que el hamiltoniano para el vector ξ^μ

$$H[\xi] = \int_\Sigma \xi^\mu T_{\mu\nu} d\sigma^\nu \tag{2.20}$$

no depende de la hipersuperficie Σ ya que $\nabla^\mu(\xi^\nu T_{\mu\nu}) = 0$. Es obvio que $H[\xi]$ juega el papel de un energía conservada. En la teoría cuántica $H[\xi]$ es el generador de las transformaciones unitarias del operador campo bajo traslaciones en la dirección ξ^μ:

$$[H, \phi] = i\mathcal{L}_\xi \phi, \tag{2.21}$$

donde $\mathcal{L}$ es la derivada de Lie en la dirección del vector ξ^μ. Para construir el espacio de Fock, debemos elegir un conjunto de autofunciones $\phi_i^\pm$ tal que

$$\mathcal{L}_\xi \phi_i^\pm(x) = \pm i\omega_i \phi_i^\pm(x), \tag{2.22}$$

igualdad que es análoga a la definición en el espacio de Minkowski, pero donde el papel del tiempo lo juega ahora un parámetro de las curvas integrales ξ^μ. Usando las funciones $\phi_i^\pm$ como base de la descomposición (1.57) obtenemos una interpretación corpuscular de la teoría en términos de los correspondientes operadores $a_i^\pm$.[6] El estado de vacío $|0_\xi\rangle$ definido por $a_i^-|0_\xi\rangle = 0$ es estable y no ocurre creación de partículas.

Anologamente podemos encontrar una interpretación corpuscular cuando el espacio tiempo no es estático, sino estacionario, es decir, existe un vector de Killing ξ^μ de tipo tiempo pero que no es ortogonal a ningún sistema de hipersuperficies espaciales $\{\Sigma\}$. En este caso, podemos elegir coordenadas de manera que $g_{\mu\nu}$, como antes, no depende del tiempo, pero con $g_{0i} \neq 0$.

Si en determinadas regiones del espacio, el vector de Killing deja de ser de tipo tiempo será imposible construir el espacio de Fock con un vacío estable. Una situación de este tipo aparece, por ejemplo, en el colapso gravitacional de estrellas en rotación.

[6] Si en un espacio tiempo las coordenadas son tales que las componentes del tensor métrico $g_{\mu\nu}$ tienen singularidades (como, por ejemplo, en la métrica de Schwarzschild), el formalismo desarrollado anteriormente no es aplicable.

2.6. *Backgrounds* no estacionarios y vacíos inequivalentes

Pero, qué ocurre cuando el *background* no es estacionario? El problema es claro. No tenemos un vector, en general, de Killing de tipo tiempo. Cuando tenemos campos gravitacionales los observadores inerciales se convierten en observadores en caida libre, y en general, dos observadores en caida libre no se pondrán de acuerdo en una elección del *vacío*.

Una idealización común es asumir que el espacio de *background* es estacionario durante periodos limitados de tiempo, o en el pasado asintótico remoto, o futuro, a través de regiones asintóticas. Todo el formalismo anterior es perfectamente aplicable, y podemos construir un conjunto completo de modos y el correspondiente espacio vectorial en esa región. Una vez que los hemos construido, los modos podrán propagarse a través de las ecuaciones del campo en las regiones no estacionarias. Las relaciones *Wronskianas* seguiran satisfaciéndose incluso en las regiones no asintótoticas, pues esas relaciones son independientes de la elección de la hipersuperficie Σ siempre y cuando los modos satisfagan las ecuaciones de campo. Por supuesto, las funciones apropiadas en una región no coincidirán en general con las de la otra región. Por ejemplo, un modo con un comportamiento $e^{-i\omega t}$ en una región será generalmente una superposición de modos de frecuencia positiva y negativa $e^{\pm i\omega t}$ en la otra. Puede ocurrir incluso que los estados de vacío en ambas regiones tengan producto interno cero, en cuyo caso las bases no son equivalentes, es decir, no es posible obtener una a partir de la otra mediante una transformación unitaria.

Cuando no existe una región estacionaria, la definición de un espacio vectorial de estados *natural* es problemática. Una posibilidad *naive*, resultante de una corta reflexión sobre el tema, podría ser *congelar* el background en algún instante para construir un conjunto de modos apropiado para el espacio momentaneamente estacionario. De esta manera, podemos asociar un espacio de Fock a cada hipersuperficie de tipo espacial Σ. Pero una reflexión profunda nos lleva a dificultades:

1. El espacio de Fock dependerá de las elecciones arbitrarias de las funciones *lapse* y *shift* en cada hipersuperficie.

2. Incluso en el caso de que pudieramos realizar tales elecciones no hay forma de elegir entre los diversos estados de vacío, uno por cada Σ.

3. Podría ocurrir que los espacios asociados con hipersuperficies vecinas no sean unitariamente equivalentes.

Nótese que la aparición de espacios de Fock inequivalentes no es la mayor dificultad de la teoría. Los modos asociados con una región se propagan suavemente a otras regiones. La dificultad fundamental radica en el uso del término partícula. La no equivalencia unitaria de dos espacios de Fock implica que un estado que, visto desde uno de los espacios de Fock, se corresponde con la existencia de un número finito de*partículas*, podría corresponderse con un estado de infinitas *partículas* visto desde el otro. Esta situación puede ocurrir también con partículas masivas. Evidentemente, los dos espacios de Fock dan lugar a dos definiciones no equivalentes del concepto de *partícula*, así como a vacíos no equivalentes.

En lugar de introducir regiones estacionarias que están limitadas en el tiempo, podríamos introducir, poniéndonos más *exóticos*, regiones estacionarias limitadas en el espacio. Un ejemplo de esto lo tenemos cuando el espacio tiempo admite un campo vector de Killing que es de tipo tiempo sólo en una región incompleta metricamente y de tipo espacio más allá de la frontera de esta región. La frontera es una superficie *null* conocida como horizonte con respecto a observadores cuyas líneas de universo sean paralelas al campo vector de Killing. A menudo es posible construir a conjunto completo de modos y un espacio de Fock para la región incompleta, basándose en el campo vector de Killing en esa región. Otro ejemplo lo tenemos cuando la frontera de la región en cuestión es una barrera física como la superficie de un conductor perfecto. En cada uno de estos ejemplos el estado de vacío y sus *partículas* asociadas tienen sus propias propiedades características.

2.7. No unicidad de ∂_t

Pero,tenemos más problemas si cabe, incluso cuando exista un vector de Killing de tipo tiempo este puede no ser único!. La mejor forma de ejemplificar esta situación es considerar un espacio tiempo plano con la topología de $\mathcal{R}^\backslash$. Para cada sistema minkowskiano de coordenadas x^μ en tal espacio tiempo, ∂_t es un vector de Killing de tipo tiempo y ∂_i son vectores de Killing de tipo espacio. Podemos transformar un conjunto de tales campos en otro llevando a cabo una transformación de Lorentz, o de forma más general, transformaciones del grupo Poincaré. Todas las combinaciones de esos campos tienen corchetes de Lie nulos los unos con los otros.

Supongamos que tenemos un espacio tiempo que no es plano, sino que tiene 2 vectores de Killing globales de tipo tiempo orientados hacia el futuro, y supongamos que estos campos tienen corchetes de Lie nulos los unos con los otros. Esto implica que podemos foliar el espacio en una familia $(n-2)$-paramétrica de subespacios 2-dimensionales y que podemos introducir coordenadas x^μ tales que

1. $x^2, \ldots, x^{n-1}$ son parámetros que identifican los subespacios 2-dimensionales.
2. t y x^1 son globales y nombran ,los puntos de cada subespacio.
3. Los 2 campos vector de Killing son combinaciones lineales de ∂_t y $\partial_{(x^1)}$.
4. El tensor métrico se escribe en una forma.que en cierta manera nos es familiar

$$g_\mu = \begin{pmatrix} N^2\eta_{\alpha\beta} + N_{\alpha k}N^k_\beta & N_{\alpha j} \\ N_{i\beta} & h_{ij} \end{pmatrix} \tag{2.23}$$

donde los índices griegos toman los valores $0, 1$ y los latinos $2, \ldots, n-1$. N es la función *lapse*, $N_{\alpha k}$es la función $shift$ y h_ij es la métrica inducida en las *rebanadas*, siendo todas independientes de t y x^1. Se tiene además

$$n_{\alpha\beta} = diag(-1, 1), \quad \eta_{\alpha\gamma}\eta^{\gamma\beta} = \delta^\beta_\alpha \tag{2.24}$$
$$h_{ij} = h_{ji} \quad h_{ij}h^{ij} = \delta^j_i \quad \beta_{\alpha i} = \beta_{i\alpha} \tag{2.25}$$

Los índices griegos y latinos se pueden subir y bajar utilizando $\eta^{\alpha\beta}$ y γ^{ij} respectivamente. Tanto si estamos trabajando con campos escalares, vectoriales,o lo que sea, siempre que trabajemos en un background dependiente de x^0 y x^1 podemos introducir modos que son simultaneamente autofunciones de ∂_t y ∂_{x^1}:

$$u = \chi e^{ip\cdot x}, \quad p \cdot x = p_\alpha x^\alpha, \quad \chi_{,\alpha} = 0. \tag{2.26}$$

Las ecuaciones del campo restringiran generalmente los $p's$

$$\eta_{\alpha\beta}p_\alpha p_\beta \leq 0, \tag{2.27}$$

y si p_0 es negativo (es decir, si u es un modo de frecuencia positiva) seguirá siendo negativo si x^0 y x^1 se reemplazan por transformados Lorentz bidimensionales propios de ellos mismos (dejando la forma de la métrica invariante). Tales transformaciones de Lorentz generan un continuo uniparamétrico de campos vector de Killing (incluyendo los dos originales, escalados adecuadamente) y si uno un modo es de frecuencia positiva con respecto a uno de esos campos lo será con respecto a cualquier otro. Esto significa que el espacio de Fock, y en particular el estado de vacío, con respecto a cualquiera de esos campos es idéntico al tomado con respecto a cualquier otro. En este caso, no hay una mera equivalencia unitaria entre ambos espacios de Fock sino una identidad.

2.8. Vacío definido por propiedades de simetría

En el caso de un espacio tiempo plano, la identidad de los vacíos correspondientes a diferentes campos vector de Killing globales es una consecuencia de la simetría Poincare que posee ese espacio. De hecho, la simetría Poincaré se puede usar para definir un estado de vacío: el vacío es el único estado en el cual los valores de expectación de todos los observables no dependen de parámetros externos permaneciendo invariante bajo transformaciones Poincaré

Existen otros *backgrounds* en los cuales podemos usar una simetría para definir un estado de vacío, por ejemplo, el espacio tiempo anti-deSitter. Este espacio tiene muchos vectores de Killing, al igual que el espacio de Minkowski, pero ninguno de ellos es globalmente de tipo tiempo. Siempre hay horizontes. Aunque podemos definir un estado de vacío local para cada campo vector de Killing, ninguno de esos vacíos es invariante anti-deSitter. Sólo el *estado natural de vacío tiene esa propiedad.*

2.9. Conclusión

Mi objetivo a lo largo de este capítulo ha sido intentar convencer al lector de que el concepto de partícula, a pesar de su gran utilidad en un espacio Minkowskiano, carece de contenido profundo en cuanto a lo que la formulación de la teoría se refiere. Las dificultades para entender la formulación de la teoría cuántica de campos es espacios curvos para una persona familiarizada con los tratamientos estandar de la teoría cuántica de campos en espacios planos es de alguna manera similar a las dificultades que aparecen al intentar entender Relatividad General a alguien familiarizado con la Relatividad especial en la manera que esta es normalmente formulada, donde el énfasis primario se centra en la existencia de familias globales de observadores inerciales y en que las relaciones entre esas familias vienen descritas por transformaciones de Poincaré. Ni la noción de observadores globales inerciales, ni las transformaciones de Poincaré se generalizan de forma *significativa* a un espacio tiempo curvo. Sin embargo, si nos damos cuenta de que la estructura del espacio tiempo en Relatividad especial es descrita de una manera más natural y simple por una métrica espacio-temporal plana, y que la existencia de observadores inerciales puede verse como una consecuencia secundaria de la presencia de esta métrica, el paso a Relatividad General es inmediato: basta con permitir que la métrica espacio-temporal sea curva. De manera similar, en una teoría cuántica de campos en espacios tiempo planos, el grupo de Poincaré juega un papel esencial en *señalar* un estado de vacío preferencial y en definir la noción de partícula. Se han dedicado muchos esfuerzos a generalizar la noción de *partícula* a un espacio tiempo curvo. Uno de los puntos claves que me gustaría destacar es que la cuestión anterior es irrelevante para la formulación de la teoría cuántica de campos en espacios curvos, al igual que como generalizar la definición de sistemas inerciales globales es irrelevante para la formulación de Relatividad General. La teoría cuántica de campos es una teoría de *campos*, no de partículas. Aunque, en determinadas circunstancias podremos disponer de una interpretación *corpuscular* de la teoría, la noción de *partículas* no juega un papel fundamental en la formulación o interpretación de la teoría. En un espacio tiempo plano, y en general en un espacio tiempo curvo estacionario, aparecerá una interpretación natural de partícula cuando acoplemos el campo a un sistema mecanocuántico modelo sencillo, por ejemplo, *un detector de partículas*. Además, en espacio tiempo curvos asintóticamente estacionarios en el pasado o futuro podremos disponer también de interpretaciones corpusculares naturales. No obstante, en la mayoría de los casos, la noción de partícula es muy limitada.

En un espacio tiempo plano, la simetría Poincaré se usa para seleccionar una representación preferencial, que es matematicamente equivalente a la selección de un *estado de vacío* privilegiado, que a su vez, es matematicamente equivalente a la selección de una definición del concepto de *partículas* en la teoría. No obstante, como ya indicamos arriba, en un espacio tiempo curvo general, no parece haber ninguna noción de *partículas*. En nuestro desarrollo de la teoría cuántica de campos en espacios curvos es esencial que distingamos entre los elementos *universales* de la teoría -que permanecen sin cambios esenciales de un espacio tiempo plano a uno curvo- de aquellos elementos de la teoría cuántica de campos en espacios planos que se basan en la simetría Poincare. Estos últimos elementos se generalizan de una manera natural solamente en espacio tiempo con simetrías muy concretas.

Capítulo 3

Campos cuánticos en un Universo en expansión

...proper vibrations cannot be rigorously separated in the expanding Universe. ...this is a a phenomenon of outstanding importance. With particles it would be mean production and annihilation of matter, merely by expansion,...Alarmed by these prospects I have examined the matter in more detail.

Erwin Schrodinger, Physica **6**, 899 (1939)

3.1. Introducción

Vimos en los capítulos anteriores que dado un espacio tiempo curvo, como el por ejemplo el gravitacional, se producen partículas como resultado del cambio en dicho espacio tiempo. En este capítulo aplicaremos a un Universo en expansión. Ciertamente, no existe creación de partículas en las regiones estáticas asintóticas y asumimos que estas se crean durante la expansión. El número de partículas en el espacio de Minkowski final es distinto del inicial. De una manera inocente podemos pensar que si realizamos una medida en un tiempo intermedio, durante la expansión, obtendríamos una densidad de partículas con un valor intermedio entre el correspondiente al estado inicial y final. Sin embargo, este tipo de razonamiento no sobrevive a un análisis más profundo. Como vimos, en un espacio tiempo curvo no existe una definición de partícula. A pesar de eso, en algunas simetría especiales, como el espacio tiempo de Friedmann-Robertson-Walker podemos identificar una clase de observadores privilegiados, los observadores comóviles, para los cuales el universo se expande de manera isotrópica. Podemos entonces intentar identificar partículas en la expansión mediante la excitación de detectores de partículas comóviles. Incluso si, por razones de simetría, podemos realizar una definición específica de partícula de la manera indicada arriba, el número de partículas no será constante, hecho que hace cualquier tipo de medida incierta. Si la tasa de creación media de partículas en un intervalo Δt es A, entonces, para realizar una medida precisa del número de partículas, debemos elegir Δt tal que $A\Delta t \ll 1$. Sin embargo, existe también una incertidumbre $(m\Delta t)^{-1}$ en el número de partículas debido a la relación de incertidumbre energía-tiempo de Heisenberg. La incertidumbre total es por tanto

$$\Delta N \geq (m\Delta t)^{-1} + |A|\Delta t, \tag{3.1}$$

que tiene un valor mínimo $2(|A|/m)^{-1/2}$ en $\Delta t = (m|A|)^{-1/2}$. Siempre y cuando $A \neq 0$ o $m \neq \infty$, la incertidumbre en el número de partículas será distinta de cero.

A pesar de esto, sabemos gracias a los exitos de la teoría cuántica de campos estandar en espacios de Minkowski, que existe algún tipo de aproximación, para el cual el número de partículas es casi constante, ya que, después de todo, habitamos en un Universo en expansión!. Este argumento sugiere, que si la tasa de creación de partículas es baja, o la masa de las partículas es alta, entonces la noción de un número de partículas se convierte en un concepto util. La densidad y tasa de producción de partículas dependerá del vigor del movimiento de expansión. En el límite de una expansión muy débil esperaríamos que la tasa de creación caiga suavemente a cero, recuperando la teoría en el espacio de Minkowski. Estos argumentos se pueden aplicar de forma completamente general a cualquier espacio tiempo de tipo FRW con un factor de escala $C(\eta)$ suave.

En el caso de un modelo FRW con regiones inicial y final estáticas elegidas como estados de vacío del campo cuántico, un detector comovil fallará, a lo largo de toda su línea de Universo, al detectar *cuantos* en los modos de alta energía. Mientrás que la frecuencia del modo sea mucho mayor que la tasa de expansión, la probabilidad de no obtener respuesta del detector será muy próxima a la unidad. Sin embargo, para los modos mas bajos, se registrarán cuantos, indicando un corte de la aproximación para un estado de vacío[1]..

Caso de no existir regiones inicial y final, no podemos basar ninguna definición aproximada de partículas en la construcción anterior. En lugar de eso debemos encontrar un método para seleccionar aquellas soluciones exactas de la ecuación de campo tales que esten en algún sentido próximos al

[1]Los mismos argumentos sirven si los estados asintóticos son estados de muchas partículas. De hecho, puesto que los estados inicial y fina son igualmente buenos en este aspecto, cualquier combinación de ellos nos llevará a las mismas conclusiones.

límite del espacio tiempo de Minkowski. Fisicamente, esto puede verse como una construcción que disturba poco el campo por la expansión, es decir, una definición de partículas para la cual existe una producción mínima de partículas debido al cambio en la geometría. Daremos aquí un tratamiento matemático preciso de las ideas anteriores para el caso de campos escalares acoplados conformemente en espacios tiempo FRW. Pero antes revisemos el espacio tiempo de FRW y comparémoslo con otra posible solución de las ecuaciones de Einstein.

3.2. Generalidades: métrica FRW y Bianchi I

Recordemos que la métrica de un tiempo plano, conocida como métrica FRW, viene dada por

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2). \tag{3.2}$$

Una forma más clarificadora de escribir esta métrica es

$$ds^2 = C(\eta)(d\eta^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2). \tag{3.3}$$

donde

$$\eta \equiv \int a^{-1}dt \qquad C(\eta) \equiv a^2(t). \tag{3.4}$$

Esta forma de escribir la métrica de Friedmann-Robertson-Walker nos muestra que esta geometría es conformamente estática y de hecho conformamente plana, con un factor conforme dependiente del tiempo. Cuando la ecuación que define el campo es invariante conforme será sencilla su resolución en un espacio tiempo de *background* FRW.

Nótese que el rango de t o η no tiene que ser necesariamente $(-\infty, \infty)$. Los modelos cosmológicos típicos de interés presentan singularidades en un valor finito de la coordenada temporal, tomada normalmente cero por conveniencia. La transformación a tiempo conforme η puede *mapear* un intervalo finito en uno infinito o viceversa. La constante arbitraria en η está abierta en nuestra definición general, pero es cerrada en cada modelo partícular.

En cuanto a las variables espaciales el rango de $\mathbf{x}$ se toma generalmente dentro de $\mathbf{R}^3$. Por razones técnicas además de lo anterior se considera frecuentemente las condiciones de frontera periódicas (el 3-toro)

Las variables temporal y espacial se pueden separar en las ecuaciones de campo, siempre y cuando la métrica sea conformamente estática. En el caso de un espacio plano FRW y de las métrica Bianchi I[2], la ecuación espacial es trivial y las autofunciones son las tradicionales $e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}$. En el caso curvo las autofunciones son las correspondientes al operador de Laplace-Beltrami, que han sido extensamente estudiadas, pero que no entraremos a discutir aquí.

Por simplicidad, en todo lo que sigue consideraremos el caso de un espacio tiempo FRW plano. Para tratar la ecuación temporal y sus soluciones $\phi_{\mathbf{k}}(t)$, introducimos la siguiente notación

$$D \equiv \partial_t a = \frac{1}{2}\partial_\eta(\ln C) \qquad \chi_{\mathbf{k}} \equiv a(t)\phi_{\mathbf{k}}(t). \tag{3.6}$$

Con esta notación, y tras realizar la separación de variables, la ecuación para $\xi_{\mathbf{k}}$ es

$$\frac{d^2\chi_{\mathbf{k}}}{d\eta^2} + [\mathbf{k}^2 + m^2 C + (6\chi - 1)(\partial_\eta D + D^2)]\chi_{\mathbf{k}} = 0. \tag{3.7}$$

La solución general de la ecuación de campo es

$$\phi(\eta, \mathbf{x}) \sim \int d^3k \Big[a_{\mathbf{k}}\chi_{\mathbf{k}}(\eta)e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} + a^+_{\mathbf{k}}\chi_{\mathbf{k}}(\eta)^* e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}}\Big] \tag{3.8}$$

Pensaremos primero en los operadores $a_{\mathbf{k}}$ y $a^+_{\mathbf{k}}$ como coeficientes complejos arbitrarios; dando la solución general clásica; más tarde se convertirán en operadores creación y destrucción, dando la solución en la imagen de Heisenberg de la teoría cuántica de campos. Nótese que si χ es solución de la ecuación (3.7), entonces también lo es χ^*, de forma que las dos clases de soluciones se unen en (3.8) para formar una base completa y no redundante (en el sentido contínuo) de soluciones.

Examinemos la ecuación (3.7) bajo diversas condiciones de caracter general

[2]Las cosmologías Bianchi I o de tipo Kasner se caracterizan por la métrica

$$ds^2 = dt^2 + \sum_{j=1}^{3} a_j(t)(dx^j)^2, \tag{3.5}$$

que no es conformamente estática si las funciones a_j son independientes. Estos modelos describen un Universo cuya tasa de expansión cosmológica no es isotrópica. Nótese en cambio que el espacio-tiempo en cada instante de tiempo es un espacio euclídeo $\mathbf{R}^3$ perfectamente isotrópico. El valor numérico de a_j en un tiempo dado carece de significado, puesto que siempre puede reabsorberse reescalando x^j. Un Universo de tipo Kasner, en el sentido estricto, es una solución de las ecuaciones de Einstein $G_{\mu\nu} = 0$ de la forma Bianchi I, siendo las a_j potencias de t. La teoría cuántica de campos en este tipo de espacios fue estudiada por Zel'dovich, Starobinsky y Fulling entre otros.

- **$m = 0$ y $\xi = \frac{1}{6}$:** Este es el caso invariante conforme. La ecuación es simplemente $\partial_\eta^2 \chi_{\mathbf{k}} = \mathbf{k}^2 \chi_{\mathbf{k}}$, cuya solución son elementales. Eligiendo
$$\chi_{\mathbf{k}}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2k}} e^{-ik\eta} \tag{3.9}$$
la solución (3.8) es la imagen bajo una transformación conforme, de la solución estándar de la teoría cuántica de campos libres no masivos. Este resultado puede interpretarse diciendo que no existe creación de partículas por el campo gravitacional en este modelo. No obstante, la física de esta teoría no es un simple *transplante* de el campo libre a un Universo en expansión: la densidad de energía de vacío no se anula, sino que es un funcional no trivial de $C(\eta)$.

- **$m \neq 0$ o $\xi \neq \frac{1}{6}$:** En este caso la ecuación tiene la forma
$$\frac{d^2\chi_{\mathbf{k}}}{d\eta^2} + [\mathbf{k}^2 + f(\eta)]\chi_{\mathbf{k}} = 0, \tag{3.10}$$
donde $f(\eta)$ es una función de η. Una consecuencia obvia de la dependencia del coeficiente con el tiempo es que las soluciones no se pueden escribir, en general, en términos de funciones elementales. Una consecuencia menos obvia pero más interesante, y que ya habíamos adelantado en el capítulo anterior, es que no existe una elección natural de base para el espacio de soluciones, análoga a las exponenciales de frecuencia positiva y negativa del caso conforme trivial.

- **Bianchi I:** En este caso la generalización de la ecuación (3.7) es
$$\frac{d^{\chi}_{\mathbf{k}}}{d\eta^2} + \Big[a^2 \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{k_j}{a_j}\right)^2 + (6\xi - 1)f(\eta) + \xi g(\eta)\Big]\chi_{\mathbf{k}} = 0, \tag{3.11}$$
donde f y g son funciones de η. Nótese que en este caso, a diferencia de lo que ocurría antes el valor $\xi = \frac{1}{6}$ no tiene nada de especial. Además el coeficiente que involucra $\mathbf{k}$ es independiente de η. Esto tiene efectos devastadores en intentos *naive* de definir partículas junto con teorías cuánticas de campos dependientes del tiempo. Pero de nuevo esto es algo que se aleja del objetivo de este trabajo.

En los dos últimos casos $\chi_{\mathbf{k}}$ puede normalizarse de forma que las relaciones de conmutación canónica se conviertan en la relación estandar para los operadores creación y aniquilación
$$[a_{\mathbf{k}}, a^{+}_{\mathbf{k'}}] = \delta[\mathbf{k} - \mathbf{k'}] \qquad [a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k'}}] = 0. \tag{3.12}$$
Recordemos no obstante que esta condición no define $\chi_{\mathbf{k}}$ de manera única (ver capítulo anterior).

