FÍSICA DE NEUTRINOS

Javier Rubio Peña †

Índice general

Prefacio

Sin carga, sin apenas masa capaz de atravesar la Tierra entera sin chocar contra nada, el neutrino sigue trayendo de cabeza a los físicos...

Fue uno de los primeros inventos de la nueva fsica que nacía en los años 20: invento en el sentido estricto porque el físico Wolfgang Pauli lo creó para resolver un problema que se daba en las ecuaciones que describían la desintegracin radiactiva. La historia, o el misterio, había nacido unos aõs antes, en 1896, cuando Henri Becquerel primero y luego Pierre y Marie Curie descubrieron que algunas sales de uranio eran capaces de emitir una radiación extraña, energética, capaz de impresionar placas fotogrficas aunque no era luz. Rutherford identificó tres aõs después dos tipos diferentes de radiación, y las llamó Alfa y Beta. Se trataban, por la forma en que se emitían, de partículas con carga eléctrica. Los Curie se dieron cuenta de que la radiación Beta no era sino electrones, que escapaban de los núcleos radiactivos. Las partículas Alfa, sin embargo, eran núcleos de Helio. En 1900, otro físico, Villard, describió un tercer tipo de radiación, la Gamma, emitida por los núcleos del elemento Radio, que era luz altamente energética.

El descubrimiento de la radiactividad se sumaba a una serie de fenómenos que la física estaba encontrando a finales del XIX para los que las teorías clásicas no tenían explicación. Es normal que en los laboratorios se creara una verdadera conmoción, intentando comprender qué sucedía y, sobre todo, cómo podía explicarse. En el caso de la radiactividad, la experimentación fue mostrando que no haba teoría posible, en el marco de la física clásica, que pudiera dar cuenta de lo que estaba pasando.

Y de ahí nacieron los neutrinos. En 1914 se comprueba que los electrones de la radiacin Beta salen en un rango continuo de energías. Sin embargo, los físicos tienen claro que esos electrones se producen en una extraña reacción que convierte a un neutrón en un protón. Según las leyes de conservación de la energa y del momento, esos electrones que escapan del núcleo deberan tener una energía determinada (diferentes velocidades fijas, según las caractersticas del núcleo que los produce). Pero no era así. O bien las leyes de conservacin fallaban o se estaba escapando algo ms que un electrón.

Lo Que Faltaba. La historia es ms compleja, como suele pasar en física, porque realmente todavía no se haba descubierto la existencia del neutrón siquiera, aunque lo cierto es que ese neutrón era demasiado pesado como para que funcionara en la explicación de la radiación Beta. El 4 de diciembre de 1930, Wolfgang Pauli manda una carta a varios fsicos en la que explica que, desesperado por no encontrar otra solucin al misterio de esa radiación, sugiere "la posibilidad de que pudieran existir en el núcleo partículas eléctricamente neutras"que se emitirían a la vez que el electrón. Con ello se aseguraría la conservación de la energía y el momento.

El problema, claro, era que dichas partículas no existían. Jugaba la física entonces a crear seres inexistentes? El átomo, en la imagen de la poca, constaba de una envoltura de electrones y un núcleo pequeño y denso, con casi toda la materia contenida en una diezmilsima parte del volumen atómico. En ese núcleo había los protones y neutrones. Pero, además, se producían esas partículas sorprendentes de Pauli, cuando un neutrón se convertía en un protn. Enrico Fermi, físico italiano que estudió en detalle estos procesos, las denomin "neutrinos", porque tenían que ser menos pesadas que los neutrones, pero igualmente sin carga eléctrica.

No sólo eso: Fermi desarrolla la primera teoría de lo que se llamará "interacción débil", una de las fuerzas que conforma el Universo. Hay además una simetría entre partículas y antipartículas: objetos similares, pero con carga eléctrica y otras propiedades invertidas. La materia, que se haba hecho discontinua en el XIX con la teora atómica, se fragmentaba aún más. Incluso el núcleo era sede de procesos en los que fuerzas antes desconocidas creaban y destruían partículas. La pregunta empezaba a ser acuciante: se empezaba a disponer de una teoría física para dar cuenta de esa discontinuidad de la materia y la energía pero, se podrían llegar a observar esas nuevas partículas?

No fue hasta 1956, tras un cuarto de siglo de búsqueda, cuando se encontraron los neutrinos. Para entonces la física nuclear ha progresado mucho, y va conduciendo a toda una nueva serie de teorías sobre la materia. Usando la radiación que escapa de un reactor nuclear experimental, se consigue detectar al evasivo neutrino. Clyde Cowan y Fred Reines usan como detector un tanque de agua y cloruro de cadmio.

Posteriormente se detectaron mejor y más eficientemente los neutrinos: no sólo los que se producen en los reactores nucleares sino los mucho más abundantes que vienen desde el núcleo del Sol, el más gigantesco reactor termonuclear de fusión que tenemos cerca de nosotros. Uno de los detectores en funcionamiento desde hace más de 20 años, en el centro japonés de la mina de Kamioka Mozumi, es un tanque de 50.000 toneladas de líquido, el denominado Super-Kamiokande. En 1998, los primeros resultados de este experimento mostraron que los neutrinos, las partículas ms abundantes del

Universo, podían oscilar mientras viajan por el espacio. Los nuevos datos confirman esta idea que, además, explica por qué en los experimentos que se han venido haciendo durante los últimos cuarenta años siempre se detectaban menos neutrinos provenientes del Sol de los que teóricamente debían producirse.

Lo que pasa es que todo esto complica las cosas. Igual que al estudiar la radiacin Beta hace casi un siglo el neutrino apareció para explicar un misterio, ahora el misterio de la oscilación entre los tipos conocidos, implica también una contradicción con los modelos estándar de la fsica. Por un lado, esto implica que los neutrinos han de tener masa, algo que parecía deducirse de experimentos anteriores: y aunque sean muy poco "pesados", esto supone, en conjunto, un buen aporte de materia a todo el Universo. La otra implicación es que estas oscilaciones no están bien descritas por la teoría. Los fsicos están a la espera de seguir analizando las escasísimas colisiones de un neutrino contra la materia, para poder comprender en el fondo qué est pasado.

Carta de Fermi anunciando la existencia del neutrino

Dear Radioactive Ladies and Gentlemen,

I have come upon a desperate way out regarding the wrong statistics of the ^{14}N and ^{6}Li nuclei, as well as the continuous β-spectrum, in order to save the "alternation law" statistics and the energy law. To wit, the possibility that there could exist in the nucleus electrically neutral particles, which I shall call "neutrons,"[1] The mass of the neutrons should be of the same order of magnitude as the electron mass and in any case not larger than 0.01 times the proton mass. The continuous β-spectrum would then become understandable from the assumption that in β-decay a neutron is emitted along with the electron, in such a way that the sum of the energies of the neutron and the electron is constant...

For the time being I dare not publish anything about this idea and address myself to you, dear radioactive ones, with the question how it would be with experimental proof of such a neutron, if it were to have the penetrating power equal to about ten times larger than a γ-ray.

I admit that my way out may not seem very probable *a priori* since one would probably have seen the neutrons a long time ago if they exist. But only the one who dares wins, and the seriousness of the situation concerning the continuous β-spectrum is illuminated by my honored predecessor, Mr Debye who recently said to me in Brussels: "Oh, it is best not to think about this at all, as with new taxes..^{o}ne must therefore discuss seriously every road to salvation. Thus, dear radioactive ones, examine and judge. Unfortunately, I cannot appear personally in Tübingen since a ball...in Zürich...makes my presence here indispensible....

Your most humble servant, W. Pauli

[1]En esta carta de 1930 Pauli se refierere a su nueva partícula como ,el "neutron". El neutrón (como lo conocemos hoy en día) fue descubierto por J Chadwick, dos años después de la propuesta de Pauli. En 1934, en un seminario acerca de su reciente teoría del decaimiento beta, le preguntaron si la partícula emitida en el beta-decay nuclear era la misma que el neutrón de Chadwick. Aparentemente, Fermi aclaró que se refería a un tipo diferente de partículas a las que se refierió como neutrinos y que satisfacían el principio de exclusión de Pauli

Capítulo 1

Introducción

1.1. La importancia de los neutrinos

El avance de la física de partículas ha estado conectado a lo largo de la historia con el conocimiento de los neutrinos. Desde el punto de vista moderno la importancia de los neutrinos hoy en día radica en la creencia de que los neutrinos podrían constituir la puerta a nueva física más allá del modelo estándar, si es que existe. Buscamos una teoría fundamental que de lugar a una teoría efectiva a baja energía para interacciones entre partículas. La presencia de una teoría efectiva significa que debería existir una escala de energía a la cual aparezca nueva física. El ejemplo clásico más conocido es la teoría de Fermi de las interacciones débiles: la sección eficaz del scattering $\overline{\nu} + p \longrightarrow e^+ + n$ viola el límite de unitariedad si la energía incidente en el laboratorio es mayor que 1 TeV. Esto significa que la nueva física debe encontrarse en una escala de energía ≤ 1 TeV. La teoría de Weimberg-Salam nos muestra que esta escala es ≈ 100 GeV.

Con la masa del neutrino encontramos una situación muy similar. La masa del neutrino es pequeña comparada con la masa del resto de partículas, al menos en un factor 10^5. Una explicación razonablemente convincente para una masa pequeña para el neutrino es que la pequeñez esta relacionada con una violación pequeña del número leptónico, es decir, la masa del neutrino viene controlada por un término de masa de Majorana en lugar de uno de Dirac, que es el responsable de la masa de las demás partículas.

Si tratamos de describir el acoplo que da lugar al término de masa de Majorana en términos de los campos que aparecen en la teoría estandar necesariamente debemos tener un término de interacción de dimensión mayor que cuatro,

$$\mathcal{L}_{masa} = f\nu\nu\phi\phi \tag{1.1}$$

donde ϕ es el doblete de Higgs. Cuando ϕ adquiere un valor de expectación en el vacío esta interacción da lugar a un término de masa de Majorana que viola el número leptónico. De hecho, en la mayoría de los modelos para la masa del neutrino toman esta forma. En esta expresión la constante de acoplo f tiene dimensiones de $[masa]^{-1}$; esta interacción se considera como un lagrangiano efectivo, igual que el lagrangiano de la teoría de Fermi para las interacciones débiles, donde G_F tenía dimensiones de $[masa]^{-2}$. Si consideramos un scattering $\nu\phi \longrightarrow \nu\phi$ la sección eficaz no decaerá como $[energia]^{-2}$ como se necesita por unitariedad, sino que permanecerá constante. Si requerimos que satisfaga el límite de unitariedad en onda S para energías menores que el valor correspondiente a la escala de Planck ($m_{Pl} = 1{,}22 \times 10^{19} GeV$), debemos tener $f \leq 2\pi/m_{Pl}$, es decir, la masa del neutrino debe ser $\leq 3 \times 10^{-5}$ eV. Si el neutrino tiene una masa mayor que este límite debería existir una nueva interacción por debajo de la escala de Planck. Este es el argumento más conservador.

Supongamos un caso algo más específico. En la mayoría de los modelos de unificación, el número leptónico es violado a escalas de alta energía. Esto lleva a una mayor masa para los neutrinos, lo cual está permitido si se refiere al neutrino right-handed. En tal situación una masa pequeña se induce para el neutrino left-handed mediante un acoplo Yukawa, que conecta los sectores right y left. Esperamos una masa del orden $m_{\approx} m_D^2/M_R$ donde M_R es la masa mayor del neutrino right-handed y m_D la masa de Dirac del acoplo tipo Yukawa, que debería estar en paralelo con las masas de otras partículas cargadas. Esto es lo que se llama el mecanismo de Seesaw y podría explicar porque la masa observada para el neutrino es tan pequeña. En otras palabras, la masa del neutrino indica una escala de masas donde algún tipo de unificación tiene lugar, pero además podría permitirnos explorar la estructura de la unificación. Esta es la principal razón por la que existe un interés tan enorme en la masa del neutrino.

Si el neutrino es de tipo Dirac no tenemos una razón competente por la que la masa del neutrino deba ser tan pequeña. Simplemente ocurre así. No habría nueva física de manera inmediata.

Otro punto a tratar es que el neutrino es la única partícula libre de interacciones más intensas que la débil y deberíamos esperar que la interacción más débil fuera la más aparente en la física de neutrinos. Por ejemplo, la teoría electrodébil estandar predice que el momento magnético del neutrino es extremadamente pequeño, del orden de 10^{-19} magnetones de Bohr o inferior, mientras que el límite superior actual es de tan sólo 10^{-11} magnetones. Si el momento magnético estuviera en algún lugar en el medio, esto significaría inmediatamente una nueva interacción, por ejemplo, una hipotética corriente right-handed actuando.

Desde el punto de vista de la astrofísica y la cosmología los neutrinos tienen también un gran interés. Estos se producen copiosamente en entornos con temperaturas o densidades altas y dominan y controlan la física y la evolución astrofísica del sistema. El primer ejemplo de esto son quizás las estrellas es un estadío más allá de la quema del Helio. El enfriamiento viene dominado por la emisión de neutrinos y controla el tiempo de vida de dichas estrellas. El papel de los neutrinos en nuestro Sol es especialmente relevante. Como veremos, los experimentos de neutrinos solares dieron lugar a importantes consideraciones sobre la posibilidad de oscilaciones de neutrinos, de las cuales no recibimos ningún soporte de los experimentos en el laboratorio.