3.3. Campo conformemente acoplado: vacío adiabático

Tomemos el caso de un campo escalar conformente acoplado. Se satisface en este caso la ecuación

$$\chi_k''(\eta) + \omega_k^2(\eta)\chi_k(\eta) = 0 \tag{3.13}$$

donde

$$\omega_k^2(\eta) = k^2 + C(\eta)m^2. \tag{3.14}$$

La ecuación anterior es reminiceste de la ecuación de movimiento clásica para un oscilador armónico de frecuencia variable, por ejemplo un péndulo cuya longitud se acorta progresivamente, decreciendo por tanto el periodo. Este problema fue importante en la formulación de la teoría cuántica, puesto que resulta que la energía E de un *cuanto* ($\hbar\omega$) es insuficiente para dar un *cuanto* completo al aumentar la frecuencia. No obstante, Einstein mostró que siempre y cuando la longitud del péndulo decrece infinitamente lento E/ν es un invariante adiabático, y el número de *cuantos* se conserva, con independencia de como de grande sea el cambio en la longitud del péndulo.

En nuestro caso, de forma similar, el número de *cuantos* es un invariante adiabático, independiente de la cantidad total de expansión cosmológica, siempre y cuando la tasa de expansión sea infinitamente lenta!. La ecuación (3.18) admite soluciones formales de tipo WKB

$$\chi_k = \frac{1}{(2W_k)^{1/2}} \exp\Big[-i\int^{\eta} W_k(\eta')d\eta'\Big] \tag{3.15}$$

donde W_k satisface la ecuación no lineal

$$W_k^2(\eta) = \omega_k^2(\eta) - \frac{1}{2}\left(\frac{\ddot{W}_k}{W_k} - \frac{3}{2}\frac{\dot{W}_k^2}{W_k^2}\right), \tag{3.16}$$

que no es más que una fase implícita en la ecuación para χ_k que puede especificarse dando un límite inferior a la integral. Si el espacio tiempo varía lentamente, los términos que contienen derivadas en la ecuación diferencial anterior son pequeños comparados con ω_k^2, de forma que, a orden cero,

$$W_k^{(0)}(\eta) \equiv \omega_k(\eta), \tag{3.17}$$

lo cual reduce la expresión para χ_k a la del espacio tiempo de Minkowski cuando $C(\eta) \rightarrow$ constante.

Podemos aproximarnos a las soluciones de la ecuación (3.16) mediante iteración, usando $W_k^{(0)}(\eta)$ como orden más bajo. Es útil introducir un parámtero T conocido como parámtero adiabático. Si, de forma temporal[3], reemplazamos η por η/T, entonces, el límite adiabático de expansión lenta puede estudiarse viendo que ocurre cuando $T \to \infty$.

La ecuación (3.18) se reescribe en la forma

$$\chi_k''(\eta_1) + T^2\omega_k^2(\eta_1)\chi_k(\eta_1) = 0 \tag{3.18}$$

donde $\eta_1 = \eta/T$. Evidentemente

$$\frac{d}{d\eta}C(\eta/T) = \frac{1}{T}\frac{d}{d\eta_1}C(\eta_1), \tag{3.19}$$

de forma que en el límite $T \to \infty$, $C(\eta_1)$ y todas sus derivadas con respecto a η varían infinitamente despacio. Por tanto, podemos reproducir los efectos de un $C(\eta)$ variando lentamente estudiando el caso $T \to \infty$.

Cuando se realice una expansión en términos de potencias inversas de T, el término de orden T^{-n} será llamado orden adiabático n. De la ecuación anterior es claro que el orden adiabático es, en este caso, equivalente al número de derivadas de C. Se sigue de un simple análisis dimensional que si una cantidad tiene dimensiones m^d un término de orden adibático A en su expansión contendrá $A - d$ potencias de m^{-1} y k^{-1}.

La siguiente iteración de (3.16) nos da

$$(W_k^{(2)})^2 = \omega_k^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\ddot{\omega}_k}{\omega_k} - \frac{3}{2}\frac{\dot{\omega}_k^2}{\omega_k^2}\right) \tag{3.20}$$

que involucra dos derivadas de ω_k, y por tanto C, por lo cual, es un invariante adibático de segundo orden. La iteración A nos dará un término de orden adiabático $2A$. En lo que sigue denotaremos la aproximación adiabática de orden A para χ_k por $\chi_k^{(A)}$, y los modos asociados, $\chi(\eta)e^{ikx}$, por u_k^A.

Supongamos, que en lugar de la solución exacta para χ_k usamos la aproximación adiabática de orden cero obtenida reemplazando W_k por $W_k(0)$. En un estado inicial, donde el Universo sea estático, ambas expresiones dan las habituales soluciones de Minkowski, con frecuencia constante. A medida que el Universo se expande, las expresiones exacta y aproximada empiezan a diferir significativamente, pero sólo por términos adiabáticos de orden mayor que cero. En general existirá una relación

$$u_k = \alpha_k^{(A)}(\eta)u_k^{(A)} + \beta_k^{(A)}u_k^{(A)*}, \tag{3.21}$$

[3]Tomaremos $T = 1$ al final del cálculo.

definiendo una solución exacta de la ecuación de la ecuación de campo en términos de la aproximación adiabática. Claramente, los coeficientes $\alpha_k^{(A)}$ y $\beta_k^{(A)}$ deben ser constantes de orden A, puesto que $u_{\pm k}^{(A)}$ son soluciones de la ecuación de campo a este orden. Supongamos que elegimos la elección particular

$$\alpha_k^{(A)}(\eta_0) = 1 + \mathcal{O}(T^{-(A+1)}) \tag{3.22}$$

$$\beta_k^{(A)}(\eta_0) = 0 + \mathcal{O}(T^{-(A+1)}) \tag{3.23}$$

para algún tiempo fijo η_0. Se sigue que α y β vienen dados por la expresión anterior para todo tiempo. Los modos u_k definidos usando la relación anterior se dicen que son modos adiabáticos de frecuencia positiva de orden adiabático A. Nótese de nuevo que los modos exactos u_k no están definidos de forma unívoca, pues existe un número infinito de esos modos correspondientes a diferentes elecciones de η_0.

En las regiones estáticas, todos los términos de orden adiabático mayor que cero se anulan, de forma que los modos exactos son de frecuencia adiabática positiva a orden infinito. Por tanto los coeficientes de Bogolubov β que conectan los modos en ambas regiones deben decaer más rápido que cualquier potencia inversa de T en el límite adibático $T \to \infty$, tal y como dijimos. Esto implica, que el número de partículas asociado con la cuantización de uno de los sets es un invariante adiabático durante la expansión cósmica, en analogía directa con el problema del péndulo de masa variable.

En lugar de usar un conjunto ortonormal de modos que se reduzaca a la forma estandar en la región asintótica inicial, podemos usar soluciones exactas que empalmen con los modos adiabáticos aproximados de orden A en algún momento posterior η_0. Estas soluciones no se reducirán ya a la forma estandar, sino que serán una combianción lineal de modos de onda plana con frecuencia positiva y negativa. Un estado de vacío construido a partir de estos modos distorsionados no será el mismo que el vacío usual en dicha región, es decir, un detector de partículas inercial registrará un baño de partículas cuando el campo esté en este vacío distorsionado. Sin embargo, el espectro de esos cuantos decaerá generalmente a gran energía como $k^{-(A+1)}$, reflejando el hecho de que los modos del campo han sido empalmados con modos aproximados que difieren de los modos estandar en términos adiabáticos de orden $A + 1$ o superiores, de forma que el vacío distorsionado es una aproximación adiabática al vacío estandar. Este vacío adiabático dejará vacíos los modos más energéticos, de manera que un detector de partículas no registrará cuantos en dichos modos.

Es importante entender que el vacío adibático no es un tipo de estado aproximado basado en los modos apropiados. Los modos adiabáticos son, por si mismos, meramente soluciones aproximadas de orden A de las ecuaciones de campo, pero se usan para empalmar los modos exactos en algún tiempo η_0, esto es, los modos exactos que son cuantizados. El estado de vacío asociado, es decir, el estado de vacío de orden A, de estos modos es un buen candidato para un estado de vacío. Es cierto que no puede representar las experiencias de un detector comovil, pero en lo que se respecta a la teoría cuántica de campos es perfectamente respetable. Nótese además que no existe un unico vacío adiabático de orden A, ya que el empalme puede tener lugar en cualquier η_0. Los modos exactos asociados diferirán para todo tiempo solamente en términos de orden adibático superior, de forma que todos ellos son candidatos para la cuantización y para la construcción de un vacío adiabático de orden A. Tales estados de vacío tendrán comportamiento similares a alta energía, pero diferirán en la estructura de los modos de baja energía.

Aunque el vacío adiabático es menos específico que un estado de vacío asociado con la regiones asintóticas, su representación de partículas físicas (en el sentido de la experiencias de un detector comóvil) es la mejor que está disponible si el espacio tiempo no tiene regiones inicial y final estáticas. La teoría cosmológica estandar sugiere que esto es lo que ocurre en el Universo real. De hecho, puesto que, en el caso de Sitter

$$\frac{d^l}{d\eta^l}\left(\frac{\dot{C}}{C}\right) \longrightarrow 0 \tag{3.24}$$

cuando $\eta \to \pm\infty$, un estado adiabático es una definición razonable de un estado sin partículas cuando $\eta \to \pm\infty$. Esto se conseguirá si los modos exactos se eligen iguales a los modos adiabáticos (3.18), siempre y cuando

$$T^2\omega_k^2(\eta_1) = T^2k^2 + m^2C^2 \tag{3.25}$$

sea grande en comparación con $\dot{C}/C = \mathcal{O}(T^{-1})$ para $\eta_1 = \eta/T$ fijo. Es decir, deben reducirse a

$$\chi_k^{(A)} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2k}}\exp^{-ik\eta} \tag{3.26}$$

para k o η grandes.

3.4. Partículas observables a tiempos fínitos

En el capítulo anterior nos preguntabamos si el número de partículas creado por el campo gravitacional

$$N = \int d^3k|\beta_k|^2 \tag{3.27}$$

era o no fínito. Ahora estamos en disposición de contestar a esa pregunta, al menos parcialmente. Para ello disponemos de un teórema de análisis asintótico [Olver 1961 o Littlewood 1963] que establece que si $C'(\eta) \subset C_0^\infty$, entonces β_k se aproxima a cero más rápido que cualquier potencia k^{-N} cuando $k \to \infty$, y por tanto la suma converge en ese caso. En cambio, si $C(\eta)$ no es suave, se encuentra generalmente que $|\beta_k| \sim k^{-N}$ donde N viene determinado por el orden de la singularidad de C, de forma que, por ejemplo, una expansión súbita crearía una densidad de partículas infinita.

Veámos algún caso particular de esto. Consideremos la métrica plana de FRW y su generalización anisótropa, Bianchi tipo I. Realizamos el cambio de variables

$$\eta = \int a(t)^{-1} dt \qquad \chi_{\mathbf{k}}(\eta) = a(t)\phi(t) \tag{3.28}$$

para escribir la ecuación para la dependencia temporal de los modos en la forma

$$\frac{d^2\chi_{\mathbf{k}}}{d\eta^2} + \omega_{\mathbf{k}}^2(\eta)\chi_{\mathbf{k}} = 0. \tag{3.29}$$

Para el caso FRW el coeficiente $\omega_{\mathbf{k}}^2$ es

$$\omega_{\mathbf{k}}^2(\eta) = \mathbf{k}^2 + m^2a^2 + (\xi + \frac{1}{6})Ra^2. \tag{3.30}$$

y en el caso Bianchi I, donde $a = (a_1a_2a_3)^{1/3}$, tenemos

$$\omega_{\mathbf{k}}^2(\eta) = a^2\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{k_j}{a_j}\right)^2 + m^2a^2 + \left(\xi - \frac{1}{6}\right)Ra^2 + \frac{1}{18}\sum_{i<j}\left(\frac{da_i}{d\eta} - \frac{da_j}{d\eta}\right)^2. \tag{3.31}$$

La expansión general del campo es

$$\phi(t,x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}}[a_{\mathbf{k}}(t_0)\phi_{\mathbf{k}}(t)e^{i\mathbf{kx}} + a_{\mathbf{k}}^+(t_0)\phi_{\mathbf{k}}^*(t)e^{-i\mathbf{kx}}]. \tag{3.32}$$

Entre dos tiempos cualesquiera existira una transformación de Bogoliubov

$$a_{\mathbf{k}}(t) = \alpha_{\mathbf{k}}(t,t_0)a_{\mathbf{k}}(t_0) + \beta_{\mathbf{k}}^*(t,t_0)a_{-\mathbf{k}}^+(t_0). \tag{3.33}$$

Recordemos que el teorema antes mencionado se refiere a un modelo suave y asintóticamente estático. Satisfecho esto $\beta_{\mathbf{k}}(t_1,t_2)$ decaerá más rápido que cualquier potencia de k cuando los tiempos sean suficientemente largos, de forma que

$$\int d^3|\beta_{\mathbf{k}}^2| < \infty. \tag{3.34}$$

Sin embargo, es crucial que t_1 y t_2 se encuentren en regiones asintóticas. Para tiempos generales tenemos

$$\beta_{\mathbf{k}}(t_1, t_2) \sim k^{-3} \tag{3.35}$$

para el caso de FRW y

$$\beta_{\mathbf{k}}(t_1, t_2) \sim k^{-1} \tag{3.36}$$

para el caso Bianchi I.

En ambos casos la dependencia de k es también dependencia del tiempo. En un espacio $\mathbf{k}$-tridimensional,la integral $\int d^3k|\beta_{\mathbf{k}}|^2$ converge para el primer caso pero no para el segundo. Esto nos muestra que la cosmología anisótropa se ve afectada por una creación de un número infinito de partículas. De forma más precisa, las cantidades observables locales se comportan mal.Por ejemplo, supongamos que definimos una densidad de energía a t_2 por orden normal de la expresión formal T_{00} con respecto a los operadores en t_2, tal que

$$\langle 0^{t_2}| : T_{00}(t_2, x) : |0^{t^2}\rangle = 0. \tag{3.37}$$

Entonces tenemos

$$\langle 0^{t_1}| : T_{00}(t_2, x) : |0^{t^1}\rangle = \infty. \tag{3.38}$$

Es decir, los estados de vacío para dos tiempos diferentes en un tiempo dado en una cantidad de materia por unidad de volumen infinita!, lo cual es fisicamente inaceptable.

3.5. Isotropización de la expansión cosmológica debida a la creación de partículas

Se nos plantea ahora una cuestión importante. Sabemos que en la actualidad el Universo es isótropo y homogéneo, pero si estudiamos las ecuaciones de Einstein cerca de la singularidad inicial nos daremos cuenta de que la solución general es anisótropa [1]. Cómo hemos llegado a ese Universo isótropo? Porqué, a pesar de las consideraciones de la sección anterior no tenemos un Universo con un número infinito de partículas? Podríamos pensar en algún tipo de *simetría accidental* en las condiciones iniciales, pero esto es altamente improbable. Tuvo que tener lugar algún tipo de proceso físico en los estadíos iniciales de la evolución del Universo que diera lugar a una rápida isotropización de la expansión cosmológica.

Una posible solución la encontramos en el propio formalismo que hemos desarrollado y da cuenta de la robusted del mismo. Consideraremos la posibilidad de isotropización debido a la viscosidad efectiva del espacio debida a la creación de partículas del vacío. Pido perdón al lector anticipadamente, pues no entraré aquí a hacer un desarrollo completo de los calculos sino que me limitare a exponer brevemente los resultados aportando las referencias adecuadas. Tomemos una métrica anisótropa como la de Bianchi I discutida anteriormente

$$ds^2 = dt^2 - a_1^2(t)(dx^1)^2 - a_2^2(t)(dx^2)^2 - a_3^2(t)(dx^3)^2, \tag{3.39}$$

donde $a_i(t)$ son funciones positivas del tiempo. Como ya indicamos, las secciones espaciales son planas, pero el espacio tiempo en general no es conformemente plano. Reescalando el tiempo como ya hicimos anteriormente y definiendo $V \equiv a_1 a_2 a_3$ podemos reescribir las ecuaciones de Einstein en esta métrica en la forma

$$V^{-2/3}(c_1c_2 + c_2c_3 + c_3c_1) = 8\pi G\rho \tag{3.40}$$

$$V^{-2/3}\left(c_2' + c_3' + \frac{2}{3}(c_2^2 + c_3^2) - \frac{1}{3}(c_1c_2 + c_1c_3 - c_2c_3)\right) = -8\pi GP_i \tag{3.41}$$

donde ρ es la densidad de energía y P_i la presión a lo largo del eje x_i de materia determinado la métrica. Una solución a las ecuaciones anteriores es la métrica de Kasner [1]

$$a_i(t) = a_{0i}t^{p_i}, \tag{3.42}$$

donde las potencias p_i obedecen las relaciones $p_1+p_2+p_3 = 1$ y $p_1^2+p_2^2+p_3^2 = 1$. Es obvio que $|p_i| \leq 1$, y que, además, si consideramos que $p_1 \leq p_2 \leq p_3$ tenemos $-\frac{1}{3} \leq p_1 \leq 0{,}0 \leq p_2 \leq 2/3{,}2/3 \leq p_3 \leq 1$. El caso en el que $p_1 = p_2 = 0$ y $p_3 = 1$ es degenerado: esa métrica de Kasner describe una parte del espacio tiempo de Minkowski en algún sistema de referencia no inercial. En el resto de los casos, $p_1 < 0{,}p_2, p_3 > 0$, es decir, hay una compresión a lo largo del eje x_1 y una expansión a lo largo de los ejes x_2, x_3. La importancia de la métrica de Kasner es cosmología se entiende a partir de lo siguiente [2]. Cerca de la singularidad $t = 0$ cuando $a_i(t \longrightarrow 0)$ o ∞ los lados a la izquierda de las ecuaciones (3.40) son de orden t^{-2}. Al mismo tiempo, si la materia de *background* obedece una ecuación de estado de la forma $p = (\gamma - 1)\rho$, el lado derecho de las ecuaciones (3.40) son proporcionales a $T_\mu^\nu \sim V^{-\gamma} \sim t^{-\gamma}$. Excluyendo el caso de materia con una ecuación de estado rígida ($\gamma = 2$) cuando $t \longrightarrow \infty$, podemos despreciar el lado derecho de las ecuaciones (3.40). En otras palabras, cualquier métrica de tipo anisótropo cerca de una singularidad es asintóticamente vacío y tiene la forma Kasner (3.42). Centrémonos en el caso con acoplo conforme. La parte temporal de las soluciones de la ecuación de Klein-Gordon en la métrica de Bianchi I satisface la ecuación

$$\chi_k'' + \Big[\omega^2(\eta) + f(\eta)\Big]\chi_k = 0 \tag{3.43}$$

donde

$$\omega^2 = V^{2/3}\left(\sum_{i=1}^{3} k_i^2/a_i^2 + m^2\right) \tag{3.44}$$

y

$$f(\eta) = \frac{1}{18}[(c_1 - c_2)^2 + (c_2 - c_3)^2 + (c_3 - c_1)^2]. \tag{3.45}$$

Nótese que atacar el problema con condiciones iniciales en la singularidad $a_i \longrightarrow 0$ es imposible. Consideremos que las condiciones iniciales vienen dadas o bien en $\eta \longrightarrow \infty$ donde $a_i(t) \longrightarrow cte$ o en un tiempo η_0 en el que todas las $a_i(\eta_0)$ son finitas y distintas de cero. Existe una dificultad adicional en los modelos cosmológicos en lo que se refiere a la creación de partículas en una m étrica anisótropa. Como ya mencionamos anteriormente, el caracter de la singularidad a $t = 0$ es tal que es imposible imponer condiciones iniciales en ese punto. Podemos evitar esta dificultad suponiendo que para $t < t_0$ donde $t_0 \gg t_{Pl}$ no existe creación de partículas y esta es *enchufada* solo en t_0, cuando el estado cuantizado del campo permite una definición correcta del metodo de diagonalización del hamiltoniano. Debido a la ya citada independencia de la métrica cerca de la singularidad de la presencia de materia de *background* para $t \leq t_0$, podemos usar la métrica de Kasner y tomar el vacío a $t = t_0$ como el estado fundamental del campo cuántico.

Como se muestra en [3] cuando $t_0 < t < t^*$ donde

$$t^* = t_0(t_0/t_{Pl})^{2/(1+|p_1|)}, \tag{3.46}$$

el *backreaction* de las partículas creadas en la métrica es todavía pequeño y puede despreciarse,es decir, podemos calcular la creación de partículas en una métrica de Kasner dada. Al mismo tiempo, cuando $t \geq t^*$ podemos despreciar los efectos cuánticos locales y describir la evolución métrica por las ecuaciones de Einstein en el lado derecho de las cuales sólo el tensor energía momento clásico de lasc partículas creadas en la época $t \sim t_0$. De hecho, la contribución a $\langle T_\mu^\nu \rangle$ de términos locales conectados con la producción de partículas y polarizaciones del vacío en un momento dado decrece como t^{-4}. Al mismo tiempo, la contribución de las partículas creadas a $t \sim t_0$ (cuando el proceso de creación tiene lugar de manera más intensa) decrece al crecer t sólo como $t^{-2+p} t_0^{-2-p}$ donde $p \geq 0$. Para $t \gg t_0$ domina y T_μ^ν tiene la forma del tensor energía momento de un gas de partículas clásicas

$$\rho \sim (2\pi)^{-3} V^{-4/3} \int d^3k \omega n(k) \tag{3.47}$$

$$P_i \sim (2\pi)^{-3} V^{-2/3} a_i^{-2} \int d^3k k_i^2 \omega^{-1} n(k). \tag{3.48}$$

La función de distribución $n(k)$ es finita y no depende del método de renormalización de los términos locales. La principal contribución a estas ecuaciones se debe a partículas con energías $k_0 \equiv \omega V^{-1} \sim t_0^{-1}$ y para $t_0 \gg m^{-1}$ podemos despreciar su masa. En la figura (**??**) se muestra la variación de los factores de escala $a_1(t)$ y $a_2(t) = a_3(t)$ para el caso en el cual $\tau_0 \equiv t_0/t_{Pl}$. Los valores de a_{0i} se han tomado de forma que $a_1(t_0) = a_2(t_0) = a_3(t_0)$. En el intervalor $t_0 < t < t^*$ donde $t^* = t_0\tau_0^{3/2}$ se tiene un estado de vacío tipo Kasner. Cuando t_t^* la presión del flujo de partículas creadas influencia la evolución de la métrica. Cuando $t > t^*$ la evolución va a suprimir la alta presión anómala a lo largo del eje x_1:$a_1 \sim t$,$a_2 \sim \ln^{1/2} t$,$P_3 \sim t^{-1}$. En el momento en que $t \sim t_{eq} = t^*\tau_0^{3/2}(2\ln\tau_0)^{1/2}$ la presión se iguala ($P_1 = P_2$) y $a_1 = a_2$. El siguiente, que precede directamente al estadío de expansión tipo Friedmann, tiene lugar cuando $t \sim t_D = t_0\tau_0^3 = \ln^{3/2}\tau_0$. Cuando $t > t_D$ ocurre un *amortiguamiento* de las anisotropías, teniendose $a_1 \sim cte$ y $a_2 \sim (t/t_D)^{2/3}$. El estado de *amortiguamiento* continua hasta $t \sim t_F$ donde

$$t_F = t_D(\ln\tau_0)^{3/2} = t_0(\tau_0 \ln\tau_0)^3. \tag{3.49}$$

Cuando $t > t_F$ la anisotropía decrece rapidamente

$$\ln\left(\frac{a_2}{a_1}\right) \sim \left(\frac{t_c}{t}\right)^{1/4} \sin(A\ln t + cte) \tag{3.50}$$

donde $A \sim 1$ y $a_1 \sim a_2 \sim t^{1/2}$, es decir, tiene lugar una expansión tipo Friedmann. Los resultados anteriores son válidos para $t_0 \gg t_{Pl}$ ($\tau_0 \gg 1$). Si fijamos $t_0 \sim t_{Pl}$ entonces $t_F \sim t_{Pl}$. En otras palabras, si *encendemos* la creación de partículas a la escala de Planck la isotropización es practicamente instantanea!. Los efectos cuánticos de creación de partículas en los modelos anisótropos considerados resuelven el problema.

Capítulo 4

Perturbaciones escalares y tensoriales

The modern physicist is a quantum theorist on Monday, Wednesday, and Friday and a student of gravitational relativity theory on Tuesday, Thursday, and Saturday. On Sunday he is neither, but is praying to his God that someone, preferably himself, will find the reconciliation between the two views.

Norbert Weiner

4.1. Perturbaciones del *background*

Veámos ahora como todo el formalismo de los capítulos anteriores se traduce en cosmología. Separemos el inflatón en dos partes, una parte de *background* ϕ_0, y una perturbación local $\delta\phi$,

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \phi_0(t) + \delta\phi(\mathbf{x}, t). \tag{4.1}$$

Asumamos que el comportamiento del *background* es clásico y centrémonos en las perturbaciones, que cuantizaremos para encontrar las amplitudes de las perturbaciones cuánticas que se convertiran eventualmente en perturbaciones cosmológicas observables. Como sabemos el inflatón está gobernado por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial_\mu\phi - V(\phi). \tag{4.2}$$

Introduciendo (4.1) en la ecuación de movimiento para el inflatón (**??**) y teniendo en cuenta que es satisfecha por ϕ_0 tenemos

$$\frac{d}{dt^2}(\phi_0 + \delta\phi) + 3H\frac{d}{dt}(\phi_0 + \delta\phi) - \frac{1}{a^2}\nabla^2(\phi_0 + \delta\phi) + \frac{dV(\phi_0 + \delta\phi)}{d(\phi_0 + \delta\phi)} = 0. \tag{4.3}$$

Puesto que la perturbación es pequeña $\frac{d}{d(\phi_0+\delta\phi)} \simeq \frac{d}{d\phi_0} \equiv'$. Expandiendo el potencial a primer orden tenemos

$$\delta\ddot{\phi} + 3H\delta\dot{\phi} - \frac{1}{a^2}\nabla^2\delta\phi + \delta\phi V''(\phi_0) = 0. \tag{4.4}$$

Expandamos la perturbación en modos Fourier

$$\delta\phi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}}\delta\phi(\mathbf{k}, t)e^{i\mathbf{kx}}, \tag{4.5}$$

donde $\mathbf{k}$ y $\mathbf{x}$ son respectivamente el número de ondas comovil y las coordenadas. El número de onda físico (asociado con la longitud de onda física) y las coordenadas físicas son respectivamente $k_{ph} = k/a$ y $x_{ph} = ax$. En términos de estos modos la ecuación de movimiento se escribe a primer orden como

$$\delta\ddot{\phi}(\mathbf{k}, t) + 3H\delta\dot{\phi}(\mathbf{k}, t) - \frac{k^2}{a^2}\nabla^2\delta\phi(\mathbf{k}, t) + \delta\phi(\mathbf{k}, t)V''(\phi_0) = 0. \tag{4.6}$$

A diferencia de lo que ocurría con un campo escalar libre en un espacio tiempo plano, en un espacio tiempo curvo tenemos interacción entre la perturbación y el potencial $V(\phi_0)$.

4.2. Gaussianidad y el espectro de potencias

Para discutir la generación y evolución de las perturbaciones debemos fijar antes algún formalismo y considerar la naturaleza estadística de las mismas. Esto es crucial en el proceso de comparar un modelo dado con las observaciones.

En el estado de vacío en un espacio tiempo plano, en cualquier instante, los coeficientes de Fourier $\delta\phi_k$ no tienen valores bien definidos. El estado de vacío, no obstante, puede expandirse en términos de estados en los cuales tengan valores bien definidos. De acuerdo con la teoría cuántica de campos, las partes real e imaginaria de cada componente de $\delta\phi_k$ tienen la dinámica de un oscilador armónico, lo que se puede demostrar facilmente considerando el Lagrangiano para un campo escalar masivo libre

$$L = \frac{1}{2}\int d^3r\left(\dot{\phi}^2 - (\nabla\phi)^2 - m^2\phi^2\right). \tag{4.7}$$

Escribamos la serie de Fourier en un volumen V

$$\phi = \sqrt{1/V}\sum_n \phi_{p_n}e^{i\mathbf{pr}}, \tag{4.8}$$

donde el momento sólo puede tomar valores discretos. Introduciendo esto en el Lagrangiano, tenemos

$$L = \frac{1}{2}\sum_n \left(|\dot{\phi}_{p_n}|^2 - E_{p_n}^2|\phi_{p_n}|^2\right), \tag{4.9}$$

donde $E_{p_n}^2 = p_n^2 + m^2$. En el último paso hemos usado la ortogonalidad

$$\frac{1}{V}\int d^3 r e^{ik_n r} e^{-ik_m r} = \delta_{nm}, \tag{4.10}$$

y hemos supuesto que el campo es real $\phi^*_{\mathbf{p}} = \phi_{-\mathbf{p}}$. Introduzcamos las partes real e imaginaria escribiendo $\phi_{p_n} = R_n + iI_n$. El Lagrangiano se escribe

$$L = \sum_n \Big[(\dot{R}_n^2 - E_n^2 R_n^2) + (\dot{I}_n^2 - E_n^2 I_n^2)\Big], \tag{4.11}$$

donde la suma es sólo para uno de cada par $\mathbf{p}_n$ y $\mathbf{p}_n$. Centremonos en R_n, el Lagrangiano es $(\dot{q}_n^2 - E_n^2 q_n^2)/2$, donde $q_n \equiv \sqrt{2}R_n$. La ecuación de movimiento es

$$\ddot{q}_n = -E_n q_n. \tag{4.12}$$

Consideremos de nuevo los momentos discretizados. La probabilidad de encontrar R_n en un intervalo dado es $\mathbf{P}(R_n)d(R_n)$, donde

$$\mathbf{P}(R_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} e^{\frac{1}{2}\frac{R_n^2}{\sigma_n^2}}, \tag{4.13}$$

donde $\sigma_n^2 = \langle R_n^2\rangle$ es la varianza. Expresiones idénticas se encuentran para la parte imaginaria I_n, y tiene la misma varianza

$$\sigma_n^2 = \langle R_n^2\rangle = \langle I_n^2\rangle = \frac{1}{2}\langle|\phi_{p_n}^2|\rangle. \tag{4.14}$$

La fase de ϕ_{p_n} es aleatoria, con una distribución de probabilidad uniforme. Podemos escribir

$$\frac{1}{2}\langle\phi^*_{p_n}\phi_{p'_n}\rangle = \delta_{nn'}\sigma_n^2. \tag{4.15}$$

Para nuestros fines, es más conveniente usar una cantidad $\mathcal{P}_\phi$, conocida como el espectro de potencias del campo escalar ϕ, y definida como

$$\mathcal{P}_\phi(p) \equiv \frac{1}{(2\pi)^3}4\pi p^3\langle|\phi_{p_n}^2|\rangle = \frac{p^3}{2\pi^2}\langle|\phi_{p_n}^2|\rangle. \tag{4.16}$$

En el límite en el cual el volumen $V \to \infty$ la serie de Fourier se transforma en una integral de Fourier

$$\phi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}}\phi(\mathbf{k})e^{i\mathbf{kx}}. \tag{4.17}$$

y el espectro de potencias viene dado por

$$\langle \phi^*(\mathbf{k})\phi(\mathbf{k'})\rangle = \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k'})\frac{2\pi^2}{k^3}\mathcal{P}_\phi(\mathbf{k}). \tag{4.18}$$

La función de correlación para el campo en la representación espacial se expresa a través del espectro de potencias en la forma

$$\langle \phi^2(x)\rangle = \int_0^\infty \frac{dk}{k}\mathcal{P}_\phi(k). \tag{4.19}$$

Merece la pena hacer notar que al escribir la ecuación de campo para $\delta\phi$ a primer orden, asumiendo que las perturbaciones son pequeñas, hemos despreciado cualquier interacción entre las perturbaciones y otros campos. Si este no es el caso durante inflación la teoría de perturbaciones cosmológica se puede aplicar solamente a una época posterior. Las fluctuaciones de vacío de diferentes modos se acoplarán, produciendo no gaussianidades en las perturbaciones. La gaussianidad simplifica enormemente la discusión y la asumiremos en todo lo que sigue. Por otro lado, la mayoría de los resultados se siguen aplicando en el caso contrario, podemos definir un espectro y una función de correlación, aunque no nos proporcionan una descripción completa de las propiedades estadísticas.

4.3. Fluctuaciones cuánticas durante una expansión tipo de Sitter

Consideremos una época en la que $H = cte$, o equivalentemente

$$a(t) = e^{Ht} \quad , \quad a(\eta) = -\frac{1}{H\eta}(\eta < 0), \tag{4.20}$$

donde $d\eta = \frac{dt}{a}$ es el tiempo conforme. Asumamos que la segunda derivada del potencial es constante en el tiempo

$$V''(\phi_0) = m_\phi^2, \tag{4.21}$$

que llamaremos la masa del campo. La ecuacion de movimiento para la perturbación $\delta\phi$ se escribe

$$\delta\ddot{\phi} + 3H\delta\dot{\phi} - \frac{1}{a^2}\nabla^2(\delta\phi) + m_\phi^2\delta\phi = 0 \tag{4.22}$$

Tras la cuantización la expresión normalizada para el operador campo es

$$\delta\phi = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{1}{2k}}[a_k\delta\phi_k(t)e^{i\mathbf{kx}} + c.c], \tag{4.23}$$

donde el valor de k viene dado por $k^2 = \mathbf{k}^2 = k_x k_y^2 + k_z^2$, y $\delta\phi_k$ satisface la siguiente expresión en tiempo conforme

$$\delta\phi_k'' + 2\frac{a'}{a}\delta\phi_k + k^2\delta\phi_k + a^2 m_\phi^2 \delta\phi_k = 0. \tag{4.24}$$

Puesto que la ecuación anterior no depende de la dirección del vector $\mathbf{k}$ denotaremos el índice del campo por k de aquí en adelante. La ecuación anterior se puede expresar de una manera mucho más sencilla, a la par que intuitiva y elegante, definiendo una nueva variable χ_k'' dada por

$$\delta\phi_k(\eta) = \frac{\chi_k(\eta)}{a(\eta)}. \tag{4.25}$$

$\frac{\chi_k(\eta)}{a(\eta)}$ es la única parte con una dependencia no trivial con η en el operador campo, y χ_k satisface

$$\chi_k'' + \omega_k^2(\eta)\chi_k = 0, \tag{4.26}$$

donde

$$\omega_k^2 = k^2 + M^2(\eta) = k^2 + a^2(\eta)(m_\phi^2 - 2H^2) = k^2 + \frac{1}{\eta^2}\left(\frac{m_\phi^2}{H^2} - 2\right). \tag{4.27}$$

La ecuación (5.10) se puede reescribir de una forma más característica

$$\chi_k'' + \Big[k^2 - \frac{1}{\eta^2}\left(\nu_\phi^2 - \frac{1}{4}\right)\Big]\chi_k = 0, \tag{4.28}$$

Para ν_ϕ real, es decir $\frac{3}{2} > \frac{m_\phi}{H}$, la solución genérica es una combinación lineal de las funciones de Hankel de primer y segundo tipo

$$\chi_k = \sqrt{-\eta}[c_1(k)H_{\nu_\phi}^{(1)}(-k\eta) + c_2(k)H_{\nu_\phi}^{(2)}(-k\eta)]. \tag{4.29}$$

Imponemos que dentro del horizonte la solución encaje con una onda plana $e^{-ik\eta}/\sqrt{2k}$, que es lo que esperamos en un espacio tiempo plano[1].

---

[1]

Los campos cuánticos en el espacio tiempo de de Sitter tiene un estado de vacío privilegiado conocido como vacío de Bunch-Davies (BD), definido esencialmente como el vacío Minkowski en el límite $\eta \to -\infty$ de cada modo.

Antes de introducir el vacío de BD, consideremos la prescripción de vacío instantáneo a $\eta = \eta_0$. Si tenemos $\omega_k^2(\eta) > 0$ para todo k, esta prescripción llevaría a un estado de vacío bien definido. Sin embargo, puesto que $m << H^2$, existe siempre un k suficientemente pequeño tal que $k|\eta_0| << 1$ y por tanto $\omega_k^2(\eta_0) < 0$. La energía del modo k no puede minimizarse cuando $\omega_k^2 < 0$, y por tanto no podemos definir un estado de vacío para

Sabiendo que para $k \gg aH$ $(-k\eta \gg 1)$

$$H^{(1)}_{\nu_\phi}(x \gg 1) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i(x-\pi/2\nu_\phi-\pi/4)} \tag{4.30}$$

$$H^{(2)}_{\nu\phi}(x \gg 1) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-i(x-\pi/2\nu_\phi-\pi/4)}, \tag{4.31}$$

fijamos $c_2(k) = 0$ y $c_1(k) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i(\nu_\phi-\pi/2)\pi/2}$. La solución exacta resulta ser

$$\chi_k = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i(\nu_\phi+1/2)\pi/2} \sqrt{-\eta} H^{(1)}_{\nu_\phi}(-k\eta). \tag{4.32}$$

En el límite opuesto, a escalas superhorizonte, tenemos

$$H^{(}_{\nu_\phi}1)(x << 1) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-i\pi/2} 2^{\nu_\phi-3/2} \frac{\Gamma(\nu_\phi)}{\Gamma(3/2)} x^{-\nu_\phi}, \tag{4.33}$$

y la fluctuación resulta

$$\chi_k = e^{i(\nu_\phi-1/2)\pi/2} 2^{\nu_\phi-3/2} \frac{\Gamma(\nu_\phi)}{\Gamma(3/2)} \frac{1}{\sqrt{2k}} (-k\eta)^{1/2-\nu_\phi}. \tag{4.34}$$

Vemos que las formas asintóticas de los modos dependen de $k|\eta|$. Una onda con número de onda k tiene una longitud comovil $\lambda \sim k^{-1}$ y una longitud de onda física $\lambda_{ph} = a(\eta)\lambda$, por tanto

$$k|\eta| \sim \frac{1}{\lambda}\frac{1}{aH} = \frac{H^{-1}}{\lambda_{ph}}. \tag{4.35}$$

Esto sugiere la siguiente interpretación física. Valores grandes de $k|\eta|$ corresponden a longitudes de onda que son mucho más pequeñas que la distancia al horizonte H^{-1} en el tiempo η (modos subhorizonte). Estos modos no son afectados por la curvatura del espacio tiempo. Por otro lado, pequeños valores de $k\eta$ corresponden a longitudes de onda física $\lambda_{ph} >> H^{-1}$ que se

el campo cuántico completo (para todos los modos) sino sólo para los modos χ_k con $k|\eta_0| << 1$, es decir, para los modos subhorizonte en $\eta = \eta_0$. Esta definición parcial del vacío es adecuada si el tiempo η_0 se elige lo suficientemente temprano como para que todos los modos observacionalmente relavantes sean modos subhorizonte en ese tiempo.

La motivación para introducir el estado de vacío de Bunch-Davies es la siguiente. La frecuencia efectiva $\omega_k(\eta)$ se hace constante en el límite $\eta \to -\infty$. Fisicamente, la influencia de la gravedad en cada modo χ_k es despreciable a tiempos (dependientes de k) suficientemente tempranos. De esta forma es natural definir las fluctuaciones en los modos $\chi_k(\eta)$ aplicando la prescripción de vacío de Minkowski separadamente para cada modo χ_k.

extienden más allá del horizonte. Estos modos superhorizonte se ven afectados fuertemente por la gravedad. Un modo con un número de onda comóvil k es subhorizonte a tiempos tempranos y llega a ser superhorizonte en un tiempo $\eta = \eta_k$, dependiente de k en el cual la longitud de onda física λ_{ph} es igual a la escala del horizonte, es decir $k|\eta| = 1$. A este tiempo se le conoce como momento de *cruce del horizonte* para el modo k. Nótese que la existencia de esto se debe a una expansión acelerada del espacio tiempo de de Sitter ($\ddot{a} > 0$), y no habría cruce del horizonte si la expansión fuera decelerada.

Volviendo a la perturbación original $\delta\phi_k = \frac{\chi_k}{a}$ y tomando el valor absoluto tenemos

$$|\delta\phi_k| = 2^{\nu_\phi - 3/2} \frac{\Gamma(\nu_\phi)}{\Gamma(3/2)} \frac{H}{\sqrt{2k^3}} \left(\frac{k}{aH}\right)^{(3/2-\nu_\phi)}, \tag{4.36}$$

expresión que tiene una ligera dependencia con el tiempo. Definiendo un nuevo parámetro $\alpha_\phi \equiv \frac{m_\phi^2}{3h^2}$ (asumiendo que $\alpha_\phi << 1$), podemos escribir, a primer orden en este parámetro

$$\frac{3}{2} - \nu_\phi \simeq \alpha_\phi, \tag{4.37}$$

y el espectro de potencias se escribe

$$\mathcal{P}_\phi(k) = \left(\frac{2^{(\nu_\phi - \frac{3}{2})}\Gamma(\nu_\phi)}{\Gamma(3/2)}\right)^2 \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2 \left(\frac{k}{aH}\right)^{2\alpha_\phi}. \tag{4.38}$$

En el caso en el cual el campo es poco masivo $m_\phi << H^2$, tenemos $\nu_\phi \simeq \frac{3}{2}$ y tenemos un perfecto invariante de escala

$$\mathcal{P}_\phi(k) = \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2, \tag{4.39}$$

que es un resultado bien conocido. En el caso opuesto ν_ϕ es imaginario, es decir, $m_\phi > \frac{3}{2}H$. Hacemos la siguiente sustitución $\tilde{\nu}_p = -i\nu_\phi$. El espectro de potencias en este caso viene dado por

$$\mathcal{P} \simeq \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2 \left(\frac{H}{m_\phi}\right) \left(\frac{k}{aH}\right)^3. \tag{4.40}$$

Esta expresión decae rapidamente para longitudes de onda largas, además de ver suprimido su valor por el cociente (H/m_ϕ) con respecto al límite anterior. Este modelo se conoce como el modelo de Linde-Mukhanov y da lugar a perturbaciones isocurvatura, tema que escapa del propósito general de este trabajo.

4.4. Fluctuaciones cuánticas durante slow-roll

Hasta ahora hemos calculado la evolución y el espectro de potencias de las fluctuaciones cuánticas asumiendo que el factor de Hubble H es constante durante una época, dando lugar a un crecimiento exponencial del factor de escala. Sin embargo, podemos describir la evolución del factor de Hubble utilizando el parámetro de slow-roll ϵ. Las dos ecuaciones acopladas de primer orden que debemos resolver son

$$\frac{dH}{d\eta} = -a\epsilon H^2 \qquad \frac{da}{d\eta} = Ha^2, \tag{4.41}$$

que indican una variación débil de H. Usando la definición para el tiempo conforme y combinando las dos ecuaciones anteriores obtenemos la expresión para el factor de escala

$$a(\eta) = -\frac{1}{H\eta(1-\epsilon)}. \tag{4.42}$$

En este caso tenemos

$$M^2(\eta) = m_\phi^2 a^2 - \frac{a''}{a}, \tag{4.43}$$

donde

$$\frac{a''}{a} = \frac{d}{dt}(a\dot{a}) = a^2\left(H^2 + \frac{\ddot{a}}{a}\right) = a^2(2-\epsilon)H^2 \simeq (2+3\epsilon)\frac{1}{\eta^2}. \tag{4.44}$$

Tomando $\eta_\phi = m_\phi^2/3H^2$ y expandiendo para pequeños valores de ϵ y η_ϕ despreciando $\mathcal{O}(\epsilon^2, \eta_\phi^2, \epsilon\eta_\phi)$ tenemos

$$M^2(\eta) = -\frac{1}{\eta^2}(2 + 3\epsilon + m_\phi^2 a^2 \eta^2) = -\frac{1}{\eta^2}\left(\nu_\phi^2 - \frac{1}{4}\right), \tag{4.45}$$

donde

$$\nu_\phi^2 = \frac{9}{4} + 3\epsilon - 3\eta_\phi \longrightarrow \nu_\phi \simeq \frac{3}{2} + \epsilon - \eta_\phi. \tag{4.46}$$

Y por tanto el espectro de potencias es

$$\mathcal{P}_\phi(k) \sim \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2 \left(\frac{k}{aH}\right)^{3-2\nu_\phi}. \tag{4.47}$$

Definimos el índice espectral como

$$n_\phi - 1 \equiv \frac{d\ln\mathcal{P}_\phi(k)}{d\ln k} = 3 - 2\nu_\phi = 2\eta_\phi - 2\epsilon \tag{4.48}$$

Merece la pena darse cuenta, comparando con la expresión (4.36), que a escalas superhorizonte

$$\delta\phi_k \simeq \frac{H}{\sqrt{2k^3}}\left(\frac{k}{aH}\right)^{\eta_\phi-\epsilon} = \frac{H}{\sqrt{2k^3}}\exp\left[\ln\left(\frac{k}{aH}\right)^{\eta_\phi-\epsilon}\right] \simeq \frac{H}{\sqrt{2k^3}}\left[1+(\eta_\phi-\epsilon)\ln\left(\frac{k}{aH}\right)\right] \tag{4.49}$$

y

$$|\delta\dot{\phi}_k| \simeq |H(\eta_\phi-\epsilon)\delta\phi_k| << |H\delta\phi_k|. \tag{4.50}$$

Es decir, a escalas superhorizonte, la variación temporal se puede despreciar puesto que, durante inflación, $|\delta\dot{\phi}_k| \simeq \mathcal{O}(\epsilon,\eta_\phi)|\delta\phi_k|$ y $\epsilon << 1$ ($\eta_\phi << 1$). Este *freezing* de los modos superhorizontes es un resultado muy importante, y está fuertemente relacionado con el comportamiento de las perturbaciones en el potencial gravitacional.

De los desarrollos de esta sección y de la sección previa concluimos que tanto en el caso de inflación tipo de Sitter y aproximación encontramos espectros que son practicamente invariantes de escala.

4.5. Fluctuaciones métricas

La teoría de perturbaciones lineales es una poderosa e importante herramienta en la cosmología moderna y se usa para describir la formación y evolución de estructuras en el Universo. Como vimos, la idea de la inflación cosmológica se propuso para explicar las inhomogeneidades aparentes del Universo actual. Las semillas de esas estructuras se generaron caóticamente durante el periodo inflacionario. En la sección anterior hemos visto como se generan las perturbaciones de un campo escalar durante una expansión de tipo de Sitter y como se *congelan* fuera del horizonte. Puesto que el inflatón es un campo escalar, es de esperar que ese tipo de perturbaciones se generen. Sin embargo, el inflatón es un campo muy especial puesto que, según asumimos, dómina la densidad de energía del Universo durante ese periodo particular. Cualquier perturbación en el inflatón causará una perturbación en el tensor energía momento, y este a su vez implica, a través de las ecuaciones de Einstein una perturbación en el tensor métrico. Por otro lado, una perturbación en la métrica producirá un *backreaction* en el propio campo, a través de la ecuación de Klein-Gordon perturbada. La cadena lógica nos lleva a concluir que las perturbaciones en la métrica y en el inflatón están estrechamente relacionadas y deben ser estudiadas de manera conjunta. El objetivo en lo que sigue será encontrar la evolución de las fluctuaciones cuánticas cuando estas se acoplan a la gravedad.

Consideremos una perturbación en el tensor métrico.

$$g_{\mu\nu} \quad = \quad g^{(0)}_{\mu\nu}(t) + \delta g_{\mu\nu}(\mathbf{x}, t)\,; \qquad \delta g_{\mu\nu} \ll g^{(0)}_{\mu\nu}\,. \tag{4.51}$$

donde $g^{(0)}_{\mu\nu}$ es la métrica de *background*. Podemos descomponer las perturbaciones métricas de acuerdo a su espín con respecto a una rotación local de las coordenadas espaciales en hipersuperficies de tiempo constante. Esto nos lleva a tres tipos de perturbaciones

- Perturbaciones escalares
- Perturbaciones vectoriales
- Perturbaciones tensoriales.

Las perturbaciones tensoriales u ondas gravitacionales tienen espín 2 y son los verdaderos grados de libertad de los campos gravitacionales en el sentido de que existen incluso en el vacío. Las perturbaciones vector son modos de espín 1 que surgen de campos de velocidad rotacionales y que a menudo se denominan vorticidades. Las perturbaciones escalares, por último, tienen espín cero.

Veámos cuales son los grados de libertad del problema. Tomemos un espacio tiempo de dimensión $n + 1$, donde n es el número de coordenadas espaciales. El tensor simétrico $g_{\mu\nu}$ tiene $\frac{1}{2}(n + 2)(n + 1)$ grados de libertad. Por otro lado, podemos realizar $(n + 1)$ transformaciones de coordenadas para eliminar $(n + 1)$ grados de libertad, lo que nos deja con $\frac{1}{2}(n + 1)n$, que contienen modos escalares,vector y tensor. De acuerdo con el teorema de Hemholtz siempre podemos descomponer un vector u_i $(i = 1, \ldots, n)$ como $\partial v + v_i$, donde v es un escalar, normalmente llamado flujo de potencial que tiene circulación nula $v_{[i,j]} = 0$ y v_i es un vector real que recibe el nombre de vorticidad que tiene divergencia nula $\nabla\cdot\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Esto significa que existen $(n-1)$ modos vectoriales reales o vorticidades. Además, cualquier tensor sin traza genérico Π_{ij} se puede descomponer como $\Pi_{ij} = \Pi^S_{ij} + \Pi^V_{ij} + \Pi^T_{ij}$, donde $\Pi^S_{ij} = \left(-\frac{k_i k_j}{k^2} + \frac{1}{3}\delta_{ij}\right)\Pi$, $\Pi^V_{ij} = (-i/2k)\left(k_i\Pi_j + k_j\Pi_i\right)$ $(k_i\Pi_i = 0)$ (donde $k_i\Pi^T_{ij} = 0$) son los modos escalar y vector ya tenidos en cuenta, mientras que Π^T_{ij} son los verdaderos modos simétricos y sin traza que además deben ser transversos $k_i\Pi^T_{ij} = 0$. El número de modos escalares de libertad es

$$\frac{1}{2}n(n + 1) - (n - 1) - \frac{1}{2}(n - 2)(n + 1) = 2. \tag{4.52}$$

En cuatro dimensiones $(n = 3)$ esperamos dos grados de libertad escalares, dos vectoriales y dos tensoriales.

A orden lineal, las fluctuaciones escalar,tensor y vector evolucionan independientemente (están desacopladas) y es posible analizarlas por separado. Puesto que durante inflación no se excitan campos de velocidad rotacionales no tendremos en cuenta las perturbaciones vector. Analizaremos la generación de modos tensoriales más adelante.