La Cosmología es otro de los lugares donde la física de neutrinos juega un papel.D espués del famoso paper de Alpher, Bethe, Gamow se reconoció la importancia de los neutrinos y las interacciones débiles en la historia térmica del Universo. En un Universo muy caliente, los neutrinos estaban en equilibrio con el resto de partículas. Estos neutrinos determinan el cociente protón-neutrón en el universo primitivo mediante procesos beta, lo cual determinó la abundancia de Helio, que es sensible a la temperatura cuando el equilibrio β sufre *freeze out*, controlado por la tasa expansión que varía con el número de especies de neutrinos. Esto límita el número de neutrinos ligeros y por tanto, probablemente también el n úmero de familias de partículas.

Capítulo 2

Neutrinos en el modelo estándar

Los neutrinos juegan un papel especial en la teoría electrodebil $SU(2) \times U(1)$. Mientras que los neutrinos left-handed forman parte de los dobletes $SU(2)$

$$L_i = \begin{pmatrix} \nu_{\ell_i} \\ \ell_i \end{pmatrix}_{\mathrm{L}} , \qquad \ell_i = \{e, \mu, \tau\} , \tag{2.1}$$

los right-handed son singletes $SU(2)$. Puesto que la carga electromagnética y la hipercarga $U(1)$ difieren por el valor de la tercera componente de isospin débil

$$Q = T_3 + Y , \tag{2.2}$$

vemos que los neutrinos right-handed $(\nu_{\ell_i})_{\mathrm{R}}$ **no** llevan números cuánticos $SU(2) \times U(1)$. Esto tiene dos implicaciones importantes:

i) Los neutrinos vistos experimentalmente son aquellos producidos por las interacciones débiles. Estos son puramente left-handed.

ii) Puesto que no podemos inferir la existencia de neutrinos right-handed de los procesos débiles la presencia de $(\nu_{\ell_i})_{\mathrm{R}}$ puede ser vista solamente de manera indirecta, lo más probable mediante la existencia de masas para los neutrinos. Sin embargo, la masa de los neutrinos no implica necesariamente la existencia de neutrinos right-handed.

Resumamos brevemente lo que sabemos sobre neutrino left-handed gracias a las interacciones débiles. En la teoría electrodebil estos neutrinos se acoplan al Z

$$\mathcal{L}_{Z\nu\bar{\nu}} = \frac{e}{2\cos\theta_W \sin\theta_W} Z^\mu [J_\mu^{\mathrm{NC}}]_\nu , \tag{2.3}$$

donde

$$[J_\mu^{\rm NC}]_\nu = \sum_i (\bar{\nu}_{\ell_i})_{\rm L}\gamma_\mu(\nu_{\ell_i})_{\rm L} \ . \tag{2.4}$$

Estudios precisos de la forma de la línea del Z permiten determinar el número de especies de neutrinos i, puesto que al aumentar este número aumenta también la anchura total del Z. Cada tipo de neutrino (supuesta su masa$m_{\nu_i} \ll \frac{M_Z}{2}$) contribuye de la misma manera a la anchura del Z.

$$\Gamma(Z \to \nu_{\ell_i}\bar{\nu}_{\ell_i}) = \frac{\sqrt{2}G_F M_Z^3}{24\pi}\rho \ . \tag{2.5}$$

donde G_F es la constante de Fermi determinada en el decay del muón μ y ρ está relacionado con el acoplo axial de los leptones cargados con el Z: $\rho = (2g_A^\ell)^2$. Usando

$$g_A^\ell = -0{,}50102 \pm 0{,}00030 \ , \tag{2.6}$$

que es la media de los resultados obtenidos por las cuatro colaboraciones de LEP y SLD se tiene numericamente

$$\Gamma_\nu \equiv \Gamma(Z \to \nu_{\ell_i}\bar{\nu}_{\ell_i}) = (167{,}06 \pm 0{,}22) \text{ MeV} \ . \tag{2.7}$$

Con esto, el número de especies de neutrinos diferentes, N_ν, puede derivarse de las medidas de precisión de la anchura total del Z y sus anchuras parciales en hadrones y leptones usando la relación obvia

$$\Gamma_{\rm tot} = \Gamma_{\rm had} + 3\Gamma_{\rm lept} + N_\nu\Gamma_\nu \ . \tag{2.8}$$

Del ajuste a la forma de la linea del Z para $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ and $e^+e^- \to$ hadrones en LEP se puede obtener de manera precisa valores para $\Gamma_{\rm tot}$, $\Gamma_{\rm lept}$ y $\Gamma_{\rm had}$:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\rm tot} &= (2{,}4939 \pm 0{,}0024) \text{ GeV} \\ \Gamma_{\rm lept} &= (83{,}90 \pm 0{,}1) \text{ MeV} \\ \Gamma_{\rm had} &= (1{,}7423 \pm 0{,}0023) \text{ GeV} \ . \end{aligned} \tag{2.9}$$

La llamada anchura invisible del Z resulta por tanto ser

$$\Gamma_{\rm inv} = N_\nu\Gamma_\nu = (499{,}9 \pm 3{,}4) \text{ MeV} \tag{2.10}$$

de donde deducimos que el número de especies de neutrinos N_ν es:

$$N_\nu = 2{,}992 \pm 0{,}020 \ . \tag{2.11}$$

lo que refuerza la idea de tres generaciones de leptones.

Figura 2.1: Anchura invisible del Z

Es posible obtener un valor más preciso de N_ν usando otra información derivable de la linea del Z. La sección eficaz para $e^+e^- \to$ hadrones se puede expresar en términos de tres factores:una sección eficaz pico

$$\sigma_o = \frac{12\pi\Gamma_{\rm lept}\Gamma_{\rm had}}{\Gamma_{\rm tot}^2 M_Z^2} \ , \tag{2.12}$$

un factor Breit-Wigner

$$\mathrm{BW}(s) = \frac{s\ \Gamma_{\rm tot}^2}{(s-M_Z^2)^2 + s^2\Gamma_{\rm tot}^2/M_Z^2} \ , \tag{2.13}$$

and una correción bremsstrahlung del estado inicial $(1-\delta_{\rm QED}(s))$, con

$$\sigma_{\rm had} = \sigma_o\ \mathrm{BW}(s)(1-\delta_{\rm QED}(s)) \ . \tag{2.14}$$

El valor de σ_o extraido del análisis de la sección eficaz para el proceso $e^+e^- \to$ hadrones en LEP

$$\sigma_o = (41{,}491 \pm 0{,}058)\ \mathrm{nb} \tag{2.15}$$

se puede combinar con los resultados de LEP para el cociente de anchuras parciales hadronica a leptonica partial del Z

$$R_\ell = \frac{\Gamma_{\rm had}}{\Gamma_{\rm lept}} = 20{,}765 \pm 0{,}026 \tag{2.16}$$

para deducir, con un ligero input teórico, un valor para N_ν.

Tenemos

$$N_\nu = \frac{\Gamma_{\rm inv}}{\Gamma_\nu} = \frac{\Gamma_{\rm lept}}{\Gamma_\nu}\left\{\frac{\Gamma_{\rm tot}}{\Gamma_{\rm lept}} - \frac{\Gamma_{\rm had}}{\Gamma_{\rm lept}} - 3\right\} = \frac{\Gamma_{\rm lept}}{\Gamma_\nu}\left\{\sqrt{\frac{12\pi R_\ell}{\sigma_o M_Z^2}} - R_\ell - 3\right\} \ . \tag{2.17}$$

En el modelo estándar el cociente $\Gamma_{\rm lept}/\Gamma_\nu$ se conoce de manera muy precisa:

$$\left.\frac{\Gamma_\nu}{\Gamma_{\rm lept}}\right|_{\rm SM} = 1{,}991 \pm 0{,}001 \ . \tag{2.18}$$

Usando este valor, junto con la masa del Z determinada experimentalmente,$M_Z = (91{,}1867 \pm 0{,}0021)$ GeV y los valores de σ_o y R_ℓ medidos en LEP, nos da

$$N_\nu = 2{,}994 \pm 0{,}011 \ ; \qquad \Gamma_{\rm inv} = (500{,}1 \pm 1{,}9)\ \mathrm{MeV} \ . \tag{2.19}$$

, valores que son consistentes con los obtenidos anteriormente pero un factor dos más precisos.

El acoplo de los bosones $W^{\pm}$ a las corrientes leptónicas cargadas es análogo al del Z y los neutrinos. De nuevo solo intervienen los neutrinos left-handed. Tenemos

$$\mathcal{L}_{W\ell\nu_\ell} = \frac{e}{\sqrt{2}\sin\theta_W}\{W_+^\mu J_{\mu-}^{\rm lept} + W_-^\mu J_{\mu+}^{\rm lept}\} \ , \tag{2.20}$$

donde

$$J_{\mu-}^{\rm lept} = (J_{\mu+}^{\rm lept})^\dagger = \sum_i \bar{\ell}_{i\rm L}\gamma_\mu \nu_{\ell_i\rm L} \ . \tag{2.21}$$

Los estados de la ecuación anterior no son en general autoestados de masa,puesto que la generación de masa puede mezclar fermiones de la misma carga entre sí. Sin embargo, siempre podemos diagonaliza la matriz de masas de leptones cargados mediante una transformación unitaria:

$$\ell_{\rm L} = U^\ell \tilde{\ell}_{\rm L} \ ; \qquad \ell_{\rm R} = V^\ell \tilde{\ell}_{\rm R} \ . \tag{2.22}$$

Tras esta transformación

$$J_{\mu-}^{\rm lept} = (J_{\mu+}^{\rm lept})^\dagger = \sum_{ij} \overline{\tilde{\ell}_{i\rm L}}\gamma_\mu (U^\ell)^\dagger_{ij}\nu_{\ell_j\rm L} = \sum_i \overline{\tilde{\ell}_{i\rm L}}\gamma_\mu \tilde{\nu}_{\ell_i\rm L} \ , \tag{2.23}$$

donde

$$\tilde{\nu}_{\ell\rm L} = (U^\ell)^\dagger \nu_{\ell L} \ . \tag{2.24}$$

Notese que pueste que U^ℓ es unitaria, la corriente neutra $[J_\mu^{\rm NC}]_\nu$ es idéntica expresada en términos de $\nu_{\ell\rm L}$ o de$\tilde{\nu}_{\ell\rm L}$.

Normalmente, los estados $\tilde{\nu}_{\ell_i\rm L}$ se llaman **autoestados de la interacción débil**, puesto que se producen en los decaimientos de un W^+ asociado con un leptón cargado $\tilde{\ell}_i$ de masa definida. Por sencillez en la notación quitaremos la tilde de $\tilde{\ell}_{i\rm L}$ y de $\tilde{\nu}_{\ell_i\rm L}$ de aquí en adelante entendiendose que los estados llamados ahora $\nu_{\ell_i\rm L}$ son los producidos por las interacciones débiles. De manera similar los leptones cargados ℓ_i son los estados asociados con la matriz de masa diagonal

$$M_\ell = \begin{pmatrix} m_e & & \\ & m_\mu & \\ & & m_\tau \end{pmatrix} \ . \tag{2.25}$$

2.1. Scattering Electrón-Neutrino

El scattering de un neutrino por un electrón, una reacción puramente leptónica, es dificil de observar puesto que la sección eficaz, que es proporcional a la masa del electrón es pequeña ($\sigma \approx 10^{-42} cm^2$). Esta dificultad experimental se compensa mediante limpios tratamientos teóricos, puesto que con leptones puntuales los tratamientos teóricos no se ven afectados por incertidumbres debido a los factores de forma débiles inherentes a los hadrones.

Consideremos las siguiente reacción

$$\nu_e + e^- \longrightarrow \nu_e + e^- \tag{2.26}$$

gobernada por corrientes neutras y cargadas.

La cinemática de una reacción de dos cuerpos a dos cuerpos viene descrita por las varibles de Mandelstam

$$s \equiv (k_1 + p_1)^2 = (k_2 + p_2)^2 \tag{2.27}$$

$$t \equiv (k_1 - k_2)^2 = (p_2 - p_1)^2 \tag{2.28}$$

$$u \equiv (k_1 - p_2)^2 = (k_2 - p_1)^2 \tag{2.29}$$

de las cuales solamente dos son independientes puesto que $s+t+u = \sum_j m_j^2 = 2m_e^2 + 2m_\nu^2$. En el cálculo que nos ocupa tomaremos la masa del neutrino $m_\nu = 0$ y $m_e = m$. En el sistema del centro de masas $\mathbf{k}_1 + \mathbf{p}_1 = \mathbf{0} = \mathbf{k}_2 + \mathbf{p}_2$ y $\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 = k_1 k_2 \cos\theta_{cm}, \sqrt{s}$ es la energía total de las partículas incidentes (o salientes) y $k_1 = k_2 = (s - m^2)/2\sqrt{s}$. El momento transferido lo denotaremos por $q_\mu = (k_1 - k_2)_\mu$, de manera que $t = q^2 = -(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)^2$. También podemos definir $Q^2 = -q^2 > 0$.