Considerando sólo las perturbaciones escalares, la métrica perturbada más general se escribe

$$g_{\mu\nu} = a^2 \begin{pmatrix} -1 - 2A & \partial_i B \\ \partial_i B & (1 - 2\psi)\,\delta_{ij} + D_{ij}E \end{pmatrix}, \tag{4.53}$$

de forma que el elemento de línea se escribe

$$ds^2 = a^2((-1-2A)d\eta^2 + 2\,\partial_i B\, d\eta\, dx^i + ((1-2\psi)\delta_{ij} + D_{ij}E)\, dx^i\, dx^j), \tag{4.54}$$

donde $D_{ij} = \left(\partial_i\partial_j - \frac{1}{3}\,\delta_{ij}\,\nabla^2\right)$. es un operador sin traza. Determinemos ahora la inversa $g^{\mu\nu}$ a primer orden

$$g^{\mu\alpha}\, g_{\alpha\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}. \tag{4.55}$$

Tenemos por tanto

$$\left(g^{\mu\alpha}_{(0)} + \delta g^{\mu\alpha}\right)\left(g^{(0)}_{\alpha\nu} + \delta g_{\alpha\nu}\right) = \delta^{\mu}_{\nu}\,, \tag{4.56}$$

donde $g^{\mu\alpha}_{(0)}$ es simplemente la métrica FRW no perturbada. Puesto que

$$g^{\mu\nu}_{(0)} = \frac{1}{a^2}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \delta^{ij} \end{pmatrix}, \tag{4.57}$$

podemos en general escribir

$$\begin{aligned} g^{00} &= \frac{1}{a^2}\,(-1 + X)\,; \\ g^{0i} &= \frac{1}{a^2}\,\partial^i Y\,; \\ g^{ij} &= \frac{1}{a^2}\,\left((1 + 2Z)\,\delta^{ij} + D^{ij}K\right). \end{aligned} \tag{4.58}$$

Introduciendo estas expresiones en la ecuación (4.56) encontramos que $\mu = \nu = 0$

$$(-1 + X)(-1 - 2A) + \partial^i Y\,\partial_i B = 1. \tag{4.59}$$

Despreciando los términos $-2A\cdot X$ e $\partial^i Y\cdot\partial_i B$ pues son de segundo orden en las perturbaciones tenemos

$$1 - X + 2A = 1 \qquad \Rightarrow \qquad X = 2A\,. \tag{4.60}$$

De forma análoga las componentes $\mu = 0$, $\nu = i$ de la ecuación (4.56) dan

$$(-1 + 2\,A)(\partial_i B) + \partial^j Y\,[(1 - 2\,\psi)\delta_{ji} + D_{ji}E] = 0. \tag{4.61}$$

De nuevo a primer orden obtenemos

$$-\partial_i B + \partial_i Y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad Y = B\,. \tag{4.62}$$

Por último, las componentes $\mu = i, \quad \nu = j$ dan

$$\partial^i B\,\partial_j B + \Big((1 + 2\,Z)\delta^{ik} + D^{ik}K\Big)\,((1 - 2\,\psi)\delta_{kj} + D_{kj}E) = \delta^i_j. \tag{4.63}$$

Despreciando los términos a segundo orden

$$(1 - 2\,\psi + 2\,Z)\delta^i_j + D^i_j E + D^i_j K = \delta^i_j \Rightarrow Z = \psi\,; \qquad K = -\,E\,. \tag{4.64}$$

La métrica inversa resulta ser

$$g^{\mu\nu} = \frac{1}{a^2}\begin{pmatrix} -1 + 2\,A & \partial^i B \\ \partial^i B & (1 + 2\,\psi)\delta^{ij} - D^{ij}E \end{pmatrix}. \tag{4.65}$$

4.6. Conexion afín perturbada y el tensor de Einstein

Veámos como son la conexión afín y el tensor de Einstein pertubados. Consideremos para ello las conexiones afín no perturbadas

$$\Gamma^0_{00} = \frac{a'}{a}\,; \qquad \Gamma^i_{0j} = \frac{a'}{a}, \delta^i_j\,; \qquad \Gamma^0_{ij} = \frac{a'}{a}, \delta_{ij}\,; \tag{4.66}$$

$$\Gamma^i_{00} = \Gamma^0_{0i} = \Gamma^i_{jk} = 0\,. \tag{4.67}$$

La expresión para la conexión afín en términos de la métrica es

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}\,g^{\alpha\rho}\left(\frac{\partial g_{\rho\gamma}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\beta\rho}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\rho}\right) \tag{4.68}$$

lo que implica

$$\begin{aligned} \delta\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} &= \frac{1}{2}\,\delta g^{\alpha\rho}\left(\frac{\partial g_{\rho\gamma}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\beta\rho}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\rho}\right) \\ &+ \frac{1}{2}\,g^{\alpha\rho}\left(\frac{\partial \delta g_{\rho\gamma}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial \delta g_{\beta\rho}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial \delta g_{\beta\gamma}}{\partial x^\rho}\right), \end{aligned} \tag{4.69}$$

Calculemos ahora la variación del tensor de Ricci

$$R_{\mu\nu} \,=\, \partial_\alpha \,\Gamma^\alpha_{\mu\nu} \,-\, \partial_\mu \,\Gamma^\alpha_{\nu\alpha} \,+\, \Gamma^\alpha_{\sigma\alpha}\,\Gamma^\sigma_{\mu\nu} \,-\, \Gamma^\alpha_{\sigma\nu}\,\Gamma^\sigma_{\mu\alpha}\,. \tag{4.70}$$

Su variación, a primer orden, es

$$\begin{aligned} \delta R_{\mu\nu} \;&=\; \partial_\alpha \,\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu} \,-\, \partial_\mu \,\delta\Gamma^\alpha_{\nu\alpha} \,+\, \delta\Gamma^\alpha_{\sigma\alpha}\,\Gamma^\sigma_{\mu\nu} \,+\, \Gamma^\alpha_{\sigma\alpha}\,\delta\Gamma^\sigma_{\mu\nu} \\ &-\; \delta\Gamma^\alpha_{\sigma\nu}\,\Gamma^\sigma_{\mu\alpha} \,-\, \Gamma^\alpha_{\sigma\nu}\,\delta\Gamma^\sigma_{\mu\alpha}\,. \end{aligned} \tag{4.71}$$

Los valores de background vienen dados por

$$R_{00} \,=\, -\,3\,\frac{a''}{a} \,+\, 3\,\left(\frac{a'}{a}\right)\,; \qquad R_{0i} \,=\, 0\,; \tag{4.72}$$

$$R_{ij} \,=\, \Big(\frac{a''}{a} \,+\, \left(\frac{a'}{a}\right)^2\Big)\,\delta_{ij} \tag{4.73}$$

que dan

$$\delta R_{00} = \frac{a'}{a}\partial_i\partial^i B + \partial_i\partial^i B' + \partial_i\partial^i A + 3\psi'' + 3\frac{a'}{a}\psi' + 3\frac{a'}{a}A'\;; \tag{4.74}$$

$$\delta R_{0i} = \frac{a''}{a}\partial_i B + \left(\frac{a'}{a}\right)^2\partial_i B + 2\partial_i\psi' + 2\frac{a'}{a}\partial_i A + \frac{1}{2}\partial_k D^k_i E'\;; \tag{4.75}$$

$$\begin{aligned} \delta R_{ij} \;&=\; \Big(-\frac{a'}{a}A' - 5\frac{a'}{a}\psi' - 2\frac{a''}{a}A - 2\left(\frac{a'}{a}\right)^2 A \\ &-\; 2\frac{a''}{a}\psi - 2\left(\frac{a'}{a}\right)^2\psi - \psi'' + \partial_k\partial^k\psi - \frac{a'}{a}\partial_k\partial^k B\Big)\delta_{ij} \\ &-\; \partial_i\partial_j B' + \frac{a'}{a}D_{ij}E' + \frac{a''}{a}D_{ij}E + \left(\frac{a'}{a}\right)^2 D_{ij}E \\ &+\; \frac{1}{2}D_{ij}E'' + \partial_i\partial_j\psi - \partial_i\partial_j A - 2\frac{a'}{a}\partial_i\partial_j B \\ &+\; \frac{1}{2}\partial_k\partial_i D^k_j E + \frac{1}{2}\partial_k\partial_j D^k_i E - \frac{1}{2}\partial_k\partial^k D_{ij}E\;; \end{aligned} \tag{4.76}$$

La perturbación en el escalar de curvatura

$$R \,=\, g^{\mu\alpha}\,R_{\alpha\mu}\,, \tag{4.77}$$

es, a primer orden

$$\delta R \,=\, \delta g^{\mu\alpha}\,R_{\alpha\mu} \,+\, g^{\mu\alpha}\,\delta R_{\alpha\mu}\,. \tag{4.78}$$

El valor de *background* es

$$R = \frac{6}{a^2}\frac{a''}{a}, \tag{4.79}$$

y de la ecuación (4.78) tenemos

$$\begin{aligned} \delta R &= \frac{1}{a^2}\Big(-6\frac{a'}{a}\partial_i\partial^i B - 2\partial_i\partial^i B' - 2\partial_i\partial^i A - 6\psi'' \\ &- 6\frac{a'}{a}A' - 18\frac{a'}{a}\psi' - 12\frac{a''}{a}A + 4\partial_i\partial^i\psi + \partial_k\partial^i D_i^k E\Big). \end{aligned} \tag{4.80}$$

Por último, con estos ingredientes podemos calcular las perturbaciones en el tensor de Einstein

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, g_{\mu\nu}\, R\,, \tag{4.81}$$

cuyas componentes de *background*

$$G_{00} = 3\left(\frac{a'}{a}\right)^2, ; \qquad G_{0i} = 0\,; \qquad G_{ij} = \Big(-2\,\frac{a''}{a} + \left(\frac{a'}{a}\right)^2 \Big)\,\delta_{ij}\,. \tag{4.82}$$

A primer orden, tenemos

$$\delta G_{\mu\nu} = \delta R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,\delta g_{\mu\nu}\, R - \frac{1}{2}\, g_{\mu\nu}\,\delta R\,, \tag{4.83}$$

o en componentes

$$\delta G_{00} = -2\frac{a'}{a}\,\partial_i\partial^i\, B - 6\frac{a'}{a}\,\psi' + 2\,\partial_i\partial^i\,\psi + \frac{1}{2}\,\partial_k\partial^i D_i^k E\,; \tag{4.84}$$

$$\delta G_{0i} = -2\frac{a''}{a}\,\partial_i B + \left(\frac{a'}{a}\right)^2\,\partial_i B + 2\partial_i\,\psi' + \frac{1}{2}\partial_k\, D_i^k E' + 2\,\frac{a'}{a}\,\partial_i A\,; \tag{4.85}$$

$$\begin{aligned} \delta G_{ij} &= \Bigg(2\frac{a'}{a}\,A' + 4\frac{a'}{a}\,\psi' + 4\frac{a''}{a}\,A - 2\left(\frac{a'}{a}\right)^2 A \\ &+ 4\frac{a''}{a}\,\psi - 2\left(\frac{a'}{a}\right)^2\psi + 2\psi'' - \partial_k\partial^k\,\psi \\ &+ 2\frac{a'}{a}\,\partial_k\partial^k B + \partial_k\partial^k B' + \partial_k\partial^k A + \frac{1}{2}\partial_k\partial^m\, D_m^k\, E\Bigg)\delta_{ij} \\ &- \partial_i\partial_j B' + \partial_i\partial_j\psi - \partial_i\partial_j A + \frac{a'}{a}\, D_{ij}E' - 2\,\frac{a''}{a}\, D_{ij}E \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \left(\frac{a'}{a}\right)^2 D_{ij}E + \frac{1}{2}D_{ij}E'' + \frac{1}{2}\partial_k\partial_i D^k_j E \\
&+ \frac{1}{2}\partial^k\partial_j D_{ik}E - \frac{1}{2}\partial_k\partial^k D_{ij}E - 2\,\frac{a'}{a}\partial_i\partial_j B\,. \qquad (4.86)
\end{aligned}
$$

Damos también, por conveniencia, las expresiones de las perturbaciones con un índice arriba y otro abajo

$$
\begin{aligned}
\delta G^\mu_\nu &= \delta(g^{\mu\alpha\, G_{\alpha\nu}}) \\
&= \delta g^{\mu\alpha}\, G_{\alpha\nu} \,+\, g^{\mu\alpha}\,\delta G_{\alpha\nu}\,, \qquad (4.87)
\end{aligned}
$$

o en componentes

$$\delta G^0_0 \,=\, 6\left(\frac{a'}{a}\right)^2 + 6\left(\frac{a'}{a}\right)\psi' \,+\, 2\,\frac{a'}{a}\partial_i\partial^i B \,-\, 2\,\partial_i\partial^i\psi \,-\, \frac{1}{2}\,\partial_k\partial^i\, D^k_i E\,. \qquad (4.88)$$

$$\delta G^0_i \,=\, -\,2\,\frac{a'}{a}\partial_i A \,-\, 2\,\partial_i\psi' \,-\, \frac{1}{2}\,\partial_k D^k_i E'\,. \qquad (4.89)$$

$$
\begin{aligned}
\delta G^i_j \,=\, &\left(2\,\frac{a'}{a}A' \,+\, 4\,\frac{a''}{a}A \,-\, 2\left(\frac{a'}{a}\right)^2 A \,+\, \partial_i\partial^i A \,+\, 4\,\frac{a'}{a}\psi' \,+\, 2\,\psi''\right. \\
&-\left.\partial_i\partial^i\psi \,+\, 2\,\frac{a'}{a}\partial_i\partial^i B \,+\, \partial_i\partial^i B' \,+\, \frac{1}{2}\partial_k\partial^m D^k_m E\right)\delta^i_j \\
&-\,\partial^i\partial_j A \,+\, \partial^i\partial_j\psi \,-\, 2\,\frac{a'}{a}\partial^i\partial_j B \,-\, \partial^i\partial_j B' \,+\, \frac{a'}{a}D^i_j E' \,+\, \frac{1}{2}\,D^i_j E'' \\
&+\,\frac{1}{2}\,\partial_k\partial^i\, D^k_j E \,+\, \frac{1}{2}\,\partial_k\partial_j\, D^{ik}E \,-\, \frac{1}{2}\,\partial_k\partial^k\, D^i_j E\,. \qquad (4.90)
\end{aligned}
$$

4.7. Tensor energía momento perturbado

Como vimos anteriomente, las perturbaciones de la métrica son inducidas por las perturbaciones del tensor energía momento del inflatón

$$T_{\mu\nu} \,=\, \partial_\mu\phi\,\partial_\nu\phi \,-\, g_{\mu\nu}\left(\frac{1}{2}\,g^{\alpha\beta}\,\partial_\alpha\phi\,\partial_\beta\phi \,-\, V(\phi)\right)\,, \qquad (4.91)$$

cuyos valores de *background* son

$$
\begin{aligned}
T_{00} &= \frac{1}{2}\,\phi'^2 \,+\, V(\phi)\,a^2 \\
T_{0i} &= 0\,; \\
T_{ij} &= \left(\frac{1}{2}\,\phi'^2 \,-\, V(\phi)\,a^2\right)\,\delta_{ij}\,. \qquad (4.92)
\end{aligned}
$$

El tensor energía momento perturbado se escribe

$$\begin{aligned} \delta T_{\mu\nu} &= \partial_\mu \delta\phi \, \partial_\nu \phi \, + \, \partial_\mu \phi \, \partial_\nu \delta\phi \, - \, \delta g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} \, g^{\alpha\beta} \, \partial_\alpha \phi \, \partial_\beta \phi \, + \, V(\phi) \right) \\ &- \, g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} \delta g^{\alpha\beta} \, \partial_\alpha \phi \, \partial_\beta \phi \, + \, g^{\alpha\beta} \, \partial_\alpha \delta\phi \, \partial_\beta \phi \, + \, \frac{\partial V}{\partial \phi} \, \delta\phi \, + \, \frac{\partial V}{\partial \phi} \delta\phi \right) \end{aligned} \quad (4.93)$$

o en componentes

$$\delta T_{00} \, = \, \delta\phi' \, \phi' \, + \, 2 \, A \, V(\phi) \, a^2 \, + \, a^2 \, \frac{\partial V}{\partial \phi} \, \delta\phi \, ; \quad (4.94)$$

$$\delta T_{0i} \, = \, \partial_i \, \delta\phi \, \phi' \, + \, \frac{1}{2} \, \partial_i B \, \phi'^2 \, - \, \partial_i B \, V(\phi) \, a^2 \, ; \quad (4.95)$$

$$\begin{aligned} \delta T_{ij} &= \left(\delta\phi' \, \phi' \, - \, A \, \phi'^2 \, - \, a^2 \, \frac{\partial V}{\partial \phi} \, \delta^{(1)} \phi \, - \, \psi \, \phi'^2 \, + \, 2 \, \psi \, V(\phi) \, a^2 \right) \delta_{ij} \\ &+ \, \frac{1}{2} \, D_{ij} E \, \phi'^2 \, - \, D_{ij} E \, V(\phi) \, a^2 \; . \end{aligned} \quad (4.96)$$

Por conveniencia, escribimos también las componentes mixtas

$$\begin{aligned} \delta T^\mu_\nu &= \delta(g^{\mu\alpha} \, T_{\alpha\nu}) \\ &= \delta g^{\mu\alpha} \, T_{\alpha\nu} \, + \, g^{\mu\alpha} \, \delta T_{\alpha\nu} \end{aligned} \quad (4.97)$$

o

$$\begin{aligned} \delta T^0_0 &= A \, \phi'^2 \, - \, \delta\phi' \, \phi' \, - \, \delta\phi \, \frac{\partial V}{\partial \phi} \, a^2 \, ; \\ \delta T^i_0 &= \partial^i B \, \phi'^2 \, + \, \partial^i \delta\phi \, \phi' \, ; \\ \delta T^0_i &= - \, \partial^i \delta\phi \, \phi' \, ; \\ \delta T^i_j &= \left(- \, A \, \phi'^2 \, + \, \delta\phi' \, \phi' \, - \, \delta\phi \, \frac{\partial V}{\partial \phi} \, a^2 \right) \delta^i_j \, . \end{aligned} \quad (4.98)$$

4.8. Ecuación de Klein Gordon perturbada

La ecuación de movimiento del inflatón es la ecuación de Klein-Gordon de un campo escalar bajo la acción de un potencial $V(\phi)$

$$\begin{aligned} \partial^\mu \partial_\mu \, \phi &= \frac{\partial V}{\partial \phi} \, ; \\ \partial_\mu \partial^\mu \phi &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \, \partial_\nu \left(\sqrt{-g} \, g^{\mu\nu} \, \partial_\nu \phi \right) \, ; \end{aligned} \quad (4.99)$$

que, a orden cero, da la ecuación de movimiento del inflatón.

$$\phi'' + 2\,\frac{a'}{a}\,\phi' = -\,\frac{\partial V}{\partial \phi}\,a^2\,. \tag{4.100}$$

La variación de la ecuación (4.99) es la suma de cuatro contribuciones diferentes correspondientes a las variaciones de $\frac{1}{\sqrt{-g}}$, $\sqrt{-g}$, $g^{\mu\nu}$ and ϕ. Para la variación de g tenemos

$$\delta g = g\,g^{\mu\nu}\delta g_{\nu\mu} = dg = g^{\mu\nu}dg_{\mu\nu} \tag{4.101}$$

que a orden lineal da

$$\begin{aligned} \delta\sqrt{-g} &= -\,\frac{\delta g}{2\sqrt{-g}}\,; \\ \delta\frac{1}{\sqrt{-g}} &= \frac{\delta\sqrt{-g}}{g}\,. \end{aligned} \tag{4.102}$$

Introduciendo estos resultados en la expresión para la variación de la ecuación (4.100)

$$\begin{aligned} \delta\partial_\mu\partial^\mu\,\phi &= -\,\delta\phi'' - 2\,\frac{a'}{a}\delta\phi' + \partial_i\partial^i\delta\phi + 2\,A\,\phi'' + 4\,\frac{a'}{a}A\,\phi' + A'\phi' \\ &+ 3\,\psi'\phi' + \partial_i\partial^i B\,\phi' \\ &= \delta\phi\,\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2}\,a^2\,. \end{aligned} \tag{4.103}$$

Usando la ecuación (4.100) para escribir

$$2\,A\,\phi'' + 4\,\frac{a'}{a}\phi' = 2\,A\,\frac{\partial V}{\partial\phi}\,, \tag{4.104}$$

la ecuación (4.103) resulta ser

$$\begin{aligned} \delta\phi'' + 2\,\frac{a'}{a}\delta\phi' &- \partial_i\partial^i\delta\phi - A'\phi' - 3\,\psi'\phi' - \partial_i\partial^i B\,\phi' \\ &= -\delta\phi\,\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2}\,a^2 - 2\,A\,\frac{\partial V}{\partial\phi}. \end{aligned} \tag{4.105}$$

Esta ecuación no se parece a la que hemos obtenido añadiendo una perturbación extra en nuestra teoría cuantica, (4.24), pero pronto descubriremos la correspondencia en un gauge particular.

4.9. La invarianza Gauge

Como ya indicamos, las perturbaciones en el campo escalar dominante causarán perturbaciones en la métrica, que es el espacio tiempo en si mismo. Consideraremos pequeñas perturbaciones lejos del del espacio tiempo homogéneo e isótropo, que en nuestro caso, es el espacio tiempo con secciones espaciales planas de FRW con cuyo elemento de línea estamos ya familiarizados

$$ds^2 = a^2(\eta)[d\eta^2 - \delta_{ij}dx^i dx^j] \tag{4.106}$$

La Relatividad General es una teoría gauge donde las transformaciones gauge son las transformaciones generales de coordenadas de un sistema de referencia local a otro. Cuando calculamos la perturbación de una cantidad dada, esta se define como la diferencia entre en valor de esa cantidad en el espacio tiempo real y el valor que toma en el *background*. Para realizar una comparación entre estos dos valores es necesario calcularlos en el mismo punto del espacio tiempo. Puesto que los dos valores *viven* en 2 geometrías diferentes, es necesario especificar un mapa que nos permita unir univocamente el mismo punto en los dos espacio-tiempos. A esta correspondencia se le denomina fijación del gauge y cambiar el mapa significa efectuar una transformación gauge. Fijar el gauge en GR implica elegir un sistema de coordenadas. Una elección de gauge *secciona* el espacio tiempo en *líneas* (correspondientes a coordenadas espaciales $\mathbf{x}$ fijas) y en *rebanadas* (correspondientes a un tiempo fijo η). Veamos una formulación más formal de esto

De la definición de la derivada de Lie sabemos que una transformación de coordenadas infinitesimal

$$\widetilde{x^\mu} = x^\mu + \delta x^\mu \tag{4.107}$$

implica una transformación en la perturbación de una cantidad genérica Q de la forma

$$\widetilde{\delta Q} = \delta Q + \pounds_{\delta x} Q_0 \tag{4.108}$$

donde Q_0 es el valor que toma la cantidad Q en el *background* y $\pounds_{\delta x}$ es la derivada de Lie de Q a lo largo del vector δx^μ. Para un tensor la transformación viene dada en la forma estandar

$$\tilde{B}_{\mu\nu}(\eta; x^i) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\nu} B_{\alpha\beta}(\eta - \delta\eta, x^i - \delta x^i) \tag{4.109}$$

o

$$\tilde{B}_{\mu\nu}(\eta; x^i) = B_{\mu\nu}(\eta; x^i) + B_{\alpha\nu}\partial_\mu \delta x^\alpha + B_{\mu\alpha}\partial_\nu \delta x^\alpha - \delta x^\lambda \partial_\lambda B_{\mu\nu} \tag{4.110}$$

Definiendo

$$\begin{aligned} \delta x^0 &= \xi^0(x^\mu)\,; \\ \delta x^i &= \partial^i\beta(x^\mu) \,+\, v^i(x^\mu)\,; \qquad \partial_i v^i \,=\, 0\,, \end{aligned} \tag{4.111}$$

es fácil deducir la ley de transformación de una cantidad f (como el campo ϕ o la densidad de energía ρ). Puesto que f es una cantidad escalar $f(\widetilde{x^\mu}) = f(x^\mu)$. Por otro lado, en una hipersuperficie de *background* no perturbada $\widetilde{f_0} = f_0$. Tenemos por tanto

$$\begin{aligned} \widetilde{\delta f}(\widetilde{x^\mu}) &= \widetilde{f}(\widetilde{x^\mu}) - \widetilde{f}_0(\widetilde{x^\mu}) \\ &= f(x^\mu) - f_0(\widetilde{x^\mu}) \\ &= f\left(\widetilde{x^\mu}\right) - f_0(\widetilde{x^\mu}) \\ &= f(\widetilde{x^\mu}) - \delta x^\mu \,\frac{\partial f}{\partial x^\mu}(\widetilde{x}) - f_0(\widetilde{x^\mu}), \\ &, \end{aligned} \tag{4.112}$$

de donde deducimos finalmente que

$$\widetilde{\delta f} = \delta f - f'\,\xi^0 \tag{4.113}$$

ya que $f(x^\mu) = f_0(x_\mu) = f_0(x^0)$ a primer orden.

Procedamos de la forma anterior para las perturbaciones escalares de la métrica. Las transformaciones generales de coordenadas son aquellas que bajo la transformación $x^\mu \to \widetilde{x^\mu} = x^\mu + \delta x^\mu$, dejan el elemento de línea $ds^2 = \widetilde{ds^2}$ invariante. Esto implica que la componente cero $a^2(\widetilde{x^0})\left(1+\widetilde{A}\right)\left(\widetilde{dx^0}\right)^2 = a^2(x^0)\,(1+A)\,(dx^0)^2$. Puesto que $a^2(\widetilde{x^0}) \simeq a^2(x^0){+}2a\,a'\,\xi^0$ y $\widetilde{dx^0} = (1+\xi^{0\prime})\,dx^0 + \frac{\partial x^0}{\partial x^i}\,dx^i$, tenemos $1+2A = 1+2\widetilde{A}+2\frac{a'}{a}\xi^0+2\xi^{0\prime}$. Un procedimiento similar nos lleva a las siguientes leyes de transformación

$$\boxed{\begin{aligned} \widetilde{A} &= A - \xi^{0\prime} - \frac{a'}{a}\xi^0\,; \\ \widetilde{B} &= B \,+\, \xi^0 \,+\, \beta' \\ \widetilde{\psi} &= \psi - \frac{1}{3}\,\nabla^2\beta \,+\, \frac{a'}{a}\xi^0\,; \\ \widetilde{E} &= E \,+\, 2\,\beta\,. \end{aligned}}$$

Como sabemos, Relatividad General se basa en un principio simple: no existe sistema de referencia privilegiado. Ninguna elección de gauge es más correcta que otra. Esto dará problemas en los siguientes cálculos. Un cambio del sistema de coordenadas implica la variación de la perturbación de una cantidad dada que puede por tanto tomar diferentes valores en gauges diferentes. Para eliminar esta ambiguidad podemos definir cantidades invariantes y usarlas después en nuestros cálculos, o podemos elegir un gauge particular y fijarlo. Cada una de las opciones tiene ventajas e inconvenientes. Elegir un gauge puede simplificar los cálculos significativamente comparado con el otro método, pero con el peligro, sin embargo, de incluir *artefactos* gauge, como grados de libertad que no son físicos.

Antes de discutir las elecciones más usuales de gauge, indicaremos algunas cantidades invariantes gauge que son muy usadas en la literatura. Son los llamadas potenciales de Bardeem

$$\Phi \,=\, -\,A \,+\, \frac{1}{a}\left[\left(-\,B \,+\, \frac{E'}{2}\right)a\right]' \,, \tag{4.114}$$

$$\Psi \,=\, -\,\psi \,-\, \frac{1}{6}\,\nabla^2 E \,+\, \frac{a'}{a}\left(B \,-\, \frac{E'}{2}\right) . \tag{4.115}$$

De forma analoga podemos definir una cantidad invariante para las perturbaciones del inflatón . Por tratarse de un campo escalar $\widetilde{\delta\phi} = (\delta\phi - \phi'\,\xi^0)$ y por tanto

$$\delta\phi^{(\mathrm{GI})} \,=\, -\delta\phi \,+\, \phi'\left(\frac{E'}{2} \,-\, B\right) \tag{4.116}$$

es un invariante gauge, y lo mismo para la perturbación en la densidad de energía

$$\delta\rho^{(\mathrm{GI})} \,=\, -\delta\rho \,+\, \rho'\left(\frac{E'}{2} \,-\, B\right) \tag{4.117}$$

Son muchas las posibilidades de elección de gauge posibles, pero en mi opinión realizar aquí un listado de ellas llevaría una gran cantidad de tiempo y espacio y no aportaría nada nuevo. Analizaré por tanto un único gauge que me permitirá conectar con los resultados de los capítulos anteriores: el gauge longitudinal.

4.10. La perturbación en curvatura comovil

La curvatura intrínseca espacial en hipersuperficies de tiempo constante η en un Universo plano viene dada por

$$^{(3)}R = \frac{4}{a^2}\nabla^2\,\psi. \tag{4.118}$$

La cantidad ψ se denomina usualmente perturbación en curvatura. Vimos que el potencial gravitacional ψ no es invariante gauge. Bajo una transformación $t \rightarrow t + \delta\eta$ (cambiamos de *rebanada*) tenemos

$$\psi \rightarrow \psi + \mathcal{H}\delta\eta. \tag{4.119}$$

donde hemos definido $\mathcal{H} = \frac{a'}{a}$. Consideremos ahora una *rebanada* comóvil definida por ser ortogonal a las líneas de Universo de los observadores comóviles. Estos últimos se encuentran en caída libre y la expansión definida por los mismos es isotrópica. En la práctica, lo que esto significa es que no existe flujo de energía medido por estos observadores, es decir $T^i_0 + \delta T^i_0 = 0$. Durante inflación, no existe perturbación en el inflatón, $\delta\phi_{\rm com} = 0$ puesto que $T_{0i} = \partial_i \delta\phi(\mathbf{x}, \eta)\phi'(\eta)$. Puesto que, para una transformación en hipersuperficies de tiempo constante, $\delta\phi \rightarrow \delta\phi - \phi'\delta\eta$, tenemos

$$\delta\phi \rightarrow \delta\phi_{\rm com} = \delta\phi - \phi'\,\delta\eta = 0 \Longrightarrow \delta\eta = \frac{\delta\phi}{\phi'}, \tag{4.120}$$

es decir, que $\delta\eta$ es el desplazamiento temporal para ir de una *rebanada genérica* a aquella donde $\delta\phi_{\rm com} = 0$. Al mismo tiempo la perturbación en curvatura se transforma como

$$\psi \rightarrow \mathcal{R} = \psi + \mathcal{H}\frac{\delta\phi}{\phi'} = \psi + \mathcal{H}\frac{\delta\phi}{\phi} \tag{4.121}$$

La cantidad $\mathcal{R}$ es la perturbación en curvatura comóvil y es invariante por construcción y está relacionada con la perturbación en curvatura dependiente del gauge ψ en una *rebanada* genérica y con la perturbación $\delta\phi$ es ese gauge. Vemos que en las superficies comoviles, $\mathcal{R}$ no es más que el potencial gravitacional

$$\mathcal{R} = \left.\psi\right|_{\delta\phi=\prime}. \tag{4.122}$$

4.11. Cálculo de la perturbación en curvatura en el gauge longitudinal

El gauge longitudinal, también llamado newtoniano o conforme es un gauge conveniente para calcular las perturbaciones cosmológicas. Se define realizando una transformación de coordenadas tal que $B = E = 0$. Esto nos deja con dos grados de libertad, los campos A y ψ que dan cuenta de las perturbaciones escalares de la métrica. Tomemos en primer lugar la parte no diagonal ($i \neq j$) of Eq. (4.90). Puesto que el tensor energía momento no tiene componentes no diagonales tenemos

$$\partial_i\partial_j\left(\psi - A\right) = 0 \Longrightarrow \psi = A, \tag{4.123}$$

de forma que podemos trabajar solamente con la variable ψ!. Además en este gauge los potenciales de Bardeem son ambos iguales a ψ. La ecuación (4.89) (en tiempo cósmico) nos da

$$\dot{\psi} + H\,\psi = 4\pi G\dot{\phi}\,\delta\phi = \epsilon\,H^2\frac{\delta\phi}{\dot{\phi}}, \tag{4.124}$$

donde la segunda igualdad viene de la condición de slow-roll. Mientras la ecuación (4.88) y la parte diagonal de (4.90) ($i = j$) dan respectivamente

$$\begin{aligned} -3H\left(\dot{\psi} + H\psi\right) + \frac{\nabla^2\psi}{a^2} &= 4\pi G\left(\dot{\phi}\delta\dot{\phi} - \dot{\phi}^2\psi + V'\delta\phi\right), &(4.125)\\ -\left(2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right)\psi - 3H\dot{\psi} - \ddot{\psi} &= -\left(\dot{\phi}\delta\dot{\phi} - \dot{\phi}^2\psi - V'\delta\phi\right), &(4.126)\end{aligned}$$

Sumando las dos últimas ecuaciones y usando la ecuación de Klein-Gordon para el campo de background

$$V' = -\ddot{\phi} - 3H\dot{\phi} \tag{4.127}$$

para eliminar V' tenemos la ecuación para el potencial gravitacional

$$\ddot{\psi}_{\mathbf{k}} + \left(H - 2\frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}}\right)\dot{\psi}_{\mathbf{k}} + 2\left(\dot{H} - H\frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}}\right)\psi_{\mathbf{k}} + \frac{k^2}{a^2}\psi_{\mathbf{k}} = 0, \tag{4.128}$$

que reescrita en tiempo conforme nos da

$$\psi''_{\mathbf{k}} + 2\left(\mathcal{H} - \frac{\phi''}{\phi'}\right)\psi'_{\mathbf{k}} + 2\left(\mathcal{H}' - \mathcal{H}\frac{\phi''}{\phi'}\right)\psi_{\mathbf{k}} + k^2\,\psi_{\mathbf{k}} = 0 \tag{4.129}$$

y en términos de los parámetro de slow-roll en tiempo conforme

$$\epsilon = 1 - \frac{\mathcal{H}'}{\mathcal{H}^2} \quad \delta = 1 - \frac{\phi''}{\mathcal{H}\phi'} \tag{4.130}$$

$$\psi''_{\mathbf{k}} + 2\mathcal{H}\,(\eta - \epsilon)\,\psi'_{\mathbf{k}} + 2\mathcal{H}^2\,(\eta - 2\epsilon)\,\psi_{\mathbf{k}} + k^2\,\psi_{\mathbf{k}} = 0. \tag{4.131}$$

Usando la misma lógica que nos llevo a (4.50) con la ecuación (5.10) podemos inferir que a escalas superhorizonte el potencial gravitacional ψ es aproximadamente constante (salvo una ligera dependencia proporcional a los parámetro de slow-roll), es decir $\dot{\psi}_{\mathbf{k}} \sim$ (parámetros slow-roll) $\times\,\psi_{\mathbf{k}}$, lo cual no debería ser una sorpresa, pues los modos escalares están congelados a esas escalas. Usando la ecuación (4.124), podemos relacionar las fluctuaciones del potencial gravitacional ψ con las fluctuaciones del inflatón $\delta\phi$ a escalas superhorizonte.

$$\psi_{\mathbf{k}} \simeq \epsilon\, H \frac{\delta\phi_{\mathbf{k}}}{\dot{\phi}} \quad (\text{ ESCALAS SUPERHORIZONTE}), \tag{4.132}$$

lo que nos permite también calcular la perturbación en curvatura comovil $\mathcal{R}_{\mathbf{k}}$

$$\mathcal{R}_{\mathbf{k}} = \psi_{\mathbf{k}} + H\,\frac{\delta\phi_{\mathbf{k}}}{\dot{\phi}} = (1+\epsilon)\,\frac{\delta\phi_{\mathbf{k}}}{\dot{\phi}} \simeq \frac{\delta\phi_{\mathbf{k}}}{\dot{\phi}}. \tag{4.133}$$

El espectro de potencias se escribe entonces de la perturbación $\mathcal{R}_{\mathbf{k}}$ a escalas superhorizonte se escribe como

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}} = \frac{k^3}{2\pi^2}\frac{H^2}{\dot{\phi}^2}\,|\delta\phi_{\mathbf{k}}|^2 = \frac{k^3}{4M_Pl^2\epsilon\,\pi^2}\,|\delta\phi_{\mathbf{k}}|^2\,.$$

Resta evaluar la evolución de $\delta\phi_{\mathbf{k}}$. Para hacer esto consideremos la ecuación de Klein-Gordon perturbada (4.105) en el gauge longitudinal que en tiempo cósmico se escribe

$$\delta\ddot{\phi}_{\mathbf{k}} + 3H\delta\dot{\phi}_{\mathbf{k}} + \frac{k^2}{a^2}\delta\phi_{\mathbf{k}} + V''\delta\phi_{\mathbf{k}} = -2\psi_{\mathbf{k}}V' + 4\dot{\psi}_{\mathbf{k}}\dot{\phi}.$$

Usando la ecuación (4.132) y la discusión de la ecuación (4.131), vemos que $\dot{\xi}_k \sim \mathcal{O}(\epsilon^2,\eta^2,\ldots)$ tal que a escalas superhorizonte $\left|4\dot{\psi}_{\mathbf{k}}\dot{\phi}\right| \ll |\psi_{\mathbf{k}}V'|$. Usando este hecho y la relación de slow-roll $V' \simeq -3H\dot{\phi}$, podemos reescribir la ecuación de Klein-Gordon perturbada como

$$\delta\ddot{\phi}_{\mathbf{k}} + 3H\delta\dot{\phi}_{\mathbf{k}} + \Big(V'' + 6\epsilon H^2\Big)\,\delta\phi_{\mathbf{k}} = 0.$$

Siguiendo el procedimiento estandar que ya conocemos introducimos el campo $\delta\chi_{\mathbf{k}} = \delta\phi_{\mathbf{k}}/a$ y pasamos a tiempo conforme η. Tenemos

$$\delta\chi_k'' + \left(k^2 - \frac{a''}{a} + a^2V'' - 6\epsilon a^2H^2\right)\delta\chi_k \tag{4.134}$$

En una inflación de tipo slow-roll

$$a = -\frac{1}{H\eta(1-\epsilon)} \Longrightarrow \frac{a''}{a} \simeq \frac{1}{\eta^2}(2+3\epsilon). \tag{4.135}$$

con lo que, finalmente

$$\begin{aligned} \delta\chi_{\mathbf{k}}'' \quad &+\Big[k^2 - \quad \frac{1}{\eta^2}\left(\nu^2 - \frac{1}{4}\right)\Big]\delta\chi_{\mathbf{k}} = 0, \\ \nu^2 \quad &= \quad \frac{9}{4} + 9\epsilon - 3\eta(\phi). \end{aligned} \tag{4.136}$$

Usando los resultados anteriores concluimos que, a escalas superhorizonte,

$$|\delta\phi_{\mathbf{k}}| \simeq \frac{H}{\sqrt{2k^3}}\left(\frac{k}{aH}\right)^{\frac{3}{2}-\nu} \quad \text{(ON ESCALAS SUPERHORIZONTE)},$$

lo que confirma de nuevo que tanto el potencial gravitacional como las perturbaciones del inflatón son aproximadamente constantes a escalas superhorizonte. Podemos ahora calcular explicitamente el espectro de potencias de la perturbación en curvatura comóvil a escalas superhorizonte

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \frac{1}{2M_{Pl}^2\epsilon}\left(\frac{H}{2\pi}\right)^2\left(\frac{k}{aH}\right)^{n_{\mathcal{R}}-1} \equiv A_{\mathcal{R}}^2\left(\frac{k}{aH}\right)^{n_{\mathcal{R}}-1}$$

donde hemos definido el índice espectral de la perturbación en curvatura comóvil $n_{\mathcal{R}}$ como

$$n_{\mathcal{R}} - 1 = \frac{d\ln \mathcal{P}_{\mathcal{R}}}{d\ln k} = 3 - 2\nu = 2\eta(\phi) - 6\epsilon.$$

Resumiendo, vemos que el inflatón es responsable de la generación de perturbaciones adiabáticas/curvatura con un espectro practicamente independiente de la escala. Esto está en estricta concordancia con los resultados obtenidos usando la teoría cuántica de campos, lo cual revela de nuevo la conexión profunda entre dos ramas ireconciliables de la física: la teoría cuántica y la gravitación!

A partir de la perturbación en curvatura podemos deducir el comportamiento a través de la ecuación (4.124)

$$\psi_{\mathbf{k}} = \frac{A(k)}{a} + \frac{4\pi G}{a}\int^t dt'\, a(t')\,\dot{\phi}(t')\,\delta\phi_{\mathbf{k}}(t') \simeq \frac{A(k)}{a} + \epsilon\,\mathcal{R}_{\mathbf{k}}.$$

donde hemos hecho uso del hecho de que, durante inflación de tipo slow-roll, $\dot{\phi}^2 \simeq (\epsilon H^2)/(4\pi G)$ y $\mathcal{R}_k \sim$ *constante.*

Vemos que durante inflación, y a escalas superhorizonte, el potencial gravitacional es la suma de una función decreciente más una cantidad aproximadamente constante en el tiempo veces la perturbación en curvatura. Nótese que en una evolución de tipo de Sitter, $\epsilon = 0$, el potencial gravitacional no contiene fuentes, y cualquier condición inicial en el potencial gravitacional se atenua como a^{-1} durante el proceso inflacionario.

Hemos realizado una gran cantidad de cálculos, pero cual es la física que se esconde detrás de estas ecuaciones? En resumen, hemos visto que durante la época inflacionaria, las fluctuaciones cuánticas que tienen lugar en el campo escalar se *graban* en el propio espacio tiempo, a través de pequeñas perturbaciones en la métrica. Cuando estas salen del horizonte se *congelan* y son iguales a la perturbación de curvatura del espacio. $\mathcal{R}$ lleva la curvatura desde la salida del horizonte hasta la entrada en el horizonte, en otras palabras, preserva la evolución a gran escala. El espectro $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$ se conoce como espectro primordial de perturbaciones. La pregunta ahora es: Qué ocurre después? El próximo paso será trasladar la perturbación en curvatura a un potencial gravitacional cuando la perturbación vuelve a entrar en el horizonte. El potencial a escalas subhorizonte puede entenderse como una perturbación de la densidad de materia. Esto causará fluctuaciones en la temperatura del gas de fotones que, en este instante cósmico, está a punto de desacoplarse siempre y cuando la temperatura sea suficientemente pequeña. Para hacerse una idea *completa* es importante destacar que la matería y la radiación que nos rodea en el resultado del decaimiento de inflatón, pero para llegar a eso todavía falta un rato. Trataremos antes la producción de modos tensoriales u ondas gravitacionales durante inflación.

Capítulo 5

Ondas gravitacionales

An ocean traveler has even more vividly the impression that the ocean is made of waves than that it is made of water.

Arthur S. Eddington (1882-1944) en: The Nature of the Physical World, Cambridge (1929).

5.1. Introducción

La existencia de ondas gravitacionales primordiales es una consecuencia de asunciones bastante generales. Como vimos, las perturbaciones de caracter tensorial surgen de manera natural en una perturbación general de la métrica. Por otro lado, desde un punto de vista *mecanocuántico*, el fuerte campo gravitacional del Universo temprano amplifica las inevitables oscilaciones cuánticas del punto cero de las ondas gravitacionales y produce un fondo estocástico *medible* de ondas gravitacionales. Las ondas gravitacionales presentan un gran interes, puesto que están practicamente desacopladas de la materia y proporcionan información de la evolución del Universo hasta escalas Planckianas [1].

En este capítulo abordaremos este interesante tema. Realizar una introducción completa a las ondas gravitacionales desde el punto de vista clásico y analizarlas en un espacio plano me llevaría una gran cantidad de tiempo y desviaría la atención de los puntos que más me interesa tratar. Por este motivo expondré la mayor parte de estos resultados, cuando sea necesario, **sin** demostración. El lector interesado podrá encontrar un tratamiento excepcional de este tema en las referencias [28] y [29].

[1] Desafortunadamente existe otros muchos procesos que dan lugar a un fondo estocástico de ondas gravitacionales y que deberían tratarse como ruido no deseado.

5.2. Radiación gravitacional en un background en expansión

Uno de los primeros en investigar ondas gravitacionales en el contexto de inflación fue Starobinsky, que encontró que las ondas gravitacionales contribuyen a la anisotropía en el momento del desacoplo, y consecuentemente, al espectro de potencias en ese tiempo.En esta sección analizaremos la acción y las ecuaciones de campo para el campo gravitacional $h_{\mu\nu}$ en un espacio tiempo plano expandiendose uniformemente, es decir, con una métrica FRW de signatura $k = 0$, que viene descrita por el siguiente elemento de línea:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)dx, \tag{5.1}$$

donde $a(t)$ es el factor de escala. En tiempo conforme una perturbación sencilla en la métrica de Minkowski $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ se transforma como

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = a^2(\eta)g_{\mu\nu}. \tag{5.2}$$

El tensor de Ricci bajo transformaciones conformes se transforma según

$$\tilde{R} = a^{-2}R - 6a^{-3}a_{;\mu\nu}g^{\mu\nu} = a^{-2}R - 6a^{-3}a^{\mu}_{;\mu}, \tag{5.3}$$

debido a las condiciones gauge que se imponen sobre $h_{\mu\nu}$. La última parte de esta expresión es un término divergente que nada tiene que ver con la dinámica del campo gravitacional y es meramente un término constante que reescala la energía. Despreciando el término a segundo orden en R, tenemos la acción

$$S_g = \frac{M_{Pl}^2}{2}\int d^4x \frac{1}{2}a^2\Big[(\partial_\mu h_+)^2 + (\partial_\mu h_\times)^2\Big]. \tag{5.4}$$

que es la acción para dos campos escalares libres sin masa

$$\phi(x^\mu, \lambda) = \frac{M_{Pl}}{\sqrt{2}}h(x^\mu, \lambda) \tag{5.5}$$

donde λ denota la polarización. Trataremos solamente con uno de estos campos, recordando multiplicar por 2 siempre y cuando tomemos en cuenta la contribución de ambas polarizaciones. La ecuación de campo para un campo de este tipo es

$$\Box h = 0 \tag{5.6}$$

o de forma más explicita

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\frac{\partial h}{\partial x^\mu}\right) = 0. \tag{5.7}$$

Introduciendo la métrica de FRW en esta ecuación obtenemos

$$h'' + 2\mathcal{H}h' + a^{-2}\nabla h = 0, \tag{5.8}$$

donde las primas denotan derivación con respecto al tiempo conforme. Un procedimiento estandar para resolver estas ecuaciones es encontrar los modos Fourier del campo ϕ

$$h(\mathbf{x}, \eta) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2} h_k(\eta)} e^{i\mathbf{kx}}. \tag{5.9}$$

Cambiando de variable a $\mu_k = a(\eta)h_k(\eta)$, tenemos la siguiente ecuación

$$\mu_k'' + \left(k^2 - \frac{a''}{a}\right)\mu_k = 0. \tag{5.10}$$

Usaremos esta ecuación en los calculos subsiguientes y nos referiremos a ella como la *ecuación maestra*.

5.3. Soluciones de onda plana

Una solución importante de la ecuación (5.6) es

$$h_{\mu\nu} = Re\Big[(A_+ e^+_{\mu\nu} + A_\times e^\times_{\mu\nu})e^{-i\omega(t-z)}\Big], \tag{5.11}$$

que describe una onda con polarizaciones $+$ y $\times$ viajando en dirección z, donde ω es la frecuencia física de la onda. Es fácil ver, que el tensor energía momento para esta solución es

$$T^{(GW)}_{tt} = T^{(GW)}_{zz} = -T^{(GW)}_{tz} = \frac{1}{32\pi G}\omega^2(|A_+^2| + |A_\times^2|), \tag{5.12}$$

lo que nos muestra que la densidad de energía de una onda gravitacional va como ω^2, resultado que será importante en los siguientes cálculos.

5.4. El espectro de potencias de las ondas gravitacionales.

A partir de los conocimientos del capítulo anterior, podemos analizar ahora facilmente la *ecuación maestra*, que no es más que la ecuación de movimiento de un campo escalar sin masa en una epoca casi de Sitter. Podemos reescribir la ecuación como

$$\mu_k'' + \left(k^2 - \frac{1}{\eta^2}(\nu_T^2 - 1/4)\right)\mu_k 00 \tag{5.13}$$

con

$$\nu_T = \sqrt{\frac{9}{4} + 3\epsilon} \approx \frac{3}{2}\left(1 + \frac{2}{3}\epsilon\right) = \frac{3}{2} + \epsilon. \tag{5.14}$$

A escalas superhorizonte, los modos tensor son

$$|\mu_k| = \frac{aH}{\sqrt{2k^3}}\left(\frac{k}{aH}\right)^{3/2-\nu_T}, \tag{5.15}$$

y el espectro de potencias es por tanto

$$\mathcal{P}_T(k) = \frac{k^3}{2\pi^2}\sum_\lambda |h(\mathbf{k},\lambda)|^2 = 4 \times \frac{2}{a^2 M_{Pl}^2}\frac{k^3}{2\pi^2}|\mu_\mathbf{k}|^2 = \frac{8}{M_{Pl}^2}\left(\frac{H}{2\pi}\right)^2\left(\frac{k}{aH}\right)^{n_T}, \tag{5.16}$$

donde

$$n_T = \frac{d\ln\mathcal{P}_T}{d\ln k} = 3 - 2\nu_T = -2\epsilon. \tag{5.17}$$

Las perturbaciones tensor son practicamente invariantes de escala, dependiendo unicamente del valor del parámetro de Hubble durante inflación, lo cual está relacionado a su vez con el potencial de inflatón. La detección de ondas gravitacionales nos daría un visión valiosa de los conceptos de inflación.

5.5. La relación de consistencia

Los resultados obtenidos hasta ahora predicen una relación de consistencia entre las perturbaciones escalares y tensoriales. Definimos la amplitud tensor a escalar como

$$r = \frac{\frac{1}{100}A_T^2}{\frac{4}{25}A_R^2} = \epsilon, \tag{5.18}$$

lo que significa que

$$r = -\frac{-n_T}{2}. \tag{5.19}$$

Esta es una predicción directa de inflación y puede contrastarse con las observaciones.

5.6. Amplificación paramétrica de las ondas gravitacionales

La invarianza conforme de las ecuaciones que gobiernan un campo libre se incluye de forma física en la imposibilidad de una amplificación paramétrica de las ondas y de la creación de las correspondientes partículas. Nótese que la acción (5.4) no es invariante conforme a la de un espacio tiempo plano. Como resultado de esto, existe la posibilidad de una amplificación de las ondas gravitacionales y la producción de gravitones. Antes de pasar a resolver la ecuación (5.10) hechemos un aspecto cuantitativo a este aspecto. Definimos el potencial $U(\eta) = \frac{a''}{a}$.

En los intervalos en los que $k^2 \gg |a''/a|$ las soluciones de la ecuación maestra tienen la forma $\mu_k = e^{\pm ik\eta}$, de forma que el campo físico tiene una solución oscilante

$$h_k = \frac{1}{a}\sin(k\eta + \theta), \tag{5.20}$$

donde θ es una fase inicial arbitraria. En un espacio tiempo en expansión la amplitud decrece como $1/a$. Una interpretación física de este hecho en que en un Universo en expansión las ondas gravitacionales de alta frecuencia se ven amortiguadas, adiabaticamente.

Por otro lado, si para un k dado, existe un intervalo de tiempo donde $k^2 \ll |a''/a|$, las soluciones de la ecuación maestra dejan de ser oscilatorias. En esta situación tenemos dos posibles soluciones: $\mu_k^1 = a$ y $\mu_k^2 = a \int a^{-2} d\eta$. Las ondas se encuentran con la barrera de potencial en algún tiempo η y vienen gobernadas por estas soluciones en la región bajo la barrera. Vemos que para cualquier solución de μ_k^2, al menos μ_k^1 da una solución

$$h_k = constante. \tag{5.21}$$

Por tanto, la amplitud saliente es igual a la amplitud entrante en la barrera, y por tanto mayor que si se hubiera comportado adiabáticamente. Parece claro que ondas con distinto k permanecerán bajo la barrera distintos intervalos de tiempo. Si definimos un coeficiente de amplificación como el cociente entre el factor de escala a la salida $a(\eta_f)$ y a la entrada $a(\eta_i)$, $R = a(\eta)/a(\eta_i)$, vemos que en general dependerá de k.

Las amplitudes iniciales de las ondas clásicas pueden ser arbitrarias, pero no cero. Como vimos en la sección 5.3, la densidad de energía de una onda con amplitud h es

$$\rho_{gw} = \frac{\pi}{4G}\nu^2 \langle h^2 \rangle \tag{5.22}$$

donde ν,$2\pi\nu = \omega$, es la frecuencia de la onda. Para una longitud de onda dada queremos tener una energía $\frac{1}{2}\hbar\omega$ en un volumen λ^3, puesto que esa es la energía asociada con el punto cero del campo cuántico.

$$\frac{1}{2}\hbar\omega = \frac{\pi}{4G}\nu^2 \langle h^2 \rangle \cdot \lambda^3 \Rightarrow h = \frac{l_{Pl}}{\lambda} \tag{5.23}$$

en algún punto inicial η_i; $h = (kl_{Pl})/a_i$, donde $a_i = a_i(\eta)$. Esta es la normalización mecanocuántica de las ondas gravitacionales.