En el sistema de laboratorio en el cual el electrón blanco se encuentra en reposo, $\mathbf{p}_1 = \mathbf{0}$, tenemos $s = m^2 + 2mE_\nu$ donde E_ν es la energía del neutrino incidente, y $t = -2m(E_e - m) = -2mT_e$. E_e es la energía del electrón saliente. Otra variable que se usa frecuentemente en el laboratorio es $y \equiv T_e/E_\nu = -t/(s - m^2)$. La sección eficaz dependerá de dos variables independientes que pueden tomarse como s y t, o E_ν e y en el sistema de laboratorio, o $\sqrt{s}$ y θ_{cm} en el sistema del centro de masas. Tenemos

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta_{cm}} = \frac{1}{32\pi s}\left(\frac{1}{2}\sum_{spines}|\mathcal{M}|^2\right), \tag{2.30}$$

$$\frac{d\sigma}{dQ^2} = \frac{1}{16\pi(s - m^2)^2}\left(\frac{1}{2}\sum_{spines}|\mathcal{M}|^2\right), \tag{2.31}$$

donde promediamos sobre los spines del electrón incidente, puesto que es innecesario hacerlo sobre el neutrino left-handed entrante pues tiene sólo una helicidad.

Nótese que para el proceso en cuestión tenemos que considerar el intercambio de un Z^0 y un W, en las variables t y u definidas anteriormente.. Nos referiremos a las amplitudes como $\mathcal{M}_Z$ y $\mathcal{M}_W$. Puesto que ambas contribuyen al proceso su signo relativo es importante y resulta ser negativo. Para ver esto, resulta conveniente volver a la segunda cuantización de los campos que entran en la composición de $\mathcal{M}_Z$ y $\mathcal{M}_W$. Tomemos los productos de operadores creación y destrucción fermiónicos que dan lugar a los estados inicial y final al ser aplicados sobre el vacío. Puesto que esto operadores anticonmutan su orden relativo es importante. A g^2 vienen del producto ordenado temporalmente $T[H(x)H(y)]$. Para determinar su signo relativo consideremos las combinaciones:

$$b_e^\dagger(p_2)b_e(p_1)b_\nu^\dagger(k_2)b_\nu(k_1) \tag{2.32}$$

proviniente de $\bar{\psi}_e(x)\psi_e(x)\bar{\psi}_\nu(y)\psi_\nu(y)$ para $\mathcal{M}_Z$ y

$$b_e^\dagger(p_2)b_\nu(k_1)b_\nu^\dagger(k_2)b_e(p_1) \tag{2.33}$$

debido al término $\bar{\psi}_e(x)\psi_\nu(x)\bar{\psi}_\nu(y)\psi_e(y)$ para $\mathcal{M}_W$, y donde $b^\dagger(b)$ son los operadores creación (destrucción) fermiónicos. En $\mathcal{M}_Z$ usando las relaciones de anticonmutación tenemos

$$b_e^\dagger b_e b_\nu^\dagger b_\nu = +b_e^\dagger b_\nu^\dagger b_\nu b_e = -b_e^\dagger b_\nu b_\nu^\dagger b_e. \tag{2.34}$$

El miembro del extremo izquierdo (derecho) de la ecuación anterior esta relacionado con $\mathcal{M}_Z(\mathcal{M}_W)$, de manera que el signo relativo entre ambas amplitudes es claramente -1.

Para el diagrama con intercambio de un Z tenemos

$$\mathcal{M}_Z = i\left(\frac{-ig}{2\sqrt{2}\cos\theta_W}^2 \bar{u}(k_2)\gamma^\mu(1-\gamma^5)u_{k_1}\frac{-i(g_{\mu\nu})-q_\mu q_\nu/M_Z^2}{q^2-M_Z^2}\bar{u}(p_2)\gamma^\nu(g_V^e-g_A^e\gamma_5)u(p_1)\right) \tag{2.35}$$

donde $g_V^e = -\frac{1}{2}+2\sin^2\theta_W$ y $g_A^e = -\frac{1}{2}$. El producto $q_\mu\bar{u}(k_2)\gamma^\mu(1-\gamma^5)u(k_1)$ se anula para neutrinos massless dejando sólo el $g_{\mu\nu}$ al propagador del Z^0. Con $G_F/\sqrt{2} = g^2/8M_Z^2\cos^2\theta_W$ tenemos

$$\mathcal{M}_Z = \frac{G_F}{\sqrt{2}}\frac{\bar{u}(k_2)\gamma^\mu(1-\gamma^5)u_{k_1}\bar{u}(p_2)\gamma^\mu(g_V^e-g_A^e\gamma_5)u(p_1)}{1+Q^2/M_Z^2} \tag{2.36}$$

Calculemos a modo de ilustración $|\mathcal{M}_Z|^2$

$$\sum_{spines}|\mathcal{M}_Z|^2 = \frac{G_F^2}{2(1+Q^2/M_Z^2)^2}(A_{\mu\rho}B^{\mu\rho}) \tag{2.37}$$

con

$$A_{\mu\rho} = \sum_{spines} \bar{u}(p_2)\gamma_\mu(g_V^e - g_A^e\gamma_5)u(p_1)\bar{u}(p_1)\gamma_\rho(g_V^e - g_A^e\gamma_5)u(p_2) \tag{2.38}$$

y

$$B^{\mu\rho} = \sum_{spines} \bar{u}(k_2)\gamma^\mu(1-\gamma_5)u(k_1)\bar{u}(k_1)\gamma^\rho(1-\gamma_5)u(k_2) \tag{2.39}$$

Calculando las trazas y usando la relación

$$Tr[\gamma^\lambda\gamma^\mu\gamma^\sigma\gamma^\rho(a-b\gamma_5)]\times Tr[\gamma_\alpha\gamma_\mu\gamma_\beta\gamma_\rho(c-d\gamma_5)] = 32[ac(\delta_\alpha^\lambda\delta_\beta^\sigma+\delta_\alpha^\sigma\delta_\beta^\lambda)+bd(\delta_\alpha^\sigma\delta_\beta^\lambda)], \tag{2.40}$$

tenemos

$$A_{\mu\rho}B^{\mu\rho} = 64[(g_V^e+g_A^e)^2(k_1\cdot p_1)(k_2\cdot p_2)+(g_V^e-g_A^e)^2(k_1\cdot p_2)(k_2\cdot p_1)+[(g_A^e)^2-(g_V^e)^2]m^2(k_1\cdot k_2)] \tag{2.41}$$

La expresión para la amplitud $\mathcal{M}_W$ viene dada por

$$\mathcal{M}_W = \frac{G_F}{\sqrt{2}}\frac{\bar{u}(k_2)\gamma^\mu(1-\gamma_5)u(p_1)\bar{u}(p_2)\gamma_\mu(1-\gamma_5)u(k_1)}{1-\frac{u}{M_W^2}} \tag{2.42}$$

o equivalentemente

$$\mathcal{M}_W = -\frac{G_F}{\sqrt{2}}\frac{\bar{u}(k_2)\gamma^\mu(1-\gamma_5)u(k_1)\bar{u}(p_2)\gamma_\mu(1-\gamma_5)u(p_1)}{1-\frac{u}{M_W^2}} \tag{2.43}$$

después de un reordenamiento Fierz.

Para energías del neutrino bajas podemos despreciar $-t/\mathcal{M}_Z^2$ y $-u/\mathcal{M}_W^2$ en los propagadores. El signo menos relativo se puede poner convencionalmente dentro de $\mathcal{M}_Z$, de manera que la amplitud total de la reacción es $\mathcal{M} = \mathcal{M}_W - \mathcal{M}_Z$, o equivalentemente

$$\mathcal{M} = \frac{-G_F}{\sqrt{2}}\bar{u}(k_2)\gamma^\mu(1-\gamma_5)u(k_1)\bar{u}(p_2)\gamma_\mu(g_V' - g_A'\gamma_5)u(p_1), \tag{2.44}$$

donde $g_V' = 1 + g_V^e = \frac{1}{2} + 2\sin^2\theta_W$ y $g_A' = 1 + g_A^e = +\frac{1}{2}$. Con esto, la sección eficaz diferencial resulta ser

$$\frac{d\sigma(\nu_e + e^- \longrightarrow \nu_e + e^-)}{dy} = \frac{G_F^2 m E_\nu}{2\pi}[(g_V^e+g_A^e+2)^2+(g_V^e-g_A^e)^2(1-y)^2] \tag{2.45}$$

con lo que

$$\sigma(\nu_e + e^- \longrightarrow \nu_e + e^-) = \frac{G_F^2 m E_\nu}{2\pi}\Big[(g_V^e + g_A^e + 2)^2 + \frac{1}{3}(g_V^e - g_A^e)^2\Big] \tag{2.46}$$

Usando el valor $G_F^2 = 5{,}29 \times 10^{-38}\ cm^2/GeV^2$, obtenemos

$$\sigma(\nu_e + e^- \longrightarrow \nu_e + e^-) = 0{,}9 \times 10^{-43} \left(\frac{E_\nu}{10MeV}\right) cm^2, \tag{2.47}$$

sección eficaz medida por la colaboración Maryland-LosAlamos-Irvine en los Álamos para energías del neutrino hasta 50 MeV. La sección eficaz total medida fue

$$\langle\sigma\rangle = (3{,}01 \pm 0{,}46(estat) \pm 0{,}38(sist)) \times 10^{-43} cm^2 \tag{2.48}$$

para un neutrino con energía 31,7 MeV, en un acuerdo excelente con la predicción del modelo estandar [1].

2.2. Scattering Electrón- núcleo

[1] Nótese que en el cálculo anterior hemos despreciado un término proporcional a m_e/E_ν pues nos centrabamos en energías $E_\nu \gg m_e$. En caso de no despreciar este término tendríamos

$$\frac{d\sigma(\nu_e + e^- \longrightarrow \nu_e + e^-)}{dy} = \frac{G_F^2 m_e E_\nu}{2\pi}\left((g_V^e + g_A^e + 2)^2 + (g_V^e - g_A^e)^2(1-y)^2 - (g_V^e + g_A^e + 2)(g_V - g_A)\frac{y m_e}{E_\nu}\right) \tag{2.49}$$

Capítulo 3

Neutrinos masivos

3.1. Introducción

Los leptones cargados y los quarks son partículas de Dirac como consecuencia de la conservación de la carga eléctrica, es decir, obedecen una ecuación de Dirac y vienen descritos por espinores complejos de cuatro componentes. Como sabemos, el modelo estándar *predice* neutrinos no masivos, lo cual los hace bastante diferentes de otros fermiones como los leptones cargados o los quarks. Si los neutrinos no tienen masa podrían describirse alternativamente por dos espinores complejos de dos componentes, llamados espinores de Weyl. El modelo estándar ha resultado ser tremendamente satisfactorio al explicar los procesos a baja energía que involucran interacciones de neutrinos mediadas por corrientes cargadas y neutras. Sin embargo la situación a cambiado drasticamente debido a diversos experimentos que describiremos más adelante y que nos muestran que los neutrinos son realmente masivos, no pudiendo por tanto ser descritos por espinores de Weyl. Es tentador pensar que los neutrinos serían como cualquier otro fermión, y que deberían ser por tanto espinores de Dirac. Sin embargo, existe otra diferencia fundamental entre los neutrinos y otros fermiones fundamentales y es que estos no llevan carga eléctrica, lo cual abré la posibilidad teórica de que los espinores pudieran ser también de Majorana.

En este capítulo haremos un resumen de las evidencias y motivaciones teóricas que durante largo tiempo han motivado una masa para el neutrino distinta de cero anteriores al descubrimiento de la masa del mismo. Resumiremos las diversas evidencias experimentales de este hecho y comentaremos las posibles nuevas direcciones en este aspecto.

3.2. Motivaciones teóricas para la masa del neutrino

Todo estudiante de física debería haberse preguntado alguna vez: por qué no introducir un neutrino right-handed en el contenido fermiónico fundamental como uno hace con el resto de fermiones? Si hacemos esto, el ν_R podría aparearse con el ν_L mediante el mecanismo de Higgs para producir un término de masa para los neutrinos. Veamos esto con un poco más de detalle. Añadamos campos neutros right-handed N_{lR} correspondientes a cada leptón cargado l. Como los otros campos right-handed se asume que son singletes de $SU(2)_L$. La definición de la carga eléctrica

$$Q = I_{3L} + \frac{Y}{2} \tag{3.1}$$

implica que deben tener $Y = 0$. Todo esto puede resumirse como

$$N_{lR} : (1, 0). \tag{3.2}$$

Los campos N_{lR} son por tanto singletes del grupo gauge completo. En otras palabras, no tienen interacción con los bosones gauge. Sin embargo afectan el modelo de manera no trivial debido a otras propiedades. Lo primero de lo que nos damos cuenta es que la presencia de estos campos right-handed implica nuevas interacciones invariantes gauge en el sector de Yukawa.

$$-\mathcal{L}'_Y = \sum_{l,l'} f_{ll'} \bar{\psi}_{lL} \hat{\phi} N_{l'R} + h.c, \tag{3.3}$$

donde $f_{ll'}$ son las nuevas consntantes de acoplo, y ψ_{lL} es el doblete leptónico. El multiplete de Higgs ϕ es el mismo que aparece en el modelo estándar. Con un vev $v/\sqrt{2}$ esto da lugar a los siguientes términos de masa

$$-\mathcal{L}_{masa} = \sum_{ll'} f_{ll'} \frac{v}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_{lL} N_{l'R} + h.c. \tag{3.4}$$

para los neutrinos si identificamos los campos N_{lR} como la componente right-handed de los neutrinos $N_{lR} = \nu_{lR}$. En el espacio de flavour esto corresponde a una matriz de elementos

$$M_{ll'} = \frac{v}{\sqrt{2}} f_{ll'} \tag{3.5}$$

que recibe el nombre de matriz de masas. En general esta matriz será no diagonal, de manera que los campos ν_{lL},N_{lR} no corresponden con las proyecciones quirales de los campos fermiónicos físicos.

Para obtener los campos físicosse deben encontrar los autovectores de la matriz en cuestión, lo cual puede hacerse en general mediante una transformación unitaria U,de manera que los nuevos estados vengan definidos por

$$\nu_{lL} \equiv \sum_{\alpha} U_{l\alpha}\nu_{\alpha L} \tag{3.6}$$

$$N_{lR} \equiv \sum_{\alpha} V_{l\alpha}\nu_{\alpha R} \tag{3.7}$$

y el término de masa pueda reescribirse como

$$-\mathcal{L}_{masa} = \sum_{\alpha} \bar{\nu}_{\alpha L} m_{\alpha} \nu_{\alpha R} + h.c. \tag{3.8}$$

donde m_α es el elemento diagonal α-esimo de la matriz m. Esta ecuación muestra que los campos ν_α son campos con masas definidas m_α y son por tanto partículas físicas.

Claramente no hay nada fundamental por lo que no podamos hacer esto. Dicho de otra manera, no introducimos ν_R en el modelo estándar porque queremos predecir neutrinos no masivos en el modelo estándar. Todo está preparado para producir ese resultado.

En contraste con esto tenemos la cuestión de la nulidad de masa del fotón, el cual es massless debido a la simetría gauge conservada que gobierna la dinámica de la interacción electromagnética. En cambio para los neutrinos no vemos tal principio de simetría en el modelo estándar, lo cual indica que los neutrinos no masivos son insatisfactorios desde el punto de vista teórico.

En segundo lugar, a los físicos de partículas, o al menos a muchos de ellos, se les ha metido entre ceja y ceja la idea de la interacción de las interacciones fundamentales, lo cual lleva a motivaciones extra para tener neutrinos masivos puesto que muchos modelos unificados predicen neutrino masivos en algún nivel. Por ejemplo supersimetría se enmarca en este tipo de modelos prediciendo neutrinos masivos, a menos que se imponga una simetría en el número leptónico.

La cuestión teórica no es sólo como extender el modelo estándar para encontrar modelos con neutrinos masivos, sino entender como la pequeñez de las masas de los neutrinos comparadas con las masas de los fermiones cargados, aunque, por supuesto, incluso las masas de los fermiones cargados varían ampliamente, por ejemplo, la masa del quark top es unos cinco ordenes de magnitud mayor que la del electrón, y el modelo estándar es incapaz de explicar eso. Por qué debería entonces extrañarnos un ν_e cinco veces más ligero que el electrón?

La cuestión aquí radica en que los dos ejemplos de cocientes de masas nombrados en el parrafo anterior abordan dos cuestiones totalemente diferentes. El cociente m_t/m_e puede entenderse solamente mediante el correcto entendimiento de la separación entre las tres familias de fermiones. En el caso de los neutrinos el tema continua siendo un enigma incluso dentro de la misma familia. La masa del electrón es del orden de 0,511 MeV, mientras que las masas actuales para los quarks up-down están en el rango $5 - 10$ MeV, de manera que todos ellos están dentro del mismo ordén de magnitud, mientras que la masa del neutrino electrónico es cinco veces más ligera. Lo mismo ocurre con la segunda generación donde las masas m_μ, m_s, m_c se adecuan en un orden de magnitud, frente a los tres de diferencia entre el ν_μ y m_μ. Toda teoría del neutrino que se precie debería ser capaz de arrojar algo de luz sobre el motivo de esta pequeña masa.

Otro tema interesante es si la masa del neutrino es de tipo Dirac o de tipo Majorana. Los neutrinos podrían ser partículas de Dirac, como el resto de fermiones, pero existe también la posibilidad de que los neutrinos sean a su vez su propia antipartícula puesto que no portan carga eléctrica. Discutiremos esto en detalle más adelante.

3.3. Cuestiones relacionadas con la masa del neutrino

Quizá el aspecto más interesante relacionado con la masa del neutrino sea el fenómeno de mezcla. El neutrino electrónico por ejemplo se define como el objeto que se acopla al electrón mediante las corrientes cargadas débiles, y de igual manera el tauónico y el muónico. Si el neutrino adquiere masa no hay razón fundamental por la que estos objetos deban describir estados de partículas físicas con un autovalor de masa determinado. En general, estos autoestados de la interacción ν_e, ν_μ, ν_τ serán una superposición de los autoestados de masa:

$$\nu_{lL} = \sum_\alpha U_{l\alpha}\nu_{\alpha L}. \tag{3.9}$$

Dicho de otra manera, los autoestados de masa son mezclas de los de flavor de manera que dado un neutrino físico pueda acoplarse a más de un leptón cargado via corrientes cargadas, de igual manera que ocurre con lo quarks. La matriz de mezcla se llama U_{PMNS} debido a Pontecorvo, Maki, Nakagawa y Sakata.

En presencia de estas mezclas, los números leptónicos generacionales no pueden permanecer como simetrías globales válidas. A diferencia de las predicciones del modelo estándar deberíamos observar procesos que violen dichos

números, incluso en aquellos procesos donde no intervengan los neutrinos en los estados inicial y final.

Otra consecuencia del neutrino mixing es que la matriz U puede ser en general compleja, dando lugar, al igual que ocurre con la matriz V_{CKM} al fenómeno de violación de CP en el sector leptónico, y ya que hablamos de simetría comentemos que si los neutrinos son partículas de Majorana no debe haber ningún número cuántico glogal o local. Por tanto, la simetría de número leptónico debe estar rota. Para ser más precisos deberíamos decir que la simetría que debería estar rota es la $B-L$, que es la única simetría verdadera global del modelo estándar en presencia de neutrino mixing. Deberíamos ver por tanto procesos que violen $B-L$. Uno de tales procesos es el neutrinoless double beta decay.

Podríamos preguntarnos se la simetría $B-L$ se viola espontaneamente. De ser así el teorema de Goldstone asegura la existencia de una particula pseudoescalar sin masa. Puesto que la ruptura de $B-L$ está relacionada con las masas de Majorana para los neutrinos, el bosón de Goldstone se llama Majoron.

Por último está el tema de la estabilidad de los neutrinos. Si tienen masa todos ellos salvo el más ligero deberían ser inestables puesto que en general no habrá una simetría para prevenir dicho decaimiento. El decamiento del neutrino más pesado puede afectar de manera profunda los escenarios cosmológicos.

Capítulo 4

Masas de Dirac y Majorana

4.1. Representaciones espinoriales del grupo de Lorentz

Para entender como se generan las masas de Dirac y de Majorana es útil revisar algunas de las propiedades de las representaciones espinoriales del grupo de Lorentz. Resulta que existen dos representaciones espinoriales inequivalentes. Bajo una transformación Lorentz, un campo vectorial V^μ se transforma de la forma bien conocida

$$V^\mu \to V'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu V^\nu \ , \tag{4.1}$$

donde las matrices 4−dimensionales de la representación Λ las condiciones de pseudo-ortogonalidad

$$\eta_{\mu\nu} = \Lambda^\alpha{}_\mu \eta_{\alpha\beta} \Lambda^\beta{}_\nu \ , \tag{4.2}$$

involucrando el tensor métrico

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \ . \tag{4.3}$$

Además de las representaciones vector, el grupo de Lorentz posee dos representaciones espinoriales inequivalentes. Los correspondientes espinores bidimensionales de Weyl denotados convencionalmente por ξ_a y $\dot{\xi}_a$ conocidos como espinores punteados y no punteados. Bajo transformaciones de Lorentz se transforman como

$$\xi_a \to \xi'_a = M_a{}^b \xi_b \tag{4.4}$$

$$\dot{\xi}_a \to \dot{\xi}'_a = M_a^{*b} \dot{\xi}_b \ . \tag{4.5}$$

.

Las matrices 2×2 M and M^*, con det $M =$ det $M^* = 1$, proporcionan representaciones inequivalentes de $SL(2, C)$. Obviamente, de lo anterior se sigue que $\dot{\xi} \sim \xi^*$.

Se puede establecer una relación entre las matrices 2×2 M y las matrices 4×4 Λ, puesto que el campo vector V^μ se transforma como $V \sim \xi \otimes \dot{\xi}$. Para esto, es útil definir un conjunto de cuatro matrices $\sigma^\mu \equiv (1, \vec{\sigma})$, con $\vec{\sigma}$ las matrices de Pauli usuales. La matriz 2×2

$$V = \sigma^\mu \eta_{\mu\nu} V^\nu \equiv \sigma^\mu V_\mu \tag{4.6}$$

se transforma bajo una transformación Lorentz como

$$V \to V' = M V M^\dagger = \sigma^\mu V'_\mu \ . \tag{4.7}$$

Por tanto de la transformación Lorentz se sigue

$$\sigma^\mu_{ac} \Lambda_\mu{}^\nu = M_a{}^b \sigma^\nu_{bd} M^{*d}_c \ . \tag{4.8}$$

Puesto que det $M = 1$, el analogo del producto escalar de vectores $V^\mu \eta_{\mu\nu} V^\nu \equiv V^\mu V_\mu$, para los espinores ξ y $\dot{\xi}$ da lugar a los siguientes escalares Lorentz:

$$\xi_a \epsilon^{ab} \xi_b \equiv \xi_a \xi^b \ ; \qquad \dot{\xi}_a \epsilon^{ab} \dot{\xi}_b \equiv \dot{\xi}_a \dot{\xi}^b \tag{4.9}$$

donde $\epsilon^{ab} = -\epsilon^{ba}$ y $\epsilon^{12} = 1$. De manera similar, al igual que la contracción de un tensor métrico covariante y uno contravariante da la identidad $[\eta_{\mu\rho}\eta^{\rho\nu} = \delta^\nu_\mu]$, se puede definir matrices-ϵ antisimétricas $2\times$, ϵ_{ab}, que obedencen

$$\epsilon_{ac} \epsilon^{cb} = \delta^b_a \ . \tag{4.10}$$

Se sigue que $\epsilon_{12} = -1$.

El espinor de Dirac usual de 4 componentes ψ está formado de un espinor de Weyl punteado y uno no punteado:

$$\psi = \begin{pmatrix} \xi_a \\ \dot{\chi}^a \end{pmatrix} \tag{4.11}$$

En esta base, llamada de Weyl las matrices γ^μ, que obedecen el algebra de Clifford $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = -2\eta^{\mu\nu}$, tienen la forma

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \ . \tag{4.12}$$

Aquí $\bar{\sigma}^\mu = (1, -\vec{\sigma})$, tal que en esta base

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ ; \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \tag{4.13}$$

y

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \tag{4.14}$$

De lo anterior se sigue que ξ_a y $\dot{\chi}^a$ son **proyecciones quirales** de ψ:

$$\psi_{\rm L} = \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi \;=\; \begin{pmatrix} \xi_a \\ 0 \end{pmatrix} \;;\quad \overline{\psi_{\rm L}} = \bar{\psi}\frac{1}{2}(1+\gamma_5) = (0 \;\; \xi_a^*) \tag{4.15}$$

$$\psi_{\rm R} = \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\chi}^a \end{pmatrix} \;;\quad \overline{\psi_{\rm R}} = \bar{\psi}\frac{1}{2}(1-\gamma_5) = (\dot{\chi}^{a*} \;\; 0) \;. \tag{4.16}$$

Usando estas ecuaciones, es fácil ver que el término de masa de Dirac conecta ξ con $\dot{\chi}$. Especificamente, se tiene

$$\mathcal{L}_{\rm Dirac} = -m_D(\overline{\psi_{\rm L}}\psi_{\rm R} + \overline{\psi_{\rm R}}\psi_{\rm L}) = -m_D(\xi_a^*\dot{\chi}^a + \dot{\chi}^{a*}\xi_a) \;. \tag{4.17}$$

Nótese, sin embargo, que los espinores punteados están relacionados con el complejo conjugado de un espinor no punteado. Eligiendo una convención de fases en la que

$$\xi_a^* = \dot{\xi}_a \;;\qquad \dot{\chi}_a^* = \chi_a, \tag{4.18}$$

podremos escribir el término de masa de Dirac simplemente como

$$\mathcal{L}_{\rm Dirac} = -m_D(\dot{\xi}_a\dot{\chi}^a + \chi^a\xi_a) \;. \tag{4.19}$$

que es obviamente invariante Lorentz. Sin embargo, la invarianza Lorentz no requiere tener dos espinores de Weyl distintos para construir un término de masa. Las masas de Majorana se basan basicamente en esta opción más simple.