5.7. Cuantización de las ondas gravitacionales

Trataremos ahora de cuantizar las perturbaciones de un especio tiempo en expansión, ocupándonos de algunos de los problemas usuales que nos encontramos cuando realizamos la cuantización en un espacio tiempo curvo, como por ejemplo, que no existe un único estado de vacío. Volveremos por tanto a analizar el concepto de partícula. Las perturbaciones cuantizadas h_{ij} son llamadas gravitones. Empezamos con la ecuación maestra

$$\mu_k'' + \left(k^2 - \frac{a''}{a}\right)\mu_k = 0. \tag{5.24}$$

que se puede obtener a partir del Lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\Big[\mu_k'^2 - k^2\mu_k^2 - 2\frac{a'}{a}\mu_k'\mu_k + \left(\frac{a'}{a}\right)^2\mu_k^2\Big], \tag{5.25}$$

lo que nos lleva a la función Hamiltoniana

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\Big[\pi_k^2 + k^2\mu_k^2 + 2\frac{a'}{a}\mu_k\pi_k\Big] \tag{5.26}$$

donde $\pi_k = \mu_k' - \frac{a'}{a}\mu_k$ es el momento canónico conjugado. Esta función, que podemos encontrar para cada modo, se convertirá en el operador hamiltoniano siempre y cuando los operadores μ_k y π_k sean también operadores que satisfagan la relación de conmutación $\left[\mu_k, \pi_{k'}\right] = i\delta_{k,k'}$. Los operadores creación y aniquilición asociados son

$$b_k = \sqrt{\frac{k}{2}}\left(\mu_k + i\frac{\pi_k}{k}\right) \qquad b_k^+ = \sqrt{k}2\left(\mu_k - i\frac{\pi_k}{k}\right), \tag{5.27}$$

tal que $[b_k, b_k^+] = \delta_{k.k'}$. En términos del Hamiltoniano:

$$\mathcal{H} = kb_k^+b_k + \sigma(\eta)b_k^{+2} + \sigma^*\eta b_k^2, \tag{5.28}$$

donde la función de acoplo es $\sigma(\eta) = i\frac{a'}{2a}$. Usaremos ahora la imagen de Heisenberg, en la cual los operadores cambian con el tiempo, pero el estado cuántico del sistema permanece fijo. Escribiremos también el hamiltoniano de forma más explícita para ver los mecanismos físicos escondidos en él. Consideremos el hamiltoniano anterior para el mismo modo k, y definamos

$$a_k = \sqrt{b_{1k} - ib_{2k}}\sqrt{2} \qquad a_{-k} = \frac{b_{1k} + ib_{2k}}{\sqrt{2}}, \tag{5.29}$$

obteniendo el siguiente resultado

$$\mathcal{H} = ka_k^+ a_k + ka_{-k}^+ a_{-k} + 2\sigma(\eta) a_k^+ a_{-k}^+ + 2\sigma^*(\eta) a_k a_{-k}. \tag{5.30}$$

El operador aniquilación a_k aniquila una partícula que va hacia adelante en el tiempo con momento k, mientras que el operador de creación a_{-k}^+ crea una antipartícula que va hacia atras en el tiempo con momento $-k$. La evolución temporal de estos operadores está gobernada por el Hamiltoniano a través de las relaciones mecanocuánticas

$$\frac{da_k}{d\eta} = -i[a_k, \mathcal{H}] \qquad \frac{da_k^+}{d\eta} = -i[a_k^+, \mathcal{H}], \tag{5.31}$$

o usando el hamiltoniano (5.30)

$$i\frac{da_k}{d\eta} = ka_k^+ + i\frac{a'}{a}a_{-k}^+ \qquad i\frac{da_k^+}{d\eta} = ka_k^+ - i\frac{a'}{a}a_{-k}. \tag{5.32}$$

La solución de estas ecuaciones se escribe

$$a_k(\eta) = u_k(\eta) a_k(\eta_0) + v_k(\eta) a_{-k}^+(\eta_0) \tag{5.33}$$

$$a_k^+(\eta) = u_k^*(\eta) a_k^+(\eta_0) + v_k^*(\eta) a_{-k}(\eta_0), \tag{5.34}$$

donde $a_k(\eta_0)$ y $a_k^+(\eta_0)$ son los valores iniciales para algún tiempo η_0. Las funciones complejas u_k y v_k satisfacen

$$i\frac{du_k}{d\eta} = ku_k^+ + i\frac{a'}{a}v_k^* \qquad i\frac{dv_k}{d\eta} = kv_k + i\frac{a'}{a}u_k^*. \tag{5.35}$$

Además, de las relaciones de conmutación sabemos que $|u_k|^2 - |v_k|^2 = 1$. Las condiciones inciales pueden ser por ejemplo $u_k(\eta_0) = 1$ y $b_k(\eta_0) = 0$, a $\eta_0 = 0$. Esta es la solución más sencilla, conocida como vacío de Sitter. Los operadores $a_k(\eta)$ y $a_k^+(\eta)$ satisfacen la relación de conmutación instantánea

$$[a_k(\eta), a_{k'}^+(\eta)] = \delta_{k',k} \tag{5.36}$$

Podemos por tanto escribir ahora las expresiones para el campo cuántico y su conjugado

$$\mu_k(\eta) = f_k(\eta) a_k(\eta_0) + f_k^*(\eta) a_{-k}^+(\eta_0) \tag{5.37}$$

$$\pi_k = -i\left(g_k(\eta) a_k(\eta_0) - g_k^*(\eta) a_{-k}^+(\eta_0)\right), \tag{5.38}$$

donde

$$f_k(\eta) = (2k)^{-1/2}[u_k(\eta) + v_k^*(\eta)] \tag{5.39}$$

$$g_k(\eta) = \sqrt{\frac{k}{2}}[u_k(\eta) - v_k^*(\eta)], \tag{5.40}$$

donde $f_k(\eta_0) = \frac{1}{\sqrt{2k}}$ y $g_k(\eta_0) = \frac{k}{2}$. Se tiene además la condición Wronskiana

$$i(f_k' f_k^* - f_k'^* f_k) = g_k f_k^* + g_k^* f_k = 1. \tag{5.41}$$

Los modos f_k satisfacen también la ecuación de movimiento

$$f_k'' + \left(k^2 - \frac{a''}{a}\right) f_k = 0 \tag{5.42}$$

La solución genérica de esta ecuación es, como ya sabemos, una combinación lineal de las funciones de Hankel de primer y segundo tipo

$$f_k = \sqrt{-\eta}[c_1(k)H_\nu^{(1)}(-k\eta) + c_2(k)H_\nu^{(2)}(-k\eta)]. \tag{5.43}$$

El parámetro ν se determina escribiendo la ecuación de movimiento en una forma con la que ya estamos familiarizados,

$$f_k'' + \left(k^2 - \frac{1}{\eta^2}(\nu^2 - 1/4)\right) f_k = 0. \tag{5.44}$$

Volvamos ahora a la perturbación en la métrica $h_{ij}(\eta, \mathbf{x})$. En lo que sigue realizaré un pequeño cambio en la notación de los modos. De ahora en adelante denotaremos $\sqrt{2k} f_k$ simplemente por f_k. Haciendo esto, solamente incluimos el factor $\sqrt{1/2k}$ en la normalización del campo. La perturbación será también un operador y puede escribirse

$$h_{ij}(\eta, \mathbf{x}) = \mathcal{C} \sum_{A=+,\times} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2k}} \frac{1}{a(\eta)} \Big[a_A(k) f_k(\eta) e^{i\mathbf{kx}} + h.c\Big] e_{ij}^A \tag{5.45}$$

donde $\mathcal{C}$ es un factor de normalización igual a $\mathcal{C} = \sqrt{8\pi G}$ y e_{ij}^A $(A = +, \times)$ son los dos tensores de polarización transversos y sin traza[2]. Por claridad, escribamos también la expresión cuantificada en términos de las variables originales $h_k(\eta)$

$$h_{ij}(\eta, \mathbf{x}) = \mathcal{C} \sum_{A=+,\times} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2k}} \Big[a_A(k) h_k(\eta) e^{i\mathbf{kx}} + h.c\Big] e_{ij}^A \tag{5.54}$$

[2]De hecho deberíamos escribir

$$h_{ij}(\eta, \mathbf{x}) = \mathcal{C} \sum_{A=1,2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2k}} \frac{1}{a(\eta)} \Big[a_A(k) f_k(\eta) e^{i\mathbf{kx}} + h.c\Big] e_{ij}^A \tag{5.46}$$

donde $h.c$ significa hermítico conjugado. Los dos tensores de polarización $e_{ij}^A(\mathbf{k})$ tienen diferentes formas dependiendo de si representan ondas gravitacionales, perturbaciones rotacionales o perturbaciones en densidad. Si elegimos $(\frac{\mathbf{k}}{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m})$ como los tres vectores espaciales ortonormales, tenemos

5.8. Producción de partículas: vuelta al principio

Consideremos ahora un espacio tiempo plano en el pasado y en el futuro, fases que llamaremos I y II respectivamente. Sea $f_k(\eta)$ las soluciones de las ecuación de movimiento en la fase I y $F_k(\eta)$ en la fase II. En la fase I tenemos

$$h^I_{ij}(\eta, \mathbf{x}) = \sqrt{8\pi G} \sum_{A=+,\times} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2k}} \frac{1}{a(\eta)} \Big[a_A(k) f_k(\eta) e^{i\mathbf{kx}} + a^+_A(k) f^*_k(\eta) e^{-i\mathbf{kx}}\Big] e^A_{ij} \tag{5.55}$$

- Ondas gravitacionales

$$e^1_{ij} = l_i l_j - m_j m_i, \quad e^2_{ij} = l_i m_j + l_j m_i, \tag{5.47}$$

junto con

$$e^A_{ij}\delta^{ij} = 0, \quad e^A_{ij}k^j = 0 \tag{5.48}$$

- Perturbaciones rotacionales

$$e^1_{ij} = \frac{1}{k}(l_i k_j + l_j k_i), \quad e^2_{ij} = \frac{1}{k}(m_i k_j + m_j k_i), \tag{5.49}$$

junto con

$$e^A_{ij}\delta^{ij} = 0, \quad e^A_{ij}k^i k^j = 0 \tag{5.50}$$

- Perturbaciones en densidad

$$e^1_{ij} = \sqrt{2}3\delta_{ij} \quad e^2_{ij} = -\sqrt{3}\frac{kik_j}{k^2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\delta_{ij}. \tag{5.51}$$

En los tres casos se tiene

$$e^{A'}_{ij}(\mathbf{k}) e^A_{ij}(\mathbf{k}) = 2\delta_{AA'} = 0, \quad e^A_{ij}(-\mathbf{k}) = e^A_{ij}(\mathbf{k}). \tag{5.52}$$

Pero en relatividad general, las perturbaciones rotacionales y en densidad sólo pueden existir si vienen soportadas por las correspondientes perturbaciones en materia. Además de las diversas formas de los tensores de polarización, la velocidad de propagación de las perturbaciones depende de las propiedades de la materia. Pero, si nos concentramos sólo en las perturbaciones métricas, podemos pensar en los tres tipos como ondas gravitacionales, incluso si algunos de ellos tienen estados de polarización y velocidades poco usuales. La ecuación maestra para el modo $f_k(\eta) = a(\eta)h_k(\eta)$ tiene la forma universal

$$f''_k + f_k\Big[k^2\frac{c_s^2}{c^2} - U(\eta)\Big] = 0, \tag{5.53}$$

donde c_s es una función de η, y se interpreta como la velocidad de propagación de la perturbación. $U(\eta)$ es una función de $a(\eta)$ y sus derivadas. En el caso de las ondas gravitacionales $c_s^2/c^2 = 1$ y $U(\eta) = \frac{a''}{a}$.

Usando estos operadores podemos construir un espacio de Fock en la fase I. De forma similar, para la fase II tenemos

$$h^I_{ij}(\eta,\mathbf{x}) = \sqrt{8\pi G}\sum_{A=+,\times}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{2k}}\frac{1}{a(\eta)}\left[A_A(k)F_k(\eta)e^{i\mathbf{kx}}+A^+_A(k)F^*_k(\eta)e^{-i\mathbf{kx}}\right]e^A_{ij} \tag{5.56}$$

donde los operadores de aniquilación definen un nuevo vacío

$$A_\times(k)|0\rangle_{II} = A_+(k)|0\rangle_{II} = 0. \tag{5.57}$$

Como ya sabemos ambas expansiones se encuentran relacionadas por una transformación de Bogolubov

$$a(k) = \sum_{k'}(\alpha_{kk'}A(k') - \beta^*_{k'k}A^+(k')) \tag{5.58}$$

$$A(k) = \sum_{k'}(\alpha_{k'k}a(k') + \beta^*_{k'k}a^+(k')) \tag{5.59}$$

que nos da la conexión formal entre ambos espacios Fock en las fases I y II. Usando las transformaciones de Bogolubov es fácil ver que el número de partículas en la fase II es

$$N_f = n_f + 2|\beta_f|^2(n_f + 1/2). \tag{5.60}$$

El número de partículas de la fase anterior se ha visto incrementado en un factor $1 + 2|\beta_{k'k}|^2$ y el vacío de energía (o la mitad de un cuanto de energía $1/2\hbar\omega$) es repentinamente distinto de 0. Es decir, incluso si no se habían creado partículas en la época anterior, o en otras palabras si el estado de vacío estaba *vacío*, aparecen partículas en un *background* en expansión, resultado que ya debería sernos familiar[3].

[3]Hemos asumido que los estados iniciales y finales *viven* en un espacio tiempo plano. Pero a menudo, este no es el caso en un marco cosmológico; tomemos por ejemplo la transición entre la epoca inflacionaria y la dominada por radiación. Las definiciones que hemos usado serán correctas, y especialmente la definición de vacío durante las diferentes fases, con sólo añadir la restricción de que las transiciones entre las distintas épocas ocurran rápidamente, es decir, de manera no adiabática. Denotemos por ΔT la escala temporal del cambio en el regimen cosmológico. Sea t^* el tiempo de transición entre los dos regímenes y consideremos un modo cuya frecuencia física a tiempo t^* sea ν^*. Para tales valores de ν^* tales que $2\pi\nu^*\Delta T \ll 1$ el cambio de regimen es rápido, mientras que si $2\pi\nu^*\Delta T \gg 1$ el cambio es adiabático. En este caso, el estado cuántico tiene tiempo para seguir la evolución del factor de escala y no hay producción de partículas. Para cuestiones prácticas, existe un *cutoff* en el espectro por la amplificación de las fluctuaciones de vacío a una frecuencia

$$\nu^* \sim \frac{1}{2\pi\Delta T}. \tag{5.61}$$

5.9. Producción de partículas durante una expansión de tipo de Sitter

Asumamos un periodo de crecimiento exponencial del factor de escala, seguido de uno dominado por radiación. Podemos encontrar facilmente los coeficientes de Bogolubov. La transición entre las épocas debe ser rápida, como ya mencionamos. En términos de los campos escalares f_k podemos escribir la solución

$$f_k = \frac{\sqrt{\pi|\eta|}}{2}\Big[\alpha_1 H^{(1)}_{3/2} + \alpha_2 H^{(2)}_{3/2}(k\eta)\Big], \tag{5.62}$$

donde

$$H^{(1)}_{3/2}(k\eta) = -\sqrt{\frac{2}{\pi k\eta}}\left(1+\frac{i}{k\eta}\right)e^{ik\eta} \tag{5.63}$$

$$H^{(1)}_{3/2}(k\eta) = -\sqrt{\frac{2}{\pi k\eta}}\left(1-\frac{i}{k\eta}\right)e^{-ik\eta}, \tag{5.64}$$

para $-\infty < \eta < \eta_2$, donde η_2 es el tiempo de la transición. Elijamos un vacío de Sitter y/o soluciones de energía positiva en el estado inicial $\alpha_1 = 0$ y $\alpha_2 = 1$. Nótese que esto no es una asunción en el estado del sistema en $\eta < \eta_2$, sino sólo un truco para calcular facilmente los coeficientes de Bogolubov!. La solución completa en esta época es por tanto

$$f_k = -\frac{1}{2k}\left(1-\frac{i}{k\eta}\right)e^{-ik\eta}. \tag{5.65}$$

Después de la transición tenemos

$$f_k = \frac{\sqrt{\pi|\eta-2\eta_2|}}{2}\Big[\beta_1 H^{(1)}_{1/2}(k|\eta-2\eta_2|) + \beta_2 H^{(2)}_{1/2}(k|\eta-2\eta_2|)\Big], \tag{5.66}$$

donde

$$H^{(1)}_{1/2} = -i\sqrt{\frac{2}{\pi k|\eta-2\eta_2|}}e^{ik|\eta-2\eta_2|} \tag{5.67}$$

$$H^{(1)}_{1/2} = i\sqrt{\frac{2}{\pi k|\eta-2\eta_2|}}e^{-ik|\eta-2\eta_2|}, \tag{5.68}$$

En el marco cosmológico, la escala temporal viene dada por el radio de Hubble $\Delta H \sim H^{-1}$, de forma que la condición $2\pi\nu^*\Delta T \gg 1$ se tiene cuando $\lambda/(2\pi)$ es menos que el horizonte. Los modos que en ese momento se encuentran fuera del horizonte se ven amplificados, mientras que los de dentro no!.

para $\eta_2 < \eta < \eta_1$, donde η_1 es el tiempo de la igualdad radiación materia. Tenemos

$$f_k = \frac{-i}{\sqrt{2k}}\left[\beta_1 e^{ik|\eta-2\eta_2|} - \beta_2 e^{-ik|\eta-2\eta_2|}\right]. \tag{5.69}$$

Imponiendo que las funciones en ambas épocas, y sus derivadas con respecto al tiempo conforme sean contínuas en la transición, obtenemos los coeficientes de Bogolubov (puesto que los modos deben ser reales multiplicamos, por simplicidad, los coeficientes por el factor $-i$)

$$\beta_1 = -\frac{1}{2k^2\eta_2^2} \tag{5.70}$$

$$\beta_2 = \left(1 - \frac{i}{k\eta_2} - \frac{1}{2k^2\eta_2^2}\right) e^{-2ik\eta_2}. \tag{5.71}$$

Nótese que tenemos $|\beta_2|^2 - |\beta_1|^2 = 1$. El número de partículas producido en la transición (asumiendo que el número de partículas en la epoca de Sitter era cero, $n_f = 0$)

$$N_k = |\beta_k|^2 = \frac{1}{4k^4\eta_2^4}. \tag{5.72}$$

Expresemos N_k en términos de cantidades físicas. Como mencionamos, k es la número de de onda comóvil, y viene expresado por

$$2\pi\nu = \frac{k}{a(t_0)} \tag{5.73}$$

donde t_0 es el valor actual del tiempo cósmico. Por tanto

$$k|\eta_2| = 2\pi\nu a(t_0)|\eta_2| = \frac{2\pi\nu}{H}\frac{a(t_0)}{a(t_2)} = \frac{2\pi\nu}{H}\left(\frac{t_0}{t_1}\right)^{2/3}\sqrt{\frac{t_1}{t_2}}. \tag{5.74}$$

También sabemos que $(t_0/t_1)^{2/3} = 1 + z_1 \approx z_1$. Definimos una nueva cantidad

$$\nu_2 = \frac{H}{2\pi z_1}\sqrt{\frac{t_2}{t_1}}. \tag{5.75}$$

Nótese que t_2 viene dado por el parámetro de Hubble de la etapa de Sitter, puesto que durante la época dominada por radiación tenemos $H = 1/2t$. Puesto que el factor de escala es contínuo en la transición vemos que $t_2 = 1/2H$. Además, multiplicando y dividiendo por $\sqrt{T_{Pl}}$

$$\nu_2 = \frac{\sqrt{\hbar/c^2}}{2\sqrt{2\pi}z_1\sqrt{t_1}\sqrt{T_Pl}}\sqrt{\frac{H}{M_{Pl}}}. \tag{5.76}$$

Introduciendo valores numéricos $t_1 = 10^4$ años $=3{,}15{\cdot}10^{11}$s; $z_1 = 24000\Omega_0 h^2 \simeq 3360$ (donde hemos usado $\Omega_0 = 0{,}27$ y $h = 0{,}72$) y $T_{Pl} = 2{,}7 \cdot 10^{-43}$s. En unidades naturales

$$\nu_2 \simeq 10^9 \sqrt{\frac{H}{10^{-4} M_{Pl}}}\ Hz, \tag{5.77}$$

y el número de partículas producidas es por tanto

$$N_f = \frac{1}{4}\left(\frac{\nu_2}{\nu}\right)^4. \tag{5.78}$$

Afortunadamente el número de gravitones por celda del espacio de fases sólo depende de la frecuencia de la onda, y no de las direcciones espaciales $\mathbf{x}$, y podemos encontrar la densidad de energía de la onda gravitacional

$$\rho_{gw} = 2\int \frac{d^3k}{2\pi a}\frac{1}{a} k N_k = 16\pi^2 \int_0^\infty d(\log\nu)\nu^4 N_f, \tag{5.79}$$

donde hemos normalizado con coespacio de fases en expansión, y el factor 2 viene del hecho de que las dos polarizaciones contribuyen de igual manera a la densidad de energía.

La densidad de energía de la onda gravitacional puede entenderse como un fondo estocástico de radiación. La intensidad de un fondo de *background* estocástico se puede caracterizar por la cantidad adimensional

$$\Omega_{gw}(\nu) = \frac{1}{\rho_c}\frac{d\rho_{gw}}{d\log\nu}, \tag{5.80}$$

donde ρ_c es el valor actual de la densidad de energía crítica para cerrar el Universo. Viene dada por

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G} = 3H_0^2 M_{Pl}^2. \tag{5.81}$$

No es conveniente normalizar la densidad de energía de las ondas gravitacionales a la cantidad ρ_c, que es incierta. La incertidumbre aparecería en todas las formulas subsiguientes, aunque no tendría nada que ver con las incertidumbres del *background* de ondas gravitacionales en si mismo. Por tanto, caracterizaremos el fondo estocástico con la cantidad $h_0^2\Omega_{gw}(\nu)$ que es independiente de h_0. Incluyendo de nuevo los factores $\hbar$ y c que omitimos en los cálculos de ν_2; la expresión para el parámetro de densidad es

$$\Omega_{gw} = \frac{\hbar^2}{c^4}\frac{(2\pi)^2\nu_2^4}{3H_0^2 M_{Pl}^2}. \tag{5.82}$$

Vemos que para las ondas gravitacionales en esta transición tenemos un espectro plano, e introduciendo valores

$$h_0^2\Omega_{gw}(\nu) \approx 10^{-13}\left(\frac{H}{10^{-4}} M_{Pl}\right)^4. \tag{5.83}$$

5.10. *Squeezing* de las ondas gravitacionales

Veámos otro aspecto interesante de la naturaleza mecanocuántica de las perturbaciones tensoriales: el squeezing de las ondas gravitacionales. En un estado *squeeze*, una parte del campo fluctua menos y otra parte fluctua más que en el estado de vacío. En general, un estado *squeezed* es aquel en el cual la distribución de variables canónicas sobre el espacio de fases se ha distorsionado o *squeezed* de tal forma que la dispersión de una variable se reduce a costa de un incremento en la dispersión de la otra variable. Podemos describir el estado de vacío como un círculo en el centro del espacio de fases. El valor medio de las variables canónicas es cero, pero sus varianzas o fluctuaciones del punto cero son distintas de cero e iguales. Bajo la acción de una *fuerza* externa, el estado de vacío evoluciona a un estado coherente. Los valores medios de las variables canónicas dejan de ser distintos de cero, pero sus variaciones son todavía las mismas que para el estado de vacío. Por otro lado, bajo una influencia paramétrica el estado de vacío evoluciona a un estado *squeezed*. Las varianzas de las variables canónicas son significativamente diferentes, y son descritas por una elipse en el plano de fases. Como función del tiempo, la elipse rota con respecto al origen del diagrama de fases. El número medio de partículas creadas en los estados coherente y *squeezed* puede ser el mismo, pero las propiedades estadísticas son radicalmente diferentes.

Véamos todas las afirmaciones anteriores de una manera más formal. Si volvemos al formalismo de las secciones anteriores vemos que las variables u_k y v_k se pueden parametrizar unicamente por tres funciones, debido a la ligadura $|u_k|^2 - |v_k|^2 = 1$. Podemos escribir

$$u_k = e^{i\theta_k} \cosh r_k \qquad v_k = e^{-i(\theta_k - 2\phi_k)} \sinh r_k, \tag{5.84}$$

donde r es el parámetro de squeezing, ϕ es el ángulo de squeezing y θ el ángulo rotacional. Combiene también darse cuenta que las ecuaciones (5.33) y (5.7) pueden ponerse en la forma

$$a_k(\eta) = RSa_k(0)S^+R^+ \qquad a_k^+(\eta) = RSa_k^+(0)S^+R^+, \tag{5.85}$$

donde

$$S(r,\phi) = \exp\Big[r\left(e^{-2i\phi}a_k(0)a_{-k}(0) - e^{2i\phi}a_k^+(0)a_{-k}(0)\right)\Big], \tag{5.86}$$

es el operador unitario de *squeezing* y

$$R(\theta) = \exp\Big[-i\theta\left(a_k(0)a_k(0) + a_{-k}^+(0)a_{-k}(0)\right)\Big] \tag{5.87}$$

es el operador de rotación unitario. La ecuación (5.85) muestra explicitamente el fenómenos de squeezing que aparece en este tipo de problemas.

Puesto que las partes real e imaginaria de u_k y v_k son completamente independientes, podemos reescribir las ecuaciones (5.35) obteniendo cuatro ecuaciones (de las cuales sólo tres son independientes)

$$\frac{d}{d\eta}\ Re\ u_k = k\ \ Im\ u_k + \frac{a'}{a}\ Re\ v_k \tag{5.88}$$

$$\frac{d}{d\eta}\ Im\ u_k = k\ \ Re\ u_k - \frac{a'}{a}\ Im\ v_k \tag{5.89}$$

y exactamente las mismas para $Re\ v_k$ e $Im\ v_k$. Por simplicidad, omitimos los índices de los modos y escribimos

$$Re\ u = \cosh r \cos\theta \tag{5.90}$$

$$Im\ u = \cosh r \sin\theta \tag{5.91}$$

$$Re\ v = \sinh r \cos(\theta - 2\phi), \tag{5.92}$$

$$Im\ u = \sinh r \sin(\theta - 2\phi). \tag{5.93}$$

Tenemos las siguientes ecuaciones que gobiernan la evolución de los campos

$$r' = \frac{a'}{a} \cos 2\phi, \tag{5.94}$$

$$\theta' = -k - \frac{a'}{a} \sin 2\phi \tanh r \tag{5.95}$$

$$\phi' = -k - \frac{a'}{a} \sin 2\phi \coth r. \tag{5.96}$$

La evolución empieza en $r = 0$, lo que define nuestro estado de vacío bien conocido ($v_k = 0$).

Usando el formalismo de *squeezing* podemos encontrar la evolución de un modo para un k dado que está viajando a través de la barrera de potencial $U(\eta)$ sin un conocimiento específico del factor de escala. En la aproximación de onda corta, cuando la longitud de onda del modo esta dentro del horizonte, $\lambda < l_H(\eta) = \frac{a^2}{a'}$. En este caso, el término en k es dominante y tenemos

$$\phi_k = -k\eta + \phi_0 \quad \theta = \phi_k, \tag{5.97}$$

donde ϕ_0 es una constante. Vemos que $\cos 2\phi_k$ está oscilando rapidamente, de forma que $r_k = cte$. En otras palabras, el modo dado, aún no se ha encontrado con la barrera de potencial $U(\eta)$, estamos en el régimen adiabático. En el régimen de onda larga el término k se puede despreciar, dando

$$\tan\phi_k = \frac{cte}{a^2}. \tag{5.98}$$

Cuando el factor de escala crece, ϕ_k va a uno de los valores $\phi_k = 0$ o $\phi_k = \pi$. El parámetro de *squeezing* crece de forma logarítmica

$$r_k = \ln\left(\frac{a_{**}}{a_*}\right) \tag{5.99}$$

donde $a_{**} = a_{**}(\eta)$, es el factor de escala a final del régimen de longitud de onda larga. Después de la amplificación r_k permanece constante e igual al valor acumulado; volvemos al régimen de longitud de onda corta. Ahora $f_k(\eta) = u_k(\eta) + v_k(\eta)$ es practicamente real y podemos escribir

$$h_k(\eta) = \frac{1}{a(\eta)} f_k(\eta) \approx \frac{1}{a} e^{r_k} \cos\phi_k. \tag{5.100}$$

El campo gravitacional $h_{ij}(\eta, \mathbf{x})$ está ahora constituido por una función aleatoria $e^{i\mathbf{kx}}$, veces una función dependiente del tiempo $h_k(\eta)$, similar a la forma de una onda estacionaria. Vemos que cuando los diferentes modos del campo gravitacional entran en el horizonte lo hacen como ondas estacionarias!.