Podemos definir un espinor Majorana con cuatro componentes en términos del espinor de Weyl ξ y su complejo conjugado $\dot{\xi}$:

$$\psi_M = \begin{pmatrix} \xi_a \\ \dot{\xi}^a \end{pmatrix} . \tag{4.20}$$

Puesto que $\dot{\xi}^a = \xi^{a*}$, ψ_M tiene efectivamente una única proyección de helicidad independiente. Podemos elegir que esta proyección sea, digamos, $(\psi_M)_{\rm L}$:

$$(\psi_M)_{\rm L} = \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi_M = \begin{pmatrix} \xi_a \\ 0 \end{pmatrix} \;;\quad \overline{(\psi_M)_{\rm L}} = \overline{\psi_M}\frac{1}{2}(1+\gamma_5) = (0 \;\; \dot{\xi}_a) \;. \tag{4.21}$$

Es posible construir $(\psi_M)_{\rm R}$ usando la matriz de conjugación de carga $\tilde{C}$. En la base de Weyl $\tilde{C}$ viene dada por

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} \epsilon_{ab} & 0 \\ 0 & \epsilon^{ab} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} . \tag{4.22}$$

Claramente

$$
\begin{aligned}
(\psi_M)_{\mathrm{R}} &= \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\xi}^a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \epsilon^{ab}\dot{\xi}_b \end{pmatrix} = \tilde{C}\overline{(\psi_M)_{\mathrm{L}}}^T \\
\overline{(\psi_M)_{\mathrm{R}}} &= (\xi^a \ 0) = (\epsilon^{ab}\xi_b \ 0) = (\xi_b\epsilon_{ba} \ 0) = (\psi_M)_{\mathrm{L}}^T\tilde{C} \ . \qquad (4.23)
\end{aligned}
$$

Es decir, $(\psi_M)_{\mathrm{R}}$ es el conjugado de carga de $(\psi_M)_{\mathrm{L}}$:

$$[(\psi_M)_{\mathrm{L}}]^c = (\psi_M)_{\mathrm{R}} \ . \qquad (4.24)$$

De la ecuación anterior se sigue que el espinor de Majorana ψ_M satisface una ligadura: es **auto-conjugado**:

$$\psi_M = \begin{pmatrix} \xi_a \\ \dot{\xi}^a \end{pmatrix} = (\psi_M)_{\mathrm{L}} + (\psi_M)_{\mathrm{R}} = (\psi_M)_{\mathrm{L}} + [(\psi_M)_{\mathrm{L}}]^c \ . \qquad (4.25)$$

Por tanto,

$$\psi_M = [\psi_M]^c \ . \qquad (4.26)$$

El término de masa de Majorana

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Majorana}} = -\frac{1}{2}m_M\overline{\psi_M}\psi_M \qquad (4.27)$$

conlleva un producto de ξ consigo mismo y de $\dot{\xi}$ consigo mismo

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Majorana}} = -\frac{1}{2}m_M\left(\overline{(\psi_M)_{\mathrm{L}}}(\psi_M)_{\mathrm{R}} + \overline{(\psi_M)_{\mathrm{R}}}(\psi_M)_{\mathrm{L}}\right) = -\frac{1}{2}m_M(\dot{\xi}_a\dot{\xi}^a + \xi^a\xi_a) \ . \qquad (4.28)$$

La ecuación anterior se puede escribir puramente en términos de $(\psi_M)_{\mathrm{L}}$ usando la matriz conjugación de carga $\tilde{C}$. También tenemos

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Majorana}} = -\frac{1}{2}m_M\left(\overline{(\psi_M)_{\mathrm{L}}}\tilde{C}\overline{(\psi_M)_{\mathrm{L}}}^{\ T} + (\psi_M)_{\mathrm{L}}^T\tilde{C}(\psi_M)_{\mathrm{L}}\right) \ . \qquad (4.29)$$

De igual modo también es posible escribir este término de masa como una función de $(\psi_M)_{\mathrm{R}}$. Se tiene

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Majorana}} = -\frac{1}{2}\left((\psi_M)_{\mathrm{R}}^T\tilde{C}(\psi_M)_{\mathrm{R}} + \overline{(\psi_M)_{\mathrm{R}}}\tilde{C}\overline{(\psi_M)_{\mathrm{R}}}^{\ T}\right) \ . \qquad (4.30)$$

4.2. Los neutrinos: Dirac o Majorana

Después de tanta disquisición teórica vayamos a entender la física en el caso de los neutrinos. Consideremos un campo de Dirac, como por ejemplo el

electrón, descrito por cuatro espinores básicos. Dos de ellos se pueden tomar como los estados de helicidad left y right del electrón e_L y e_R y para los otros dos, los dos estados de helicidad $\bar{e}_L$ y $\bar{e}_R$ de la antipartícula, el positrón.

Supongamos ahora que en nuestro sistema de referencia encontramos un electrón moviéndose en la dirección z. La componente z de su espín es $-\frac{1}{2}$. Por tanto, espín y momento son antiparalelos, de manera que tenemos un electrón left-handed e_L. Que vería otro observador moviéndose más rápido que el electrón en la dirección z? Para él el electrón se mueve en la dirección de las z negativas, que es también la dirección del espín. Por tanto, ve un objeto right-handed. Tenemos dos objetos right-handed en nuestro repertorio e_R y $\bar{e}_R$. Podríamos preguntarnos cual de estos dos objetos esta viendo el observador.

La respuesta en este caso es fácil. El estado $\bar{e}_R$ tiene carga eléctrica opuesta al estado e_L. Como sabemos, la carga eléctrica es una cantidad invariante Lorentz. Mediante un boost a un sistema de referencia distinto no podemos ver una carga distinta en una partícula. Lo que vemos como e_L en un sistema de referencia no podemos verlo como $\bar{e}_R$ en otro sistema. El observador en movimiento ve por tanto e_R.

Repitamos este mismo experimento mental en el caso del neutrino. Supongamos un neutrino ν_L en nuestro referencial. Si el neutrino es masivo, su velocidad debe ser menor que la de la luz, de manera que podemos imaginar un observador que corre más rápido. Al igual que antes, este observador verá un objeto right-handed. Que objeto es este? Recordemos que sólo tenemos evidencia experimental del estado left-handed del neutrino y del right-handed del antineutrino. Por tanto, tenemos los estados ν_L y ν_R a nuestra disposición. Si queremos reproducir la situación del electrón debemos postular dos estados adicionales ν_R y $\bar{\nu}_L$ a añadir a nuestra colección. El observador acelerado verá en este caso un ν_R cuando nosotros veamos un ν_L, al igual que ocurría con el electrón. En este caso el neutrino será una partícula de Dirac con cuatro grados de libertad complejos.

Pero, que pasa si no queremos postular esto dos nuevos estados espinoriales? Después de todo, el observador en movimiento ve un objeto right-handed y tenemos ya un objeto right-handed, $\bar{\nu}_R$. Podría el observador en cuestión ver dicho estado? A diferencia de los electrones ν_L y $\bar{\nu}_R$ tienen la misma carga electrica, cero, de manera que no hay nada incorrecto en el tema. El único número cuántico definido en el contexto del modelo estándar y que diferencia ν_L y $\bar{\nu}_R$ es el número leptónico L. El número leptonico es una simetría global y a diferencia del $U(1)$ electromagnético no gobierna la dinámica. Más bien es una consecuencia de la dinámica y el contenido de campos del modelo estandad. No hay nada sagrado en la simetría del número leptónico. Si se rompe, no hay razón por la que ν_L y ν_R no pudieran ser las contrapartes boosteadas

la una de la otra. Estos dos espinores constituyen por tanto, las proyecciones left y right-handed del mismo campo fermiónico. Puesto que se necesitan dos espinores base, estaremos hablando de un campo masivo fermiónico de dos componentes. Esto lo propuso originalmente Majorana en 1937, de hay que se llame campo de Majorana.

Pero, como es posible boostear una cierta partícula y obtener su artipartícula? La cuestión de nuevo es que las palabras partícula y antipartícula se definen de acuerdo a algún número cuántico conservado. Si no existe tal número para distinguir entre ellos, la partícula es idéntica a su antipartícula. Un neutrino de Majorana es por tanto su propia antipartícula.

La diferencia entre una partícula de Majorana y una de Weyl debe entenderse correctamente. Ambos son espinores de dos componentes, pero por dos razones completamente diferentes. Una partícula de Weyl es massless. Por tanto, ν_L se movería a la velocidad de luz. Ningún observador puede superarlo y verlo como un objeto right-handed. De manera que no se necesita un contratérmino del ν_L para obtener un marco covariante Lorentz. Lo mismo ocurre con $\bar{\nu}_R$. Pero pueden tener diferentes números leptónicos, u otros números cuánticos, que distinguen los unos de los otros.

Un neutrino Majorana, a diferencia, tiene masa. Pero el ν es el mismo que el $\bar{\nu}$, de manera que la contraparte de ν_L se puede llamar ν_R o $\bar{nu}_R$. Por tanto, basta con ν_L y $\bar{\nu}_R$. Estos pueden transformarse Lorentz los unos a los otros y por tanto el neutrino no puede tener número cuánticos adicionales. Esta autoconjugación es la razón por la que una partícula de Majorana tiene tantos grados de libertad como una de Dirac.

Una analogía puede servir para clarificar el asunto un poco más. Consideremos el campo cargado del pión. Es un campo complejo puesto que π^+ y π^- son obviamente diferentes. Pero el pión neutro π^0 es su propia antipartícula, y por tanto viene descrito por un campo escalar real. Un campo complejo conlleva dos campos reales, las partes reales e imaginarias. El pión neutro tiene un grado de libertad mientras que el pión cargado tiene dos. De manera similar, una partícula de Majorana tiene la mitad de grados de libertad que una de Dirac.

4.3. Esquemas para la masa del neutrino

Tras estos preliminares teóricos e intuitivos examinemos con más detalle los posibles esquemas para dar masa a los neutrinos. El término de masa usual al que todos estamos acostumbrados en teoría cuántica de campos involucra ψ and its conjugate $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$:

$$\mathcal{L}_{\text{mass}} = -m\bar{\psi}\psi = -m(\overline{\psi_{\text{L}}}\psi_{\text{R}} + \overline{\psi_{\text{R}}}\psi_{\text{L}}) \ , \tag{4.31}$$

donde $\psi_{\rm L}$, $\psi_{\rm R}$ son las proyecciones usuales

$$\psi_{\rm L} = \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi \ ; \qquad \psi_{\rm R} = \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi \ . \tag{4.32}$$

término que como ya comentamos conserva el número fermiónico

$$\psi \to e^{i\alpha}\psi \ ; \qquad \bar{\psi} \to e^{-i\alpha}\bar{\psi} \tag{4.33}$$

y da la misma masa a una partícula que a su antipartícula

$$m_{\bar{\psi}} = m_{\psi} = m \ . \tag{4.34}$$

Para partículas con un número cuántico $U(1)$, como por ejemplo la carga electromagnética es claro que $\mathcal{L}_{\rm mass}$ es el único término de masa posible, puesto que para preservar los números cuánticos de $U(1)$ necesitamos tener interacciones partícula antipartícula.

Los neutrinos sin embargo, como ya comentamos, constituyen una excepción importante. Al no tener carga electromagnética es posible considerar otros tipos de términos de masa además del término partícula antipartícula dado anteriormente. Estos nuevos términos de masa contienen dos campos neutrino (o 2 antineutrino), y violan por tanto el número fermiónico (y en algunos casos $SU(2) \times U(1)$), pero por otro lado están permitidos por la invarianza Lorentz.

Como vimos, es posible escribir tres tipos de términos de masas para los neutrinos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{\nu}_{\rm mass} = & - [\overline{\nu_{\rm R}} m_D \nu_{\rm L} + \overline{\nu_{\rm L}} m_D^{\dagger} \nu_{\rm R}] - \frac{1}{2}[\overline{\nu_{\rm R}} \tilde{C} m_S \overline{\nu_{\rm R}}^T + \nu_{\rm R}^T \tilde{C} m_S^{\dagger} \nu_{\rm R}] \\ & - \frac{1}{2}[\nu_{\rm L}^T \tilde{C} m_T \nu_{\rm L} + \overline{\nu_{\rm L}} \tilde{C} m_T^{\dagger} \overline{\nu_{\rm L}}^T] \ . \end{aligned} \tag{4.35}$$

donde las matrices m_D, m_S, m_T son escalares Lorentz. Sin embargo, su presencia está permitida sólo como resultado de la ruptura de diversas simetrías. Por ejemplo, m_D conserva el número fermionico, pero viola $SU(2) \times U(1)$ puesto que no se transforma como un doblete de $SU(2)$. Este tipo de términos recibe como ya sabemos el nombre de masa de Dirac. Tanto m_S como m_T violan el numero fermiónico en dos unidades y se conocen como términos de masa de Majorana. Debido a que m_S acopla $\nu_{\rm R}$ consigo mismo, es claramente un $SU(2) \times U(1)$. Lo cual no es el caso para m_T, que viola $SU(2) \times U(1)$ pues no se transforma como un triplete de $SU(2)$.

La matriz $\tilde{C}$ que entra en los términos de masa de Majorana está allí para preservar la invariancia Lorentz como vimos. Nótese que $\tilde{C}$ is **not** no debe confundirse con la matriz C relacionada con como los campos de Dirac se

transforman bajo conjugación de carga. Bajo el operador conjugación de carga $U(C)$ un campo de Dirac ψ se transforma en su hermítico conjugado $\psi^\dagger$:

$$U(C)\psi U(C)^{-1} = C\psi^\dagger(x) \ . \tag{4.36}$$

La matriz C es necesaria para asegurar la invarianza de la ecuación de Dirac bajo conjugación de carga y está sometida a la restricción

$$C\gamma_\mu^* C^{-1} = -\gamma_\mu \ . \tag{4.37}$$

En general, C depende de la base de matrices γ usada. En la base de Majorana donde lasmatrices γ son imaginarias puras, entonces $C = 1$. De cualquier modo, la matriz $\tilde{C}$ se relaciona con C mediante

$$\tilde{C} = C\gamma^{oT} \ . \tag{4.38}$$

Es fácil comprobar que en este caso $\tilde{C}$ obedece

$$\tilde{C}\gamma_\mu^T \tilde{C}^{-1} = -\gamma_\mu \ . \tag{4.39}$$

El motivo por el que aparece la matriz $\tilde{C}$ es porque relaciona el llamado campo conjugado en carga ψ^c con $\bar{\psi}$ más que con $\psi^\dagger$. A la vista de la forma en la que el operador de conjugación de carga actua en el campo fermiónico ψ, parece natural definir el campo conjugado en carga como

$$\psi^c(x) = C\psi^\dagger(x) \ . \tag{4.40}$$

Ahora $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$, de manera que tenemos tambien

$$\psi^c(x) = C\gamma^{0T}\bar{\psi}^T(x) = \tilde{C}\bar{\psi}^T(x) \ . \tag{4.41}$$

Por tanto, $\tilde{C}$, de hecho, relaciona $\bar{\psi}$ con ψ^c.

4.4. El mecanismo de See-Saw

El lagrangiano de masa descrito en la sección anterior se puede escribir de una manera más simétrica reemplazando los campos transpuestos en esa ecuación por los campos conjugados en carga. Recordemos que

$$\psi^c = \tilde{C}\bar{\psi}^T \ ; \qquad \overline{\psi^c} = \psi^T\tilde{C} \ . \tag{4.42}$$

Por tanto, podemos escribir, por ejemplo [1]

$$\overline{\nu_{\rm R}}\nu_{\rm L} = -\nu_{\rm L}^T\overline{\nu_{\rm R}}^T = \nu_{\rm L}^T\tilde{C}\tilde{C}\overline{\nu_{\rm R}}^T = \overline{\nu_{\rm L}^c}\nu_{\rm R}^c \ . \tag{4.43}$$

[1] El signo menos en el segundo término viene de la estadística de Fermi

Por tanto

$$\overline{\nu_{\rm R}}\nu_{\rm L} = \frac{1}{2}[\overline{\nu_{\rm R}}\nu_{\rm L} + \overline{\nu^c_{\rm L}}\nu^c_{\rm R}] \ . \tag{4.44}$$

Usando estas ecuaciones, $\mathcal{L}^{\nu}_{\rm mass}$ puede escribirse de la forma compacta:

$$\mathcal{L}^{\nu}_{\rm mass} = -\frac{1}{2}\left[(\overline{\nu^c_{\rm L}}\ \overline{\nu_{\rm R}})\begin{pmatrix} m_T & m_D^T \\ m_D & m_S \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \nu_{\rm L} \\ \nu^c_R \end{pmatrix}\right] + \text{h.c.} \tag{4.45}$$

Para 3 generaciones de neutrinos, los seis autoestados de masas m_i son los autovalores de la matriz 6×6

$$M = \begin{pmatrix} m_T & m_D^T \\ m_D & m_S \end{pmatrix} \ . \tag{4.46}$$

puesto que M no es necesariamente Hermitica, su diagonalización necesita de una transformación biunitaria

$$U^\dagger_{\rm R} M U_{\rm L} = M_{\rm diag} \ , \tag{4.47}$$

donde $U_{\rm L}$ y $U_{\rm R}$ son 6×6 matrices unitarias. Esta diagonalización se lleva a cabo mediante un cambio de base en los campos neutrino originales

$$\psi_{\rm L} = \begin{pmatrix} \nu_{\rm L} \\ \nu^c_{\rm R} \end{pmatrix} \ ; \quad \psi_{\rm R} = \begin{pmatrix} \nu^c_{\rm L} \\ \nu_{\rm R} \end{pmatrix} \tag{4.48}$$

a un nuevo conjunto de campos $\eta_{\rm L}$ y $\eta_{\rm R}$ definidos por las ecuaciones:

$$\psi_{\rm L} = U_{\rm L}\eta_{\rm L} \ ; \quad \psi_{\rm R} = U_{\rm R}\eta_{\rm R} \ . \tag{4.49}$$

Es útil considerar el ejemplo sencillo, pero fisicamente interesante, de una única familia de neutrino. Imaginemos $m_T = 0$ y $m_S \gg m_D$. La matriz 2×2 M se escribe en este caso

$$M = \begin{pmatrix} 0 & m_D \\ m_D & m_S \end{pmatrix} \ . \tag{4.50}$$

y tiene dos autovalores, dados aproximadamente por m_S and $-m_D^2/m_S$. Es decir, en este caso el espectro se divide en un neutrino muy pesado de masa aproximada m_S y otro muy ligero de masa aproximada m_D^2/m_S.[2] Este es el llamado mecanismo de Seesaw y es muy sugestivo. Parece natural esperar que m_D fuera del orden de la masa del leptón cargado correspondiente al

[2]Para campos fermiónicos el signo del término de masas es irrelevante pues puede cambiarse mediante una transformación quiral $\psi_{\rm R} \to \exp\left[i\frac{\pi}{2}\right]\psi_{\rm R}$; $\psi_{\rm L} \to \exp\left[-i\frac{\pi}{2}\right]\psi_{\rm L}$ que deja el resto del lagrangiano invariante.

neutrino en cuestión: $m_D \sim m_\ell$. Entonces el espectro de leptones tiene una jerarquía natural :

$$(m_\nu)_{\text{light}} \sim m_\ell \left(\frac{m_\ell}{m_S}\right) \ll m_\ell \ll (m_\nu)_{\text{heavy}} \sim m_S \ . \tag{4.51}$$

Por tanto, si hay una escala de masas grande asociada con los neutrinos right-handed (la escala m_S, que no está constreñida por la escala de la ruptura $SU(2) \times U(1)$, puesto que es un singlete $SU(2) \times U(1)$) es fácil entender que las masas de los neutrinos pudieran ser mucho más ligeras que las correspondientes a los leptones cargados.

La matriz M del ejemplo 2×2 anterior se diagonaliza de manera aproximada por la matriz ortogonal

$$U = \begin{pmatrix} 1 & m_D/m_S \\ -m_D/m_S & 1 \end{pmatrix} \ . \tag{4.52}$$

Los dos autoestados de masas resultan ser

$$\eta_{\text{L}} \equiv \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}_{\text{L}} = \begin{pmatrix} 1 & -m_D/m_S \\ m_D/m_S & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_{\text{L}} \\ \nu^c_{\text{R}} \end{pmatrix} \tag{4.53}$$

$$\eta_{\text{R}} \equiv \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}_{\text{R}} = \begin{pmatrix} 1 & -m_D/m_S \\ m_D/m_S & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu^c_{\text{L}} \\ \nu_{\text{R}} \end{pmatrix} \ . \tag{4.54}$$

Nótese que η_1 and η_2 son estados autoconjugados de Majorana

$$\eta_1 = \eta_{1\text{L}} + \eta_{1\text{R}} = (\nu_{\text{L}} + \nu^c_{\text{L}}) - \frac{m_D}{m_S}(\nu^c_{\text{R}} + \nu_{\text{R}}) = \eta^c_1 \tag{4.55}$$

$$\eta_2 = \eta_{2\text{L}} + \eta_{2\text{R}} = (\nu^c_{\text{R}} + \nu_{\text{R}}) + \frac{m_D}{m_S}(\nu_{\text{L}} + \nu^c_{\text{L}}) = \eta^c_{\text{L}} \ . \tag{4.56}$$

El estado ν_{L} que entra en las interacciones débiles es, a todos los efectos, esencialmente $\eta_{1\text{L}}$. Esto es, es el estado asociado con el autoestado del neutrino ligero ($m_1 \simeq m_D^2/m_S$):

$$\nu_{\text{L}} = \eta_{1\text{L}} + \frac{m_D}{m_S}\eta_{2L} \ . \tag{4.57}$$

El neutrino right-handed ν_{R}, por otra parte, es esencialmente el autoestado de neutrinos pesados η_{2R} ($m_2 \simeq m_S$):

$$\nu_{\text{R}} = \eta_{2\text{R}} - \frac{m_D}{m_S}\eta_{1\text{R}} \ . \tag{4.58}$$

Este ejemplo sencillo se puede generalizar de manera sencilla al caso de interés físico 3×3 De nuevo, si la matriz m_T es despreciable (i.e. si sus

autovalores son pequeños), la matriz de masas para los neutrinos M toma la forma aproximada

$$M = \begin{pmatrix} 0 & m_D^T \\ m_D & m_S \end{pmatrix} . \tag{4.59}$$

Si los autovalores de m_S son grandes comparados con los de m_D, entonces el espectro se separa de nuevo en un sector de neutrinos ligeros y otro pesado. Los neutrinos ligeros tienen una matriz de masas 3×3

$$(M_\nu)_{\text{light}} = m_D^T m_S^{-1} m_D \ , \tag{4.60}$$

mientras que los autoestados de masa de los pesados son autoestados de la matriz 3×3

$$(M_\nu)_{\text{heavy}} = m_S \ . \tag{4.61}$$

Puesto que m_S es un parámetro invariante $SU(2) \times U(1)$, no hay ligaduras sobre él. Por otro lado, como discutimos anteriormente, tanto m_D como m_T pueden originarse solamente después de la ruptura $SU(2) \times U(1)$. La interacción de Yukawa de ν_{R} con un doblete left-handed $\text{L} = \begin{pmatrix} \nu_\ell \\ \ell \end{pmatrix}_{\text{L}}$ via un doblete de Higgs $\Phi = \begin{pmatrix} \phi^0 \\ \phi^- \end{pmatrix}$

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = -\Gamma \bar{\nu}_{\text{R}} \Phi \text{L} + \text{h.c.} \ , \tag{4.62}$$

da lugar a un término de masas de Dirac

$$m_D = \Gamma \langle \phi^0 \rangle \ . \tag{4.63}$$

Puesta que $\langle \phi^0 \rangle$ está fijado por la escala de la ruptura $SU(2) \times U(1)$:

$$\langle \phi^0 \rangle = \frac{1}{(\sqrt{2}\ G_F)^{1/2}} \sim 180 \text{ GeV} \ , \tag{4.64}$$

conseguir que m_D tenga un valor en el rango de eV requieres que $\Gamma \sim 10^{-11}$!

La situación no es mucho menos artificial en el caso de m_T. En este caso, para conseguir un valor distinto de cero para m_T es necesario introducir un campo triplete de Higgs $\vec{\Delta}$. Este campo puede acoplarse a $L \otimes L$ de manera que si, en efecto, $\vec{\Delta}$ adquiere un vev puede generarse un triplete de masa m_T. En detalle, el acoplo triplete que involucra $\vec{\Delta}$ tiene la forma

$$\mathcal{L}_{\text{triplet}} = -\frac{1}{2} \{ \Gamma_T L^T \tilde{C} \vec{\tau} \cdot \vec{\Delta} L \} + \text{h.c.} \ , \tag{4.65}$$

donde Γ_T es una constante de acoplo desconocida. Cuando la componente neutra de $\vec{\Delta}$, Δ^o, adquiere un valor de expectación, entonces, $\mathcal{L}_{\text{triplet}}$ genera un término de masa para ν_{L}:

$$\mathcal{L}^{\nu}_{\text{mass}} = -\frac{1}{2}\Gamma_T\langle\Delta^o\rangle\{\nu_{\text{L}}^T\tilde{C}\nu_{\text{L}}\} + \text{h.c.} \tag{4.66}$$

y $m_T = \Gamma_T\langle\Delta^o\rangle$. La única ligadura real en $\langle\Delta^o\rangle$ viene de las medidas de precisión del parámetro ρ. Experimentalmente se tiene

$$\rho_{\text{exp}} = 1{,}00412 \pm 0{,}00124\ . \tag{4.67}$$

La presencia del triplete de Higgs modifica el parámetro ρ:

$$\rho = 1 - 2\left(\frac{\langle\Delta^o\rangle}{\langle\phi^0\rangle}\right)^2 + \text{rad. corr.} \tag{4.68}$$

Usando el error de ρ como una estimación del tamaño de $\langle\Delta^o\rangle$ tenemos que $\langle\Delta^o\rangle \leq 4$ GeV. De manera que, también en este caso, si $\langle\Delta^o\rangle$ está cerca de este límite para generar masas del neutrino del orden de eV necesitaríamos un acoplo de Yukawa de orden $\Gamma_T \sim 10^{-9}$. Si $\langle\Delta^o\rangle << \langle\phi^0\rangle$ entonces Γ_T puede ser mayor, pero tendríamos que explicar el motivo de la jerarquía en vev doblete-triplete.

Por otro lado, tripletes de Higgs elementales no emergen de manera muy natural en los modelos. [3] Sin embargo, siempre es posible conseguir un triplete efectivo de dos dobletes de Higgs:

$$\vec{\Delta} \sim \Phi^T C\vec{\tau}\Phi \tag{4.69}$$

donde C es una matriz conjugación de carga apropiada. Interacciones efectivas que violan L involucrando pares de dobletes de Higgs emergen de manera natural en teorías GUT (veáse el libro de Weinberg) como términos de dimensión 5:

$$\mathcal{L}^{d=5}_{\text{eff}} = \frac{g}{2\Lambda}(L^T\tilde{C}\vec{\tau}L)\cdot(\Phi^T C\vec{\tau}\Phi) + \text{h.c.} \tag{4.70}$$

donde Λ es la escala asociada con la escala de ruptura GUT y g es una constante de acoplo. Claramente la interacción anterior nos da

$$m_T = \frac{g\langle\phi^0\rangle^2}{\Lambda}\ . \tag{4.71}$$

Puesto que $\langle\phi^0\rangle \sim 10^2$ GeV, con $g \sim O(1)$, se tiene $m_T \sim 10^{-2}$ eV para escalas $\Lambda \sim 10^{15}$ GeV, que son las típicas de GUTs. Nótese que la formula

[3] Una excepción la constituyen los modelos simétricos left-right

anterior para m_T es bastante similar en esencia a la expresión de see-saw para neutrinos ligeros

$$(m_\nu)_{\text{light}}^{\text{see-saw}} \sim \frac{m_D^2}{m_S} \sim \frac{\langle \phi^0 \rangle^2}{m_S} \ , \tag{4.72}$$

puesto que $m_D \sim \langle \phi^0 \rangle$. En cualquier caso, nueva física a una escala mayor proporciona un neutrino ligero. Desde el punto de vista físico es más atractivo tener neutrinos ligeros como resultado de una nueva física a altas escalas que como resultado de un acoplo de Yukawa antinaturalmente pequeño.

Capítulo 5

Oscilaciones de neutrinos en el vacío

La prueba más sensible a la masa del neutrino son las llamadas oscilaciones. La idea la introdujo Pontecorvo por primera vez. La esencia de este efecto es muy simple. Los neutrinos se producen en procesos con corrientes débiles cargadas y por tanto son autoestados débiles ν_e, ν_μ or ν_τ. Sin embargo, la matriz de masa para los neutrinos en esta base de flavour es en general no diagonal, lo que significa que los autoestados de masa ν_1, ν_2 and ν_3 (aquellos que diagonalizan la matriz de masa) son en general diferentes de los de flavour. Por tanto, la probabilidad de encontrar un neutrino crado en un autoestado de flavour dado de estar en otro estado oscila con el tiempo, como veremos.

Consideremos oscilaciones en el caso de un término de masas de Dirac y generalizaremos para el caso de términos Majorana y Dirac + Majorana. La parte del lagrangiano que describe la masa de los leptones y las interacciones de corrientes cargadas es

$$-\mathcal{L}_{W+m} = \frac{g}{\sqrt{2}}\,\overline{e}'_{aL}\,\gamma^\mu\,\nu'_{aL}\,W^-_\mu + (m_l)_{ab}\overline{e}'_{aL}e'_{bR} + (m_D)_{ab}\,\overline{\nu}'_{aL}\nu'_{bR} + h.c. \quad (5.1)$$

donde las primas denotan los campos autoestados de flavour. Se sigue de la expresión anterior que los flavours leptónicos individuales L_e, L_μ y L_τ no se conservan al estar presente el término de masa de Dirac, mientras que el número leptónico total $L = L_e + L_\mu + L_\tau$ sigue siendo conservado.

La matriz de masa de leptones cargados m_l y la matriz de masa de los neutrinos m_D son en general matrices complejas que pueden diagonalizarse por transformaciones biunitarias. Escribamos

$$e'_L = V_L\,e_L\,, \qquad e'_R = V_R\,e_R \qquad \nu'_L = U_L\,\nu_L\,, \qquad \nu'_R = U_R\,\nu_R\,, \qquad (5.2)$$

y tomemos las matrices unitarias V_L, V_R, U_L and U_R tales que diagonalicen las matrices de masas de leptones cargados y neutrinos:

$$V_L^\dagger \, m_l \, V_R = (m_l)_{diag} \, , \qquad U_L^\dagger \, m_D \, U_R = (m_D)_{diag} \, . \tag{5.3}$$

Los campos no primados e_{iL}, e_{iR}, ν_{iL} y ν_{iR} son las componentes de los campos autoestados de masa de Dirac $e_i = e_{iL} + e_{iR}$ y $\nu_i = \nu_{iL} + \nu_{iR}$. El lagrangiano de la ecuación (5.1) puede escribirse en la base de autoestados de masa como

$$-\mathcal{L}_{W+m} = \frac{g}{\sqrt{2}} \, \overline{e_i} \, \gamma^\mu \, (V_L^\dagger U_L)_{ij} \, \nu_{Lj} \, W_\mu^- + m_{li} \overline{e}_{Li} e_{Ri} + m_{Di} \, \overline{\nu}_{Li} \nu_{Ri} + h.c. \, , \tag{5.4}$$

donde m_{li} son las masas de los leptones cargados (m_e, m_μ and m_τ en el caso de tres generaciones), y m_{Di} son las masas de los neutrinos. La matriz $U = V_L^\dagger U_L$ recibe el nombre de matriz de mazcla leptónica o matriz de Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata (PMNS). Es el análogo leptónico de la matriz de mezcla CKM. Volveremos a referirnos a ellas en el capítulo dedicado a violación de CP. Relaciona un autoestado de flavour producido o absorbido con el correspondiente leptón cargado al autoestado de masa:

Por tanto, si los neutrinos tienen masa entonces, en general, los neutrinos producidos por las interacciones débiles (autoestados de la interacción) no son autoestados de masa definida (autoestados de masa). En la base donde la matriz de masas de leptones cargados es diagonal, los autoestados de la interacción débil vienen fijados por el correspondiente leptón producido . Es decir, la parte de la corriente débil que involucra $J_{\mu-}^{\rm lept}$ que involucra el leptón cargado $\ell_i = \{e, \mu, \tau\}$ lllevará consigo siempre el correspondiente autoestado de la interacción débil del neutrino $\nu_{\ell_i} = \{\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau\}$. Estos autoestados, left-handed, son superposiciones de los autoestados de masa ν_i:

$$\nu_{\ell_j} = \sum_i U_{\ell_j i} \nu_i \ . \tag{5.5}$$

La matriz $U_{\ell_j i}$, es en general una matriz 3×6. Sin embargo, si el mecanismo de see-saw es operativo, esperaríamos que las contribuciones de neutrinos superpesados fueran despreciables. Por tanto, en una muy buena aproximación la matriz $U_{\ell_j i}$ es una matriz unitaria 3×3

$$U_{\ell_j i} U^*_{\ell_k i} = \delta_{\ell_j \ell_k} \ . \tag{5.6}$$

Hemos visto que ocurre con un término tipo Dirac, pero que ocurre si los neutrinos tienen un término de masa de Majorana?. La ecuación (5.1) se ve ahora modificada: el término $(m_D)_{ab} \, \overline{\nu}'_{aL} \nu'_{bR} + h.c.$ debe reemplazarse por

$(m_M)_{ab}\,\overline{\nu^c_{aL}}'\,\nu'_{bR}+h.c. = (m_M)_{ab}\,\nu'^T_{aL}\,C\,\nu'_{bR}+h.c.$ Este término de masa no rompe sólo los números leptónicos individuales, sino también el número leptónico total. La matriz de masas simétrica de Majorana $(m_M)_{ab}$ se diagonaliza por la transformación $U_L^T\,m_M\,U_L = (m_M)_{diag}$, de manera que podemos usar de nuevo las transformaciones (5.2). Por tanto, la estructura de las interacciones de corrientes cargadas es la misma que en el caso de los neutrinos de Dirac, y la diagonalización de la matriz de masas de los neutrinos en el caso de n generaciones fermionicas da de nuevo n autoestados de masa. Esto se traduce en que no podremos distinguir entre neutrinos de Dirac y Majorana mediante oscilaciones de neutrinos. Fundamentalmente, esto se debe a que el número leptónico no se viola por las oscilaciones de neutrinos.

La situación es algo diferente en el caso Dirac + Majorana(D + M) (como en el caso puramente Dirac esto requiere la existencia de neutrinos singletes electrodébil ν_R). En particular, en el caso de n ν_L y n ν_R, la matriz de masas para los neutrinos tiene dimensión $2n \times 2n$, dando lugar a $2n$ estados masivos Majorana. La conservación del número leptónico total se viola debido al término de Majorana. A diferencia del caso Dirac y Majorana, en este caso D + M existirá un nuevo tipo de oscilaciones de neutrinos: además de las usuales $\nu_a \to \nu_b$, pueden tener lugar oscilaciones en estados "esteriles" $\nu_a \to \nu_b^c$. Estas oscilaciones violan el número leptónico total L. Por tanto, el caso D + M puede distinguirse en principio de los casos Dirac y Majorana puros mediante oscilaciones de neutrinos.

5.1. El caso sencillo: dos flavours

Discutamos la fenomenología de las oscilaciones de neutrinos en el caso sencillo en el que tener sólo dos flavours, puesto que es así como se presentan la mayor parte de los datos. Consideremos por ejemplo solo los autoestados de la interacción débil ν_e y ν_μ. En este caso, usando una notación mecanico-cuántica,

$$\begin{aligned} |\nu_e\rangle &= \cos\theta|\nu_1\rangle + \sin\theta|\nu_2\rangle \\ |\nu_\mu\rangle &= -\sin\theta|\nu_1\rangle + \cos\theta|\nu_2\rangle \ . \end{aligned} \tag{5.7}$$

Los autoestados de masa tienen una evolución temporal $|\nu_i\rangle$ que satisface la ecuación de Schrodinguer:

$$|\nu_i(t)\rangle = e^{-iE_it}|\nu_i(0)\rangle \ ; \quad E_i = \sqrt{\vec{p}^2 + m_i^2} \ . \tag{5.8}$$

Puesto que $m_1 \neq m_2$, es fácil ver que el autoestados de la interacción débil ν_e producido a $t = 0$ evoluciona como una superposición de estados ν_e

y ν_μ. Tomando por definición $|\nu_i\rangle \equiv |\nu_i(0)\rangle$, se sigue que

$$\begin{aligned} |\nu_e(t)\rangle &= \cos\theta e^{-iE_1 t}|\nu_1\rangle + \sin\theta e^{-iE_2 t}|\nu_2\rangle \\ &= \left[\cos^2\theta e^{-iE_1 t} + \sin^2\theta e^{-iE_2 t}\right]|\nu_e\rangle + \left[\cos\theta\sin\theta(e^{-iE_2 t} - e^{-iE_1 t})\right]|\nu_\mu\rangle \\ &\equiv A_{ee}(t)|\nu_e\rangle + A_{e\mu}(t)|\nu_\mu\rangle \ . \end{aligned} \tag{5.9}$$

Usando lo anterior, podemos calcular las probabilidades de que a tiempo t el estado $\nu_e(t)$ sea bien un autoestado de la interacción ν_e o un ν_μ:

$$P(\nu_e \to \nu_e; t) = |A_{ee}(t)|^2 = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\theta[1 - \cos(E_2 - E_1)t] \tag{5.10}$$

$$P(\nu_e \to \nu_\mu; t) = |A_{e\mu}(t)|^2 = \frac{1}{2}\sin^2 2\theta[1 - \cos(E_2 - E_1)t] \ . \tag{5.11}$$

Puesto que las masas de los neutrinos son pequeñas comparadas con el momento, podemos escribir

$$E_i \simeq |p| + \frac{m_i^2}{2|p|} \ ; \qquad t \simeq L \ , \tag{5.12}$$

donde L es la distancia recorrida por los neutrinos en un tiempo t. Usando lo anterior, podemos por ejemplo calcular

$$P(\nu_e \to \nu_\mu; L) = \frac{1}{2}sin^2 2\theta\left[1 - \cos\frac{\Delta m^2}{2|p|}L\right] = \sin^2 2\theta \sin^2\frac{\Delta m^2 L}{4|p|} \ , \tag{5.13}$$

where $\Delta m^2 = m_2^2 - m_1^2$. Numericamente, se tiene

$$\frac{\Delta m^2 L}{4|p|} \simeq 1{,}27\frac{\Delta m^2(\mathrm{eV}^2)L(m)}{|p|(\mathrm{MeV})} \ . \tag{5.14}$$

Recapitulando, para el caso de dos especies de neutrinos, podemos obtener una formula que cuantifica la probabilidad un autoestado de la interacción débil (ν_e) haya oscilado a otro autoestado de la interacción (ν_μ) tras recorrer una distancia L :

$$P(\nu_e \to \nu_\mu; L) = \sin^2 2\theta \sin^2\left[\frac{1{,}27\Delta m^2(\mathrm{eV}^2)L(m)}{|p|(\mathrm{MeV})}\right] \ . \tag{5.15}$$

Figura 5.1: Patrón de oscilación de neutrinos con dos flavours (energía del neutrino ω, distancia z).

Por supuesto, existe una probabilidad de que tal oscilación no tenga lugar dada por

$$P(\nu_e \to \nu_e; L) = 1 - P(\nu_e \to \nu_\mu; L) \ . \tag{5.16}$$

Dichas probabilidades dependen de dos factores: (i) un ángulo de mezcla $\sin^2 2\theta$ y (ii) un factor cinemático que depende de la distancia recorrida, del momento del neutrino, así como de la diferencia en el cuadrado de las masas de los neutrinos. Obviamente, para que el factor de mezcla $\sin^2 2\theta$ sea importante de cara a las oscilaciones debería ser de orden $O(1)$. Sin embargo, un factor de mezcla grande no es suficiente. Es necesario que el factor cinemático $\Delta m^2(\mathrm{eV}^2)L(m)/|p|(\mathrm{MeV}) \gtrsim O(1)$, de manera que el segundo factor oscilatorio sea significativo. De cara al futuro será útil desarrollar ligeramente el formalismo.