El parámetro de *squeezing* también contiene información sobre el número de partículas producidas durante la evolución de una escala dada. Tenemos

$$\langle N^2\rangle = \langle a_k^+ a_k a_{k'} a_{k'}\rangle = \sinh^2 r\Big[\sinh^2 r + \cosh^2 r(\delta(k-k')\delta(-k+k') + \delta(-k-k')\delta(k+k'))\Big] \tag{5.101}$$

Promediando sobre k

$$\langle N^2\rangle = \sinh^2 r(\sinh^2 r + 2\cosh^2 r). \tag{5.102}$$

La varianza del número de partículas producidos $\langle(\Delta N)^2\rangle = \frac{1}{2}\sinh^2 2r$. Para estados con gran *squeezing*, $r \gg 1$, la varianza de N es $\langle(\Delta N)^2\rangle \approx \frac{1}{8}e^{4r}$ y $\sqrt{\langle(\Delta N)^2\rangle} \approx \frac{1}{2\sqrt{2}}e^{2r}$, que es aproximadamente igual a N. En cambio para estados coherentes es aproximadamente $\sqrt{\langle N\rangle}$.

5.11. El espectro de potencias *squeezed* $\mathcal{P}_h(k)$

Centrémonos ahora en otra importante propiedad estadística del proceso de *squeezing*, en concreto, que la varianza del campo es una funcíon explicitamente oscilatoria en el tiempo. Esto puede verse como una característica del patrón de onda estacionaria de las ondas gravitacionales. El valor medio del campo gravitacional $h_{ij}(\eta, \mathbf{x})$ es cero a cada tiempo η y en cada punto espacial $\mathbf{x}$, $\langle 0|h_{ij}(\eta, \mathbf{x})|0\rangle$ es cero. La varianza en cambio es distinta de cero, $\langle 0|h_{ij}(\eta, \mathbf{x})h^{ij}(\eta, \mathbf{x})|0\rangle = \langle h^2\rangle$ y determina la amplitud cuadrática media del campo. Puesto que las dos polarizaciones tienen igual amplitud, podemos escribir

$$\langle 0|h_{ij}(\eta,\mathbf{x})h^{ij}(\eta,\mathbf{x})|0\rangle = \frac{8\pi G}{(2\pi)^3}\int d^3k \sum_{A=+,\times}\frac{1}{2k}\frac{2}{a^2}|f_k(\eta)|^2 = \int_0^\infty d(\ln k)h^2(k,\eta), \tag{5.103}$$

donde

$$h^2(k,\eta) = \frac{8\pi G}{\pi^2 a^2}k^2|f_k(\eta)|^2 = \frac{8\pi G}{\pi^2}\frac{k^2}{a^2}(|u_k|^2+|v_k|^2+u_k v_k+u_k^* v_k^*), \tag{5.104}$$

es decir, en términos del parámetro y ángulo de *squeezing*

$$h^2(k,\eta) = \frac{8\pi G}{\pi^2 a^2}k^2(\cosh 2r_k + \sinh 2r_k \cos 2\phi_k). \tag{5.105}$$

A esta cantidad se la llama usualmente espectro de potencias del campo; en nuestra notación usual $\mathcal{P}_h(k) \equiv h^2(k,\eta)$, y es idéntica a la definición del espectro de potencias usada a lo largo de este trabajo. La propiedad a destacar es que $\mathcal{P}_h(k)$ no es una función suave de k, sino que está modulada y contiene muchos ceros, o hablando estrictamente, mínimos durante la evolución de los parámetros de *squeezing*. Para grandes valores del factor de *squeezing*, lo que corresponde con tiempos tardíos de la evolución cosmológica, el espectro de potencias se puede escribir como

$$\mathcal{P}_h(k) \approx \frac{k^2}{a^2}e^{2r_k}\cos^2(k\eta+\phi_{0k}). \tag{5.106}$$

El primer aspecto importante es que el factor oscilatorio se anula para una serie de valores de k. Otra comportamiento a destacar es la dependencia del espectro de potencias con el cuadrado del número de ondas. Es importante recordar también que $\mathcal{P}_h(k)$ es proporcional a la exponencial de r_k. Para hacerse una idea completa de la apariencia de este espectro deberíamos resolver las ecuaciones que gobiernan los parámetros de *squeezing*, pero esto es algo que escapa a la extensión de este trabajo.

5.12. Efectos *transplanckianos* en el espectro de potencias

Veámos ahora un aspecto de naturaleza ligeramente diferente, en concreto, trataremos de encontrar la *huella* de la física *transplanckiana* en el espectro de potencias de las ondas gravitacionales, o de forma más precisa, la dependencia del espectro de potencias con la elección de vacío.

Hasta ahora, hemos elegido siempre el vacío de Sitter en el pasado remoto $\eta \to \infty$, de forma que $u_k(0) = 1$ y $v_k(0) = 0$ satisfaciendo la ligadura $|u_k|^2 - |v_k|^2 = 1$. Esta elección nos da los siguientes modos durante una expansión de tipo de Sitter

$$f_k = \frac{1}{\sqrt{2k}} \left(1 - \frac{i}{k\eta}\right) e^{-ik\eta}, \tag{5.107}$$

correspondiente a

$$g_k = \sqrt{\frac{k}{2}} e^{-ik\eta}. \tag{5.108}$$

La lógica subyacente a tal elección es que el modo, a tiempos tempranos, es de frecuencia positiva. Esto es sólo una asunción formal sin relevancia en el resultado físico. Además vimos que, del tratamiento semiclásico junto con el tratamiento mecanocuántico, la fluctuación inicial de las ondas gravitacionales a ser amplificada por el potencial $U(\eta)$ es del orden

$$h = \frac{l_{Pl}}{\lambda} \tag{5.109}$$

donde λ es la longitud de onda y l_{Pl} es la longitud de Planck. Pero, qué ocurriría si elegimos el estado de vacío de manera diferente?. En general tenemos

$$f_k = \frac{A_k}{\sqrt{2k}} e^{-ik\eta} \left(1 - \frac{i}{k\eta}\right) + \frac{B_k}{\sqrt{2k}} e^{ik\eta} \left(1 + \frac{i}{k\eta}\right), \tag{5.110}$$

$$g_k = A_k \sqrt{\frac{k}{2}} e^{-ik\eta} - B_k \sqrt{\frac{k}{2}} e^{ik\eta}, \tag{5.111}$$

y utilizando las ecuaciones (5.39) y (5.40) tenemos

$$u_k = \frac{1}{2} \left(A_k e^{-ik\eta} \left(2 - \frac{i}{k\eta}\right) + B_k e^{ik\eta} \frac{i}{k\eta}\right), \tag{5.112}$$

$$v_k^* = \frac{1}{2} \left(B_k e^{ik\eta} \left(2 + \frac{i}{k\eta}\right) - A_k e^{-ik\eta} \frac{i}{k\eta}\right). \tag{5.113}$$

La ligadura $|u_k|^2 - |v_k|^2 = 1$ se escribe ahora

$$|A_k|^2 - |B_k|^2 = 1. \tag{5.114}$$

Definamos ahora un momento específico η_0, en el que un modo dado con número de onda k es de tamaño comparable con la escala de Planck e impongamos algunas condiciones razonables. Podemos casi pensar en una inflación semieterna, en la cual los modos aparecen a la misma escala y casi con condiciones iniciales idénticas, y más tarde, siguen la evolución que hemos descrito en los capítulos anteriores. La forma más sencilla es fijar $v_k^*(\eta_0) = 0$, lo que no es realmente un cambio radical en el paradigma. Esto implica que

$$B_k = \frac{ie^{-2ik\eta_0}}{2k\eta_0 + i} A_k, \tag{5.115}$$

de donde concluimos que

$$|A_k|^2 = \frac{1}{1 - |\alpha_k|^2}, \qquad |B_k|^2 = \frac{|\alpha_k|^2}{1 - |\alpha_k|^2}, \tag{5.116}$$

donde

$$\alpha_k = \frac{i}{2k\eta_0 + i}. \tag{5.117}$$

El espectro de potencias es por tanto

$$\mathcal{P}_T(k) = \frac{k^3}{2\pi^2} \sum_\lambda |h(\mathbf{k}, \lambda)|^2 = \frac{8}{M_{Pl}^2} \frac{k^3}{2\pi^2 a^2} |f_k|^2. \tag{5.118}$$

Sustituyendo f_k y a escalas superhorizonte ($|k\eta| \ll 1$), obtenemos

$$\mathcal{P}_T(k) \sim \frac{8}{M_{Pl}^2} \frac{1}{4\pi^2 a^2 \eta^2} \left(|A_k|^2 + |B_k|^2 - A_k^* B_k - A_k B_k^* \right) \tag{5.119}$$

o en términos de α_k

$$\mathcal{P}_T \sim \frac{8}{M_{Pl}^2} \left(\frac{H}{2\pi} \right)^2 \frac{1 + |\alpha_k|^2 - \alpha_k e^{-2ik\eta_0} - \alpha_k^* e^{2ik\eta_0}}{1 - |\alpha_k|^2}. \tag{5.120}$$

Si tomamos el límite actual recuperamos la expresión usual $\mathcal{P}_T(k) = \frac{8}{M_{Pl}^2} \left(\frac{H}{2\pi} \right)^2$. Para un k dado elegimos un tiempo η_0 tal que el momento físico p corresponda a alguna escala física, por ejemplo, la escala de Planck $p = \Lambda$

$$k = ap = -\frac{p}{\eta H} \Rightarrow \eta_0 = -\frac{\lambda}{kH}. \tag{5.121}$$

Una mayor simplificación puede obtenerse asumiendo que $H/\Lambda \ll 1$, y expandiendo a primer orden en esta cantidad el espectro de potencias. Puesto que

$$|\alpha_k|^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{H}{\Lambda} \right)^2 \left(1 - \frac{1}{4} \frac{H^2}{\Lambda^2} + \dots \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{H}{\Lambda} \right)^2, \tag{5.122}$$

el espectro de potencias adquiere la forma

$$\mathcal{P}_t(k) = \frac{8}{M_{Pl}^2} \left(\frac{H}{2\pi} \right)^2 \left(1 - \frac{H}{\Lambda} \sin \frac{2\Lambda}{H} \right). \tag{5.123}$$

El efecto del *cutoff*, y por tanto también de la física *transplanckiana*, es de primer orden en $\mathcal{O}\left(\frac{H}{\Lambda}\right)$!. En la derivación de la ecuación anterior hemos hecho algunas asunciones bruscas, sabiendo lo que estabamos buscando, pero en los modelos, donde el parámetro de Hubble tiene una dependencia con la escala, $H = H(k)$, la ecuación anterior predice una pequeña modulación del espectro!. En una situación ideal seríamos capaces de ver dos efectos de la física *transplanckiana*: una modificación de la amplitud del espectro, junto con una modulación de k a lo largo del mismo.

Capítulo 6

Reheating y Preheating

Nothing comes from nothing

Lucretius (en torno a 99 a.C-55 a.C)

6.1. Introducción

Al final de inflación la densidad de energía del Universo es una combinación de energía cinética y energía potencial del inflatón ϕ. El Universo, al final de inflación, está generalmente[1] en un estado frío, de baja entropía (exponencialmente pequeñas), con pocos grados de libertad, muy diferente del caliente y con alta entropía en el que nos encontramos hoy en día, con $S \sim 10^{89}$ y $M \sim 10^{23}\ M_{\odot}$. Después de inflación ese universo dominado por el inflatón debe ser descongelado, de alguna manera, para llegar a ser un universo altamente entrópico dominado por radiación.

Un camino posible es el conocido como reheating del Universo. Después del *slow-rolling* el inflatón comienza a oscilar uniformemente en el espacio en torno al verdadero vacío. Desde un punto de vista mecanocuántico, esto se corresponde con un estado coherente de partículas de inflatón con $k = 0$. Debido a las interacciones del inflatón consigo mismo, y con otro campos, que en principio podían estar presentes, dicho estado coherente decaerá en cuántos de partículas elementales de una manera perturbativa. Esto corresponde con la producción de partículas post-inflacionaria.

Durante inflación, los demás campos, a pesar de existir durante inflación, no juegan ningún papel[2], ya que, en el caso de que estas partículas se

[1] Salvo en el escenario de *warm inflation* donde existe una producción de partículas durante inflación.

[2] Salvo correcciones radiativas.

produzcan durante inflación, la expansión exponencial las diluirá casi inmediatamente. Escribamos el lagrangiano más general con acoplos del inflatón a otros campos y a si mismo

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi^2) - V(\phi) + \frac{1}{2}(\partial_\mu \chi)^2 - \frac{1}{2}m_\chi^2 \chi^2 + \frac{1}{2}\xi \chi^2 R + \overline{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_\psi)\psi - h\phi\overline{\psi}\psi - \frac{1}{2}g^2\phi^2\chi^2 - g^2\sigma\phi\chi^2 \tag{6.1}$$

donde $g, h, \xi, \ldots$ son acoplos pequeños[3]; σ es el posible vev fínito del inflatón, y donde hemos hecho $\phi - \sigma \longrightarrow \phi$, de forma que el mínimo esté en $\phi = 0$ y el potencial se pueda expandir en torno al mínimo como

$$V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \mathcal{O}(\phi^4), \tag{6.2}$$

donde m es la masa del inflatón en el mínimo. Consideremos que la masa del inflatón es mucho mayor que la masa de los otros campos a los que se acopla $m^2 \gg m_\chi^2, m_\psi^2 \gg g^2\sigma\phi, h\phi$ y calculemos la evolución del inflatón después de inflación, cuya amplitud satisface la ecuación (despreciamos de momento los acoplos a otros campos, que consideraremos más tarde). Tenemos

$$\ddot{\phi} + 3H(t)\dot{\phi} + m^2\phi = 0, \tag{6.3}$$

cuya solución oscilatoria es

$$\phi(t) = \Phi(t)\sin mt \tag{6.4}$$

donde la amplitud Φ decae como $a^{-3/2}$, como veremos ahora. Consideremos la densidad de energía media y la presión del inflatón sobre un periodo

$$\langle\rho\rangle = \frac{1}{2}\langle\dot{\phi}^2\rangle + \frac{1}{2}m^2\langle\phi^2\rangle = \frac{1}{2}m^2\Phi^2(\langle\cos^2 mt\rangle + \langle\sin^2 mt\rangle), \tag{6.5}$$

$$\langle p\rangle = \frac{1}{2}\langle\dot{\phi}^2\rangle - \frac{1}{2}m^2\langle\phi^2\rangle = \frac{1}{2}m^2\Phi^2(\langle\cos^2 mt\rangle - \langle\sin^2 mt\rangle) \simeq 0, \tag{6.6}$$

donde hemos despreciado el cambio en $\Phi(t)$ debido a la condición $m \gg H$, que tiene lugar al final de inflación. Vemos que un campo escalar homogéneo se comporta como un fluido sin presión, lo que significa que durante este periodo el Universo se extiende como un Universo dominado por materia,

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0 \Longrightarrow \rho = \frac{1}{2}m^2\Phi(t) \sim a^{-3}, \tag{6.7}$$

y por tanto $\Phi \sim a^{-3/2} \sim t^{-1}$. Vemos entonces que un campo escalar homogéneo oscilando con frecuencia igual a su masa puede considerarse como

[3]Para evitar grandes correcciones radiativas durante inflación.

un estado coherente de partículas ϕ con momento cero y densidad de partículas

$$n_\phi = \rho_\phi/m = \frac{1}{2}m\Phi^2 \sim a^{-3}, \tag{6.8}$$

oscilando de manera coherente con la misma fase. Hasta ahora hemos considerado sólo los efectos de la expansión, y hemos ignorado los efectos debidos a la producción de partículas durante inflación. Esto puede tenerse en cuenta añadiendo, en la ecuación de movimiento, el denominador del propagador de la teoría cuántica de campos

$$\ddot{\phi} + 3H(t)\dot{\phi} + (m^2 + \Pi(\omega))\phi = 0, \tag{6.9}$$

donde $\Pi(\omega)$ es el operador de polarización en el espacio de Minkowski para ϕ con cuadrimomento $k^\mu = (\omega, 0, 0, 0)$, con $\omega = m$. La parte real del operador anterior puede despreciarse pues da sólo una pequeña corrección a m^2. Sin embargo, debido al espacio de fases, si la frecuencia de las oscilaciones satisface $\omega \gg min(2m_\chi, 2m_\psi)$, entonces el operador de polarización adquiere una parte imaginaria

$$Im\Pi(\omega) = m\Gamma_\phi \tag{6.10}$$

donde Γ_ϕ es la tasa de decaimiento total del inflatón y hemos usado el teorema óptico, es decir, la unitariedad para relacionar ambas cantidades en el polo físico, $\omega = m$. Nótese que con la condición $m \gg H$, el operador de polarización Π y los decaimientos Γ no dependen de la curvatura del Universo y coinciden con sus límites en el espacio tiempo. En particular, la probabilidad de decamiento total se puede escribir como una suma sobre los decaimientos parciales

$$\Gamma_\phi = \sum_i \Gamma(\phi \longrightarrow \chi_i\chi_i) + \sum_i \Gamma(\phi \longrightarrow \overline{\phi_i}\phi_i), \tag{6.11}$$

donde

$$\Gamma(\phi \longrightarrow \chi\chi) = \frac{g^4\sigma^2}{8\pi m} \quad , \quad \Gamma(\phi \longrightarrow \psi\psi) = \frac{h^2 m}{8\pi}. \tag{6.12}$$

Desde un punto de vista fenomenológico podemos describir el amortiguamiento de las oscilaciones del modo escalar ϕ añadiendo un término de fricción extra $\Gamma\dot{\phi}$ a la ecuación clásica de movimiento para el campo ϕ, en lugar de añadir un término proporcional a la parte imaginaria del operador polarización,

$$\ddot{\phi} + 3H(t)\dot{\phi} + \Gamma\dot{\phi} + m^2\phi = 0. \tag{6.13}$$

Nótese que esta ecuación, debido a la forma en que se calculó $\Pi = m\Gamma$ es sólo válida en el estado de rápidas oscilaciones del campo en torno al mínimo del potencial, y no puede usarse para investigar el estado de *slow-rolling* durante inflación. Asumimos que el condensado inflatón (el modo homogéneo cero) está formado por multitud de partículas de inflatón, decayendo en otras partículas a las que se acopla. La solución a la ecuación anterior es

$$\Phi(t) = \Phi_0 e^{\frac{1}{2}\int 3Hdt} e^{-\frac{1}{2}\Gamma_\phi t} = \frac{\Phi_0}{t} e^{-\frac{1}{2}\Gamma_\phi t}, \tag{6.14}$$

donde hemos usado $H = 2/3t$. Podemos ahora calcular la evolución de la energía y la densidad de número del inflatón bajo el efecto de la producción de partículas,

$$\frac{d}{dt}(a^3 n_\phi) = -\Gamma \cdot a^3 n_\phi \tag{6.15}$$

$$\frac{d}{dt}(a^3 \rho_\phi) = -\Gamma \cdot a^3 \rho_\phi, \tag{6.16}$$

que tienen una interpretación física sencilla, pues reflejan que la densidad de número de partículas decrecen exponencialmente con la tasa de decaimiento Γ. Inicialmente, la tasa de decaimiento total es mucho menor que la tasa de expansión $\Gamma_\phi \ll 3H = 2/t \ll m$, y la energía comóvil total y el número total de inflatones se conserva, su energía y densidades de número decaen como en un fluido de materia $\rho_\phi \simeq m n_\phi \sim a^{-3}$.

Eventualmente, el Universo se expande suficientemente como para que la tasa de decaimiento se haga mayor que la tasa de expansión, o alternativamente, el tiempo de vida del inflatón,$\tau_\phi < t_U = H^{-1}$, y el inflatón decae subitamente (en menos de un tiempo de Hubble), liberando toda su energía ρ_ϕ en partículas relativistas ψ y χ. Las partículas producidas interactuan entre ellas y termalizan rapidamente a una temperatura común. Este proceso es el responsable de la abundancia actual de materia y energía de radiación y podría asociar con el momento de Big Bang.

Puede parecer extraño que el Universo tenga que esperar hasta ser lo suficientemente *viejo* como para que el inflatón pueda decaer, ya que estamos acostumbrados a decaimientos muy rápidos en nuestros detectores de partículas físicos, donde son posibles tiempos de vida del orden de 10^{-17} s, mientras que nuestro Universo tiene una edad considerable: 10^{17}s!. Sin embargo, si inflación tiene lugar a escalas del orden de la escala de gran unificación, el tiempo de Hubble de un dominio causal al final de inflación es del orden de 10^{-35} s, que es muchos ordenes de magnitud menor que los decaimientos más rápidos del inflatón. Por tanto, la probabilidad de que el inflatón decaiga en un tiempo de Hubble tan corto es totalmente despreciable, y el Universo deberá esperar a ser lo suficientemente viejo para que exista una probabilidad no nula de decaimiento.

Calculemos ahora la temperatura de *reheating* del Universo resultante de la termalización de los productos de decaimiento del inflatón. Nótese que el proceso de reheating, una vez que tiene lugar, es esencialmente instantáneo, y por tanto la densidad de energía en *reheating* se puede estimar como la correspondiente a una tasa de expansión $H = \Gamma_\phi$. Puesto que toda la densidad de energía se convertirá rapidamente en un plasma de partículas relativistas, podemos estimar

$$\rho(t_{rh}) = \frac{3\Gamma_\phi^2 M_P^2}{8\pi} = \frac{\pi^2}{30} g(T_{rh}) T_{rh}^4 \Rightarrow T_{rh} \simeq 0{,}1\sqrt{\Gamma_\phi M_P}, \tag{6.17}$$

donde $g(T_{rh})$ es el número de grados de libertad relativistas a la temperatura T; deberíamos tomar 1 para un escalar, 2 por cada particula vectorial sin masa, etc.... En modelos realistas es de esperar $g(T_{rh}) \simeq 10^2 - 10^3$, que es el valor que hemos utilizado para obtener la estimación de la temperatura de reheating anterior. Nótese que dicha temperatura no depende de los valores iniciales del campo; está completamente determinadas por los parámetros de la teoría de partículas subyacente.

Nótese, que en ausencia de fermiones, la única contribución a la tasa de decaimiento sería $\Gamma(\phi \longrightarrow \chi\chi) = \frac{g^4\sigma^2}{8\pi m}$. Este término desaparece en teorías donde no hay ruptura espontanea de simetría y $\sigma = 0$. Esto no implica necesariamente que no exista reheating en dichas teorías. De hecho, el decaimiento no es sólo posible en presencia de un campo constante σ sino en presencia también de un campo oscilante grande. En lo que sigue estudiaremos la resonancia paramétrica y el *reheating* en modelos con $\sigma = 0$, o al menos $\sigma \ll \Phi$, donde Φ es la amplitud de las oscilaciones. No obstante, cuando inflación tiene lugar y Φ se hace lo suficientemente pequeño, es de esperar que la teoría de perturbaciones funciones correctamente. Para obtener una estimación de la tasa de decaimiento en $\sigma = 0$, tomaremos Φ es lugar de σ en el decaimiento, de manera que

$$\Gamma(\phi\phi \longrightarrow \psi\psi) \sim \frac{g\Phi^2}{8\pi m}. \tag{6.18}$$

El problema de este término es que Φ^2 decrece como t^{-2} en el universo en expansión , mientras que la constante de Hubble decrece sólo como t^{-1}. Por tanto, la tasa de decaimiento nunca alcanzará a la expansión del universo, y *reheating* nunca se completará. El proceso de *reheating* sólo se completará si Γ decrece más rapido que t^-1. Tipicamente, esto requiere o bien ruptura espontanea de simetría ($\sigma = 0$) o bien acoplo del inflatón a fermiones con $m_\psi < m_\phi/2$. Si se violan ambas condiciones, el inflatón nunca decaerá totalmente. Dichos campos pueden ser responsables de la materia oscura del universo, pero esto requiere cierto *fine-tuning* con los parámetros. Normalmente un decaimiento incompleto implica que el universo a la edad de 10^{10}

billones de años es frío, vacío e incompatible con la vida. Esto puede ocurrir incluso si la constante de acoplo g es muy grande.

La teoría elemental que hemos presentado es simple e intuitivamente atractiva. Es muy satisfactoria al describir el *reheating* después de inflación en muchos modelos inflacionarios realistas. Sin embargo, en algunos casos, la amplitud de las oscilaciones del campo es suficientemente grande como para que el reheating ocurra en el regimen de resonancia paramétrica.

6.2. Introducción a Preheating

I believe there are 15,747,724,136,275,002,577,605,653,961,181,555,468,044,717,914,527,116 protons in the universe and the same number of electrons.

Sir Arthur Eddington (1882-1944), The Philosophy of Physical Science. Cambridge, 1939.

La discusión de las secciones anteriores se conoce con el nombre de reheating perturbativo, porque el inflatón, oscilando coherentemente, decaerá como si estuviera compuesto de cuantos de inflatón individuales, decayendo cada uno de ellos como viene descrito por la teoría cuántica de campos ordinaria, con los decaimientos perturbativos que calculamos anteriormente. Sin embargo, el inflatón, al final de inflación, es realmente una onda coherente, un modo cero, un condensado constituido por muchos cuantos de inflatón, oscilando todos con la misma fase y los efectos no perturbativos asociados con este condensado pueden ser importantes. De hecho, hace ya unos años, Linde, Kofman y Starobinski propusieron una nueva descripción del proceso que se conoce actualmente como *preheating*. Estos, hicieron uso del formalismo bien conocido de producción de partículas en la presencia de campos de *background* que hemos discutido a lo largo de este trabajo. En este caso, en lugar de un campo cuántico evolucionando en un campo gravitacional, como ocurría durante inflación, tenemos un campo acoplado al inflatón, que tiene una frecuencia (o una masa) que varía rapidamente debido a las oscilaciones del inflatón.