Las amplitudes de probabilidad $A_{ee}(t)$ y $A_{e\mu}(t)$ pueden reconononocerse como elementros de una matriz 2×2 e^{-iHt} definida por

$$e^{-iHt} = U \ e^{-iH_{\mathrm{diag}}t} \ U^\dagger \ , \tag{5.17}$$

donde

$$U = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{5.18}$$

es la matriz de mezcla de los autoestados de la interacción débil y

$$H_{\mathrm{diag}} = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} \ . \tag{5.19}$$

Se tiene

$$A_{ee}(t) = [e^{-iHt}]_{11} \ ; \qquad A_{e\mu}(t) = [e^{-iHt}]_{12} \ . \tag{5.20}$$

Usando el hecho de que $E_i = |p| + m_i^2/2|p|$, resulta conveniente separar H_{diag} en dos trozos:

$$H_{\mathrm{diag}} = \left(|p| + \frac{m_1^2 + m_2^2}{4|p|}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\Delta m^2}{4|p|} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \ . \tag{5.21}$$

El primero , por ser proporcional a la matriz identidad, da un factor de fase global, que es irrelevante para el cálculo de las probabilidades de oscilación. Podemos por tanto reemplazar

$$H_{\mathrm{diag}} \to H_o = -\frac{\Delta m^2}{4|p|}\sigma_3 \ . \tag{5.22}$$

A la vista de esto, definimos la matriz hamiltoniana 2×2 H_{vac} mediante

$$\begin{aligned} H_{\mathrm{vac}} &= U \ H_o \ U^\dagger = \frac{\Delta m^2}{4|p|} \begin{pmatrix} -\cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} \\ &= \frac{\Delta m^2}{4|p|}\{\sin 2\theta \sigma_1 - \cos 2\theta \sigma_3\} \ . \end{aligned} \tag{5.23}$$

Entonces,

$$A_{ee}(t) = [e^{-iH_{\rm vac}t}]_{11} \ ; \qquad A_{e\mu}(t) = [e^{-iH_{\rm vac}t}]_{12} \ . \tag{5.24}$$

De la misma manera que los coeficientes anteriores describen la evolución temporal de un estado que empezó en $t = 0$ como autoestado de la interacción débil ν_e podemos definir los coeficientes

$$A_{\mu e}(t) = [e^{-iH_{\rm vac}t}]_{21} \ ; \qquad A_{\mu\mu}(t) = [e^{-iH_{\rm vac}t}]_{22} \tag{5.25}$$

que detallarán la evolución temporal de un estado ν_μ que empezó en a $t = 0$ como :

$$|\nu_\mu(t)\rangle = A_{\mu e}(t)|\nu_e\rangle + A_{\mu\mu}(t)|\nu_\mu\rangle \ . \tag{5.26}$$

De estas consideraciones es fácil deducir que $H_{\rm vac}$ es el hamiltoniano que entra en la ecuación de Schrodinger para $|\nu_e(t)\rangle$ y $|\nu_\mu(t)\rangle$:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\left[\begin{array}{c} |\nu_e(t)\rangle \\ |\nu_\mu(t)\rangle \end{array}\right] = H_{\rm vac}\left[\begin{array}{c} |\nu_e(t)\rangle \\ |\nu_\mu(t)\rangle \end{array}\right] \ . \tag{5.27}$$

5.2. El caso general

La oscilación o cambio de flavour general típico , se ha representado esquematicamente en la parte superior de la figura 5.2. En la figura una fuente

Figura 5.2: Oscilaciones en el vacío. “Amp” denota amplitud.

de neutrinos produce un neutrino junto con un leptón cargado $\overline{\ell_\alpha}$ de flavour α. El neutrino por tanto es en su nacimiento un ν_α. Tras esto el neutrino viaja al igual que vimos en el caso particular anterior na distancia L hacia el detector. Una vez allí, interactua con un blanco y produce un segundo leptón cargado ℓ_β de flavour β. En el momento de la interacción con el detector, el neutrino es u ν_β. Si $\beta \neq \alpha$ (por ejemplo, si ℓ_α es un μ y ℓ_β es un τ), entonces, durante su viaje al detector el neutrino a mutado de un ν_α a un ν_β.

Este cambio de flavour, $\nu_\alpha \longrightarrow \nu_\beta$, es esencialmente un efecto mecanico-cuántico. Puesto que como indicamos en la sección anterior un ν_α es una superposición coherente de autoestados de masa ν_i, la partícula que se propaga desde la fuente de neutrinos al detector en la fig. 5.2 es alguna de los ν_i, y debemos sumar coherentemente las contribuciones de los diversos ν_i.

Denotaremos la amplitud por “Amp”[1]. Tenemos que la amplitud Amp($\nu_\alpha \longrightarrow \nu_\beta$) viene dada por la parte inferior de la figura 5.2. La contribución de cada

[1]Pido disculpas por el cambio de notación con respecto a la sección anterior, mantendremos aquí la notación de la figura mostrada

ν_i es el producto de tres factores. El primero, la amplitud del neutrino producido junto con un $\overline{\ell_\alpha}$ para ser un ν_i en particular. Esta amplitud es $U^*_{\alpha i}$. El segundo factor es la amplitud del ν_i producido y propagado de la fuente al detector. Este factor se denota por Prop(ν_i) en la fig. 5.2, y lo calcularemos en breve. El último factor es la amplitud de que el lepton cargado creado por ν_i al interactuar con el detector sea en concreto un ℓ_β. De la hermiticidad del hamiltoniano que describe el acoplo neutrino-leptón cargado-W , se sigue que si $\mathrm{Amp}(W \longrightarrow \overline{\ell_\alpha}\nu_i) = U^*_{\alpha i}$, entonces $\mathrm{Amp}(\nu_i \longrightarrow \ell_\beta W) = U_{\beta i}$. Por tanto el último factor es $U_{\beta i}$, y

$$\mathrm{Amp}(\nu_\alpha \longrightarrow \nu_\beta) = \sum_i U^*_{\alpha i}\mathrm{Prop}(\nu_i)U_{\beta i} \quad . \tag{5.28}$$

Nos queda determinar Prop(ν_i). Para encontrarlo vayamos al sistema de referencia en reposo del ν_i y llamemos al tiempo en este sistema τ_i. Si ν_i tiene una masa en reposo m_i, entonces en su sistema de referencia su vector de estado satisface la ecuación de Schrodinger

$$i\frac{\partial}{\partial \tau_i}|\nu_i(\tau_i)> = m_i|\nu_i(\tau_i)> \quad . \tag{5.29}$$

cuya solución es obviamente

$$|\nu_i(\tau_i)> = e^{-im_i\tau_i}|\nu_i(0)> \quad . \tag{5.30}$$

Por tanto, la amplitud para ν_i tras propagarse un tiempo τ_i, osea, la amplitud $< \nu_i(0)|\nu_i(\tau_i) >$ de encontrar el estado original $|\nu_i(0) >$ en el estado evolucionado en el tiempo $|\nu_i(\tau_i) >$, es simplemente $\exp[-im_i\tau_i]$. Prop(ν_i) es simplemente esta amplitud con τ_i el tiempo propio usado por el ν_i para viajar de la fuente al detector.

Para que Prop(ν_i) nos sea útil debemos reexpresarlo en términos de las variables del sistema de laboratorio. Dos de estas variables son la distancia en el sistema del laboratorio L, que recorre el neutrino entre la fuente y el detector, y el tiempo en el sistema de laboratorio t transcurrido durante el viaje. El valor de L lo eligen los experimentales mediante las elecciones de las localizaciones de la fuente y el detector. De igual manera, el valor de t lo eligen decidiendo cuanto crean el neutrino y el tiempo en que es detectado. Por tanto, L y t vienen dados por el experimento, y son comunes a todas las componentes ν_i del haz. Diferentes ν_i no tienen valores distintos de L y t.

Las otras dos variables en el sistema de laboratorio son la energía E_i y el momento p_i del autoestado de masa ν_i en el sistema del laboratorio. Por invariancia Lorentz la fase $m_i\tau_i$ en el propagador del ν_i, Prop(ν_i), viene dada en términos de las variables en el sistema de laboratorio por

$$m_i\tau_i = E_i t - p_i L \quad . \tag{5.31}$$

Se podría bojetar que esencialmente las fuentes son constantes en el tiempo, y el tiempo tiempo entre la producción y detección del neutrino no se mide, lo cual es bastante correcto. En la practica un experimento realista promedia sobre el tiempo t que necesita el neutrino para su viaje. Supongamos ahora dos componentes del haz de neutrinos, una con energía en el sistema de laboratorio E_1 y otra con energía E_2, contribuyendo de manera coherente a la señal observada en el detector. Si el tiempo empleado por el neutrino para viajar de la fuente al detector es t, entonces cuando la componente del haz con energía E_j $(j = 1, 2)$ alcanza el detector ha adquirido una factor de fase $\exp[-iE_j t]$. Por tanto, la interferencia entre las componentes E_1 y E_2 del haz involucrará un factor de fase $\exp[-i(E_1 - E_2)t]$. Promediando sobre el tiempo no observado de viaje t, este factor desaparece, *salvo que* $E_2 = E_1$. Por tanto, las unicas componentes del haz que contribuyen de manera coherente a la señal de oscilación de neutrinos son las que tienen la misma energía [**?**]. En particular, las diferentes componentes del haz autoestados de masa que contribuyen a la señal de oscilación deben tener energía E.

A energía E, autoestado de masa ν_i, con masa m_i, tiene un momento dado por

$$p_i = \sqrt{E^2 - m_i^2} \cong E - \frac{m_i^2}{2E} \quad . \tag{5.32}$$

donde hemos usado el hecho de la extrema ligereza de los neutrinos, $m_i^2 \ll E^2$ para cualquier energía relativista E.

De las ecuaciones (5.31) y (5.32), vemos que a energía dada E la fase $m_i\tau_i$ en $\mathrm{Prop}(\nu_i)$ viene dada por

$$m_i\tau_i \cong E(t - L) + \frac{m_i^2}{2E}L \quad , \tag{5.33}$$

expresión en la que la fasee $E(t - L)$ es irrelevante puesto que es común a todos los estados de masa interfirientes. Por tanto, debemos tener

$$\mathrm{Prop}(\nu_i) = \exp[-im_i^2 \frac{L}{2E}] \quad . \tag{5.34}$$

Usando este resultado, se tiene que la amplitud de cambio para un neutrino de ν_α a ν_β mientras viaja una distancia L en el vacío con energía E viene dada por

$$\mathrm{Amp}(\nu_\alpha \longrightarrow \nu_\beta) = \sum_i U_{\alpha i}^* \, e^{-im_i^2 \frac{L}{2E}} U_{\beta i} \quad , \tag{5.35}$$

ecuación valida para cualquier número de flavours y autoestados de masa. Elevando al cuadrado obtenemos la probabilidad $\mathrm{P}(\nu_\alpha \longrightarrow \nu_\beta)$ para $\nu_\alpha \longrightarrow$

ν_β

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(\nu_\alpha \longrightarrow \nu_\beta) &= |\mathrm{Amp}(\nu_\alpha \longrightarrow \nu_\beta)|^2 \\ &= \delta_{\alpha\beta} - 4\sum_{i>j} \Re(U^*_{\alpha i}U_{\beta i}U_{\alpha j}U^*_{\beta j})\sin^2(\Delta m^2_{ij}\frac{L}{4E}) \\ &\quad + 2\sum_{i>j} \Im(U^*_{\alpha i}U_{\beta i}U_{\alpha j}U^*_{\beta j})\sin(\Delta m^2_{ij}\frac{L}{2E}) \quad , \end{aligned} \tag{5.36}$$

donde

$$\Delta m^2_{ij} \equiv m^2_i - m^2_j \quad . \tag{5.37}$$

Al obtener la ecuación anterior hemos hecho uso de la unitariedad de U.

La probabilidad de oscilación anterior $\mathrm{P}(\nu_\alpha \longrightarrow \nu_\beta)$ es la apropiada para un *neutrino*, más que para un *antineutrino*, como puede verse en la figura 5.2, que muestra que la partícula oscilante se produce en asociación con un antileptón cargado $\bar{\ell}$, y produce un leptón cargado ℓ en el detector. La probabilidad $\mathrm{P}(\overline{\nu_\alpha} \longrightarrow \overline{\nu_\beta})$ para la correspondiente oscilación de un antineutrino se puede encontrar a partir de $\mathrm{P}(\nu_\alpha \longrightarrow \nu_\beta)$ usando que el proceso $\overline{\nu_\alpha} \longrightarrow \overline{\nu_\beta}$ es la imagen CPT de $\nu_\beta \longrightarrow \nu_\alpha$. Por tanto, asumiendo la validez de CPT,

$$\mathrm{P}(\overline{\nu_\alpha} \longrightarrow \overline{\nu_\beta}) = \mathrm{P}(\nu_\beta \longrightarrow \nu_\alpha) \quad . \tag{5.38}$$

Tenemos

$$\mathrm{P}(\nu_\beta \longrightarrow \nu_\alpha;\, U) = \mathrm{P}(\nu_\alpha \longrightarrow \nu_\beta;\, U^*) \quad . \tag{5.39}$$

Por tanto, se sigue que

$$\mathrm{P}(\bar{\nu_\alpha} \longrightarrow \bar{\nu_\beta}) = \delta_{\alpha\beta} - 4\sum_{i>j} \