6.3. Resonancia paramétrica y límites de aplicación de la teoría de perturbaciones.

Por simplicidad consideremos la interacción entre el inflatón y un campo escalar $\hat{\psi}$ acoplado $\hat{\chi}$ con el lagrangiano (6.1). Como sabemos la representación de Heisenberg del campo escalar $\hat{\chi}$ es

$$\hat{\chi}(t,\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \left(\hat{a}_k \chi_k(t)\, e^{-i\mathbf{kx}} + \hat{a}_k^+ \chi_k^*(t)\, e^{i\mathbf{kx}} \right) , \tag{6.19}$$

donde $\hat{a}_k$ y $\hat{a}_k^+$ son los operadores creación y destrucción respectivamente. Se asumirá que el inflatón oscila como en (6.4) con una frecuencia dada por su masa de forma que tenemos un término inducido de masa oscilante, debido al acoplo, de la forma,

$$m_\chi^2(t) = m_\chi^2 + g^2\Phi^2(t)\sin^2 mt \tag{6.20}$$

de forma que la ecuación para los modos se escribe

$$\chi_k'' + (A_k - 2q\cos 2z)\,\chi_k = 0 \tag{6.21}$$

donde $A_k = \frac{k^2+m_\chi^2}{m^2} + 2q$, $q = \frac{g^2\sigma\Phi^2}{4m^2}$, $z = mt$, y las primas denotan derivación con respecto de z. La ecuación anterior es bien conocida y recibe el nombre de ecuación de Mathieu. Forma parte de una clase mayor de ecuaciones Hill que presentan soluciones inestables para ciertos valores de los momentos para un conjunto dado de parámetros $\{A_k, q\}$ con $A \geq 2q$. Estas soluciones presentan bandas de inestabilidad que son estrechas para valores pequeños del parámetro resonante $q \leq 1$, pero que pueden ser muy anchas para valores pequeños de q. Las soluciones de la ecuación de Mathieu tienen la forma

$$\chi = e^{\mu_k z} p(z) \tag{6.22}$$

donde μ_k es el índice de Floquet, que caracteriza la inestabilidad exponencial, y es tipicamente mucho menor que 1, pudiendo llegar a ser 0,28055; y $p(z)$ es una función periódica en z. Esta inestabilidad corresponde con un crecimiento exponencial del número de ocupación[4]

$$n_k(t) \sim e^{2\mu_k mt}, \tag{6.23}$$

que puede interpretarse como producción de partículas. En un estado con un gran número de partículas bosónicas la estimación de Γ obtenida en el capítulo anterior no es válida, y deberíamos usar métodos mucho más elaborados basados en la teoría de resonancia paramétrica.

[4]A menos que el índice de Floquet sea totalemente despreciable

6.4. Resonancia *Narrow*

Consideremos el caso en el que $m_\chi, g\Phi \ll m$ o equivalentemente $q \ll 1$. La tabla de inestabilidades de la ecuación de Mathieu nos dice que la resonancia ocurre solamente en algunas bandas estrechas en torno a $A_k \simeq l^2$, con $l = 1, 2, \ldots$, con anchuras en el espacio de momentos del orden de $\Delta k \sim mq^l$; por tanto, para $q > 1$, la banda más importante es la primera, $A_k \sim 1 \pm q$, centrada en torno a $k = m/2$. El factor de crecimiento para la banda de inestabilidad viene dado por

$$\mu = \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{2k}{m} - 1\right)^2} \tag{6.24}$$

Las resonancias tienen lugar para k en el rango $\frac{m}{2}\left(1 \pm \frac{q}{2}\right)$. El índice μ_k se anula en los extremos de la resonancia y toma su valor máximo $\mu_k = \frac{q}{2}$ en $k\frac{m}{2}$. Los modos correspondientes crecen con un ritmo máximo $\chi_k = \exp(qz/2)$, lo que lleva a un crecimiento de los números de ocupación de la forma $n_k \sim \exp(qmt)$. La interpretación de esto es la siguiente: En el límite $q \ll 1$, la masa efectiva de las partículas χ es mucho menor que m, y cada particula ϕ al decaer crea dos partículas χ con momento $k \sim m/2$. La diferencia con respecto al decaimiento perturbativo $\Gamma(\phi \longrightarrow \chi\chi)$ es que, en el régimen de resonancia paramétrica, la tasa de procucción de partículas χ es proporcional al número de partículas producido anteriormente (lo que da lugar a un crecimiento exponencial con el tiempo) Este es un efecto perturbativo, que no hubieramos obtenido usando los métodos de la secciónes anteriores. Nótese que sólo un conjunto reducido de modos crece de manera exponencial con el tiempo, de forma que el espectro de partículas estará dominado por esos modos, mientras que el resto están todavía en el vacío, produciéndose sólo por procesos de decaimiento perturbativo ordinarios. La producción exponencial no durará eternamente: la expansión del Universo va a afectar la producción resonante de partículas, dando lugar al fin de la resonancia. En primer lugar, la amplitud $\Phi(t)$ que determina q, no sólo decae como t^{-1} debido a la inflación del Universo, sino también debido al decaimiento perturbativo del inflatón $\Phi(t) \sim \exp(\Gamma_\phi t/2)$. En segundo lugar, existe un redshift de los momentos k que aparecen en la ecuación de Mathieu, y por tanto, si un modo dado está inicialmente en la banda estrecha, $\Delta k \sim qm$, rapidamente sufrirá un redshift que lo sacará de dicha banda, en una escala de tiempo, dependiente de la ecuación de estado de la materia y que tipicamente puede estimarse por $\Delta t \sim qH^{-1}$. Esto evita que los numeros de ocupación asociados a dichos momentos crezcan exponencialmente, terminando la resonancia cuando $q^2 m < H$.

f2.eps: 300dpi, width=4.26cm, height=4.54cm, bb=8 125 511 661

Figura 6.1: Resonancia Paramétrica Narrow para el campo χ en la teoría $\frac{m^2\phi^2}{2}$ en espacio de Minkowski para $q \sim 0{,}1$. El tiempo se muestra en unidades de $m/2\pi$, que es igual al número de oscilaciones del campo inflatón. Por cada oscilación del campo $\phi(t)$ los modos crecientes del campo χ oscilan una sóla vez. La figura superior muestra el creciemiento del modo χ_k para el momento k correspondiente a la maxima tasa de crecimiento. En la figura inferior se representa el logaritmo del número de ocupación n_k en este modo. El n úmero de partículas crece exponencialmente y $\ln n_k$ en el regimen de resonancia estrecha es una línea recta con pendiente constante. Esta pendiente dividida por 4π da el valor del parámetro μ_k. En este caso particular $\mu_k \sim 0{,}05$, como debe ser de acuerdo con la relación $\mu_k \sim q/2$.

Estos dos mecanismos no son los únicos que pueden detener el desarrollo de la resonancia. Los efectos de *backreaction* pueden producir cambios en los parámetros A_k y q. No habrá resonancia si las partículas χ decae con una tasa de decaimiento $\Gamma > \mu_k m$, o si en un tiempo $\sim (\mu_k m)^{-1}$ son sacadas de la banda de resonancia debido a las interacciones. De igual manera, no habrá un reheating explosivo si los productos del *decay* incluyen fermiones puesto que los números de ocupación fermiónicos no pueden ser grandes, debido al principio de Pauli. Esto ocurre por ejemplo, en muchos modelos inflacionarios basados en supergravedad donde el decaimiento del inflatón va acompañado de producción de gravitinos.

6.5. Resonancia *broad*

Analicemos ahora el caso en el que la amplitud de oscilación inicial sea muy grande, como en los modelos de inflación caótica, en los cuales $\Phi_0 \sim M_P/10$ y $m \sim 10^{-6}M_P$. En este caso, el parámetro q toma un valor elevado

$$q_0 = \frac{g^2\Phi_0^2}{4m^2} \sim 10^{10}g^2 \leq 10^4 \qquad (6.25)$$

En este caso, el regimen resonante tiene lugar para un amplio rango de valores de k, el parámetro μ_k puede ser bastante grande, y la producción de partículas por emisión estimulada por el campo oscilante del inflatón puede ser muy eficiente.

Para $\phi(t)$ pequeños el cambio en la frecuencia deja de ser adiabático, y el campo adquiere su máxima aceleración. La condición estandar necesaria

Figura 6.2: Resonancia paramétrica Broad para el campo χ en un espacio de Minkowski para $q \sim 2 \times 10^2$ en la teoría $\frac{m^2\phi^2}{2}$. El tiempo se muestra en unidades de $m/2\pi$.Por cada oscilación del campo $\phi(t)$, los modos crecientes del campo χ oscilan muchas veces. Cada pico en la amplitud de las oscilaciones corresponde a puntos donde $\phi(t) = 0$. A este tiempo el número de ocupación n_k no esta bien definido, pero poco después se estabiliza en un nuevo nivel más alto y permanece constante hasta el próximo salto. Una comparación de las dos partes de esta figura nos muestra la importancia de usar variables propias para la descricción de preheating. Tanto χ_k como la dispersión integrada $\langle\chi^2\rangle$ se comporta erraticamente en el proceso de resonancia paramétrica. n_k es un invariante adiabático. Por tanto, el comportamiento de n_k es relativamente simple y predecible salvo en los intervalos de tiempo pequeños en los cuales en campo es muy pequeño y ocurre producción de partículas.

para producción de partículas se conoce como condición de no adiabaticidad

$$|\frac{\dot{\omega}_k}{\omega_k^2}| \gg 1. \tag{6.26}$$

Cuando esto ocurra no nos será posible definir un espacio de Fock para las partículas χ, y los números de ocupación de esas partículas crecerán muy rapidamente. Asociamos por tanto la condición de no adiabaticidad con la producción de partículas.

Veámos ahora cual es el crecimiento de los modos y el índice de Floquet en este régimen. Para ello escribamos las solución general a la ecuación (**??**) en tiempo ordinario X_k

$$\ddot{X}_k(t) + \omega_k^2 X_k(t) = 0 \tag{6.27}$$

y tomemos como condicion inicial la solución de frecuencia positiva

$$X_k(0) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} e^{-i\omega_k t}. \tag{6.28}$$

Tenemos, en términos de los coeficientes de Bogolubov,

$$X_k(t) = \frac{\alpha_k(t)}{\sqrt{2\omega_k}} e^{-i\int \omega_k dt} + \frac{\beta_k}{\sqrt{2\omega_k}} e^{+i\int \omega_k dt} \tag{6.29}$$

con

$$\alpha_k(0) = 1 \qquad \beta_k(0) = 0. \tag{6.30}$$

Podemos además imponer una condición adicional a las funciones α y β tomando la derivada de la solución como si α y β fueran dependientes del tiempo

$$\dot{\alpha}_k = \frac{\dot{\omega}}{2\omega} e^{2i\int^t \omega dt} \beta_k \tag{6.31}$$

$$\dot{\beta}_k = \frac{\dot{\omega}}{2\omega} e^{-2i\int^t \omega dt} \alpha_k \tag{6.32}$$

El crecimiento en los modos X_k da lugar al crecimiento de los números de ocupación $n_k(t)$. Podemos estimar la densidad de número de partículas n_k con momento $\mathbf{k}$ como la energía de ese modo $\frac{1}{2}|\dot{X}_k|^2 + \frac{1}{2}\omega_k^2|X_k|^2$ dividida por la energía ω_k de cada partícula.

$$n_k(t) = |\beta_k|^2 = \frac{1}{2\omega_k}|\dot{X}_k|^2 + \frac{\omega_k}{2}|X_k|^2 - \frac{1}{2}. \tag{6.33}$$

El inflatón tiene máximos de aceleración en $t = t_j = j\pi/m$, tal que $\sim mt_j = 0$. Entre un tiempo t_j y un tiempo t_{j+1}, la amplitud $\phi(t) \sim \phi_0 = cte$, de forma que la frecuencia $\omega_k(t)$ es aproximadamente constante entre los sucesivos ceros del inflatón, y podemos definir un espacio de Fock para χ. A tiempo t_j la amplitud cambia rapidamente, de forma que se satisface la condición de no adiabaticidad (6.26) y no podemos definir, como ya debería sernos familiar, un invariante adibático como el número de ocupación. Estudiemos el comportamiento de los modos en esos instantes. Si expandimos, con un desarrollo de Taylor ordinario, la frecuencia $\omega_k(t)$ en torno a esos puntos y hacemos el cambio de variables

$$\eta \equiv [2\omega_k^{2''}(t_j)]^{1/4}(t - t_j) \tag{6.34}$$

$$\kappa^2 \equiv \frac{\omega_k^2(t_j)}{\sqrt{2\omega_k 2''(t_j)}} = \frac{A_k - 2q}{4\sqrt{q}}, \tag{6.35}$$

la ecuación de los modos X_k se escribe

$$\frac{d^2X_k(\eta)}{d\eta^2} + \left(\kappa^2 + \frac{\eta^2}{4}\right) X_k(\eta) = 0 \tag{6.36}$$

que no es más que una ecuación de tipo Schrodinger para una función de onda que sufre un *scattering* en un potencial de tipo parabólico y cuyas soluciones exactas son las funciones cilíndricas parabólicas. Como sabemos, antes de dicho *scattering* en t_j los modos tienen la forma general

$$X_k^j(t) = \frac{\alpha_k^j}{\sqrt{2\omega}} e^{-i\int_0^t \omega dt} + \frac{\beta_k^j}{\sqrt{2\omega}} e^{+i\int_0^t \omega dt} \ , \tag{6.37}$$

donde los coeficientes α_k^j y β_k^json constantes en el intervalo $t_{j-1} < t < t_j$. Después de *chocar* con el potencial tendremos

$$X_k^{j+1}(t) = \frac{\alpha_k^{j+1}}{\sqrt{2\omega}}\, e^{-i\int_0^t \omega dt} + \frac{\beta_k^{j+1}}{\sqrt{2\omega}}\, e^{+i\int_0^t \omega dt}\ , \tag{6.38}$$

donde los coeficientes α_k^{j+1} y β_k^{j+1} son constantes para $t_j < t < t_{j+1}$. Las dos ecuaciones anteriores no son más que las expresiones asintóticas de las ondas entrantes en $t < t_j$ y las salientes en $t > t_j$, después de sufrir un scattering en t_j. Por tanto, las amplitudes salientes, α_k^{j+1}, β_k^{j+1} se pueden expresar en función de las amplitudes entrantes α_k^j, β_k^j con ayuda de las amplitudes de reflexión R_k y transmisión D_k en t_j:

$$\begin{pmatrix} \alpha_k^{j+1} e^{-i\theta_k^j} \\ \beta_k^{j+1} e^{+i\theta_k^j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{D_k} & \frac{R_k^*}{D_k^*} \\ \frac{R_k}{D_k} & \frac{1}{D_k^*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_k^j e^{-i\theta_k^j} \\ \beta_k^j e^{+i\theta_k^j} \end{pmatrix}\ , \tag{6.39}$$

donde $\theta_k^j = \int\limits_0^{t_j} dt\ \omega(t)$ es la fase acumulada en t_j.y

$$R_k = -ie^{-i\phi_k}[1 + e^{2\pi\kappa^2}]^{-1/2} \tag{6.40}$$

$$R_k = e^{-i\phi_k}[1 + e^{-2\pi\kappa^2}]^{-1/2} \tag{6.41}$$

con la condición

$$|R_k|^2 + |D_k|^2 = 1 \tag{6.42}$$

y

$$\varphi_k = Arg\Gamma\Big[\frac{1}{2} + i\kappa^2\Big] + \kappa^2(1 - \ln\kappa^2). \tag{6.43}$$

Simplicando tenemos

$$\begin{pmatrix} \alpha_k^{j+1} \\ \beta_k^{j+1} \end{pmatrix} = \tag{6.44}$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{1+e^{-2\pi\kappa^2}}e^{i\varphi_k} & ie^{-\pi\kappa^2+2i\theta_k^j} \\ -ie^{-\pi 2\kappa^2-2i\theta_k^j} & \sqrt{1+e^{-2\pi\kappa^2}}e^{-i\varphi_k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_k^j \\ \beta_k^j \end{pmatrix}\ ..$$

Puesto que la densidad de número de partículas con momento $\mathbf{k}$ es $n_k^j = |\beta_k^j|^2$, podemos calcular de la ecuación anterior el número de partículas en t_{j+1} como función del número en t_j

$$\begin{aligned} n_k^{j+1} &= e^{-2\pi\kappa^2} + \Big(1 + 2e^{-2\pi\kappa^2}\Big)\, n_k^j \\ &- 2e^{-\pi\kappa^2}\sqrt{1+e^{-2\pi\kappa^2}}\sqrt{n_k^j(1+n_k^j)}\,\sin\theta_{tot}^j\ , \end{aligned} \tag{6.45}$$

donde $\theta_{tot}^j = 2\theta_k^j - \varphi_k + \arg\beta_k^j - \arg\alpha_k^j$. Veámos una serie de conclusiones interesantes que se pueden obtener de la expresión anterior.

- El número de partículas creadas es una función de tipo escalon con el tiempo. El valor del número de ocupación n_k^j es constante entre dos puntos de *scattering* sucesivos t_j y t_{j+1}. El número de partículas cambia de manera instantánea en t_j lo que está de acuerdo con la solución numérica (ver figuras.)

- El lado derecho de la ecuación depende de la constante de acoplo a través de $\kappa^2 \sim g^{-1}$, de forma que

$$n_k \sim e^{-1/g}, \tag{6.46}$$

  estructura que no es analítica en $t = 0$. El número de partículas generadas en la resonacia tipo *broad* no se puede obtener por tanto mediante series perturbativas con respecto al parámetro de acoplo. Claramente, la expresión anterior manifiesta la naturaleza no perturbativa de los efectos resonantes.

- En lo que respecta a la población de los modos nótese que el número de ocupación decae exponencialmente incluso para las bandas de momentos bajos (infrarojas) de formas que los momentos altos no se poblarán.

- La no linearidad de la ecuación para los modos permite la producción de partículas con masa mayor que la del inflatón.

- En el caso de que las fuentes sean periódicas, si los sucesivos *scatterings* ocurren en fase tendremos interferencia constructiva y efectos resonantes. Esto ocurre cuando la fase θ_{tot}^j es un multiplo semientero de π

- Diferentes modelos de inflación darán lugar a diferentes leyes para los modos, de forma que las correspondientes ecuaciones de Hill pueden tener estructuras de bandas diversas.

- Nótese que incluso si determinamos la estructura de bandas completa, la expansión del Universo *movera* cualquier modo dado en una banda a la banda siguiente. Al producirse el *redshift* de los modos, la amplitud del inflatón decrece, de forma, que un modo que empieza en una banda dada, saldrá de la banda después de que sus números de ocupación hayan crecido exponencialmente en varias oscilaciones, y el proceso se repetirá hasta que alcancemos el régimen de resonancia *narrow* que describimos anteriormente.

Agradecimientos

Me gustaría dar las gracias a los profesores Juan García-Bellido y Antonio Gonzalez-Arroyo por el entusiasmo con el que acogieron la gran cantidad de preguntas que les hice a ambos. De igual manera me gustara agradecer a Enric Verdaguer el haberme permitido asistir a su curso de doctorado y aclararme algunos aspectos importantes del tema de este trabajo con sus clases y con las agradables discusiones que mantuve con l. Por último, menciónar a los becarios del departamento, con los que mantuve agradables conversaciones sobre el tema del presente trabajo, y en especial a Alfonso Sastre, que entendió a la perfección mi dilema moral sobre el concepto de *partícula*, y supo darme una respuesta que calmó, en cierta manera, mi *alma*.

Bibliografía

6.6. Varios

[1] L.D.Landau y E.M.Lifshits,*The Classical Theory of Fields*, 1973. Moscú: Nauka. Texto clsico en 2 volumenes. En el segundo hace un tratamiento fantstico de Relatividad General y aborda las soluciones de las ecuaciones de Einstein en torno a la singularidad inicial.

[2] Ya. B. Zel'dovih y I.D. Novikov.*The Structure and Evolution of the Universe* Vol.2 of Relativistic Astrophysics. University of Chicago Press (1983)

[3] V.N. Lukash y A.A. Starobinskii, *Sov.Phys*-JETP (USA) **39**, 742-7

[4] J. García-Bellido, Notas de clase del Curso Gravitacion y Cosmología 2005. Uno de los pocos textos existentes en castellano. Disponibles desde la Autnoma.

Teoría Cuántica de Campos Axiomática

[5] Dewitt B. DeWitt, *The Global Approach to Quantum Field Theory*, 2 Volúmnes, Oxford Science Publications 2003. Uno de los pocos textos de teora cuntica de campos desde un punto de vista axiomtico. Muy profundo.

[6] Bogolobov N.N Bogolubov, A.A.Logunov , I.T.Todorov, *Introduction to Axiomatic Quantum FieldTheory*, W.A.Benjamin Publishers, 1975. Libro rido pero tremendamente profundo. Interesante la discusin de partcula como representacin irreducible del grupo de Lorentz.

[7] Streater R.F. Streater, *Outline of axiomatic relativistic quantum field theory* Rep.Prog.Phys. 1975 **38** 771-846

Teoría Cuántica de Campos en Campos Fuertes

[8] N. D. Birrel y P. C. W. Davies, *Quantum fields in curved space*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics (Cambridge Univ.Press 1982). Libro de texto bsico. Tratamiento sencillo, pero a la vez extenso de los temas tratados.

[9] S. A. Fulling, *Aspects of Quantum Field-Theory in Curved Space-Time*, London Mathematical Society Student Texts **17** (Cambridge Univ. Press 1989). Presenta una teora cuantica de campos axiomtica en espacios curvos. Bastante formal, pero excaso en contenidos.

[10] A. Grib, S. G.Mamaev, S. G. Mostepanenko, *Quantum Effects in Strong External Fields* (Moscow: Atomizdat). En Ruso. En mi opinin el mejor libro sobre este tema. Tems muy interesantes. El problema, el de siempre con los textos rusos, la notacin.

[11] N.N. Bogolubov y D.V. Shirkov, *Introducción to the Theory of Quantized Fields* (New York: Interscience 1959).

[12] B. Allen, *Vacuum states in de Sitter Space*, Phys.Rev. **D32**,3136.

[13] S. A. Fulling, *Nonuniqueness of Canonical Field Quantization in Reimannian Space-Time*, Phys.Rev.**D7**, 2850.

[14] J. Dieckmann, *Cauchy Surfaces in Globally Hyperbolic Spacetimes*, J.Math. Phys, **77**, 219.

[15] Andreas Wipf *Quantum Fields near Black Holes,* hep-th/9801025 . Aunque el texto es fundamentalmente de agujeros negros presenta una buena introduccin de la foliacin 3+1 del espacio tiempo.

[16] L.P.Grishchuk *Vacuum fluctuations and Cosmology,* gr-qc/9603011

[17] L.H: Ford, *Quantum Field Theory in Curved Spacetime* gr-qc/9707062. Texto sencillo con ejemplos claros. Basado fundamentalmente en el libro de Birrel y Davis.

[18] L.A. Gaum y M.A.Vazquez-Mozo *Introductory Lectures on Quantum Field Theory* Véase el Capítulo 8. hep-th/0510040. Notas relativamente recientes de Luis Alvarez-Gaum. En los ltimos captulos trata la produccin de partculas por efecto Schwinger. Interesante.

[19] E.Alvarez *Quantum Gravity: an introduction to some recent results* Rev.Mod.Phys. 61, 561 (1989). Interesante tratamiento de la teoría cuántica de campos en espacios curvos utilizando el *path integral*. Especialmente interesante la deducción de la temperatura de Hawking.

Tecnicismos

[20] *Domain of dependence* R. Geroch, J.Math.Phys.**11**,437-449 (1970). Presenta los teóremas matemáticos que se utilizaron en el texto.

[21] J. Leray *Hyperbolic Differential equations*, lecture notes, Institute for Advanced Study, Princenton (1953)

[22] J. Dimock *Algebras of local observables on a manifold*, Commun.Math.Phys. **77**,219-228.

Introducción a la Cosmología y producción de partículas en inflación

[23] A. D. Linde, *Particle Physics and Inflationary Cosmology*, Harwood Academic, Switzerland (1990). Libro básico. Bueno para empezar a trabajar en temas de inflacin.

[24] A.R. Liddle and D.H. Lyth, *Cosmological inflation a large scale-estructure*, Cambridge Univ. Pr. (2000). Libro sencillo, no excesivamente profundo.

[25] E. W. Kolb and M. S. Turner, *The Early universe,* Redwood City, USA: Addison-Wesley (1990) 547 p. (Frontiers in physics, 69).

[26] S. Blau y A. Guth, *'Inflationary Cosmology'*, en *'300 Years of Gravitation'*, editado por S.Hawking y W.Israel (Cambridge Univ.Press, Cambridge, 1987). Contiene un fantástico artículo sobre ondas gravitacionales.

[27] J.García-Bellido *Notas del curso de gravitación y cosmología*. Disponibles desde la Autónoma.

[28] J.García-Bellido, *Crash course on Inflation given at TH-Division CERN.* Notas introductorias a la teoría de inflación y la producción de partículas. Tratamiento más formal del utilizado aquí. Interesante el tratamiento del squeezing.

[29] Sean A. Carrol *Lecture Notes on General Relativity.* gr-qc/9712019

[30] E.Schrdinger, *Physica*, **6** , 899-912. Artículo en el que por primera vez se vislumbra la posibilidad de creación de partículas.

[31] L. Parker, *The Creation of Particles in an expanding Universe*, Ph. D. Thesis, Harvard University 1966 (disponible en: University Microfilms Library Service, Xerox Corp., Ann Arbor, Michigan, USA)

[32] D.Guilini, E.Joos, C.Kiefer, J.Kupsch, H.D. Zeh *Decoherence and the Appearance of a Classical World in Quantum Theory* Springer, Berlin, 1996. Interesante para iniciarse en el tema de squeezing de ondas gravitacionales.

[33] L.Mandel, E.Wolf *Optical coherence and quantum optics* Cambridge University Press, 1995. Se formula el fenómeno de squeezing. Interesante para ver analogías.

Reheating y Preheating después de inflación

[34] L. Kofman, A. D. Linde and A. A. Starobinsky,*Towards the Theory of Preheating After Inflation* hep-ph/9704452. Artículo básico. Sienta las bases de la teoría de reheating y preheating despues de inflación.

[35] J.H. Traschen y R.H. Brandenberger, *Particle production during out-of-equilibrium phase transitions*

[36] Y. Shtnov, J. Traschen y R.Branderberger, *Universe Reheating after inflation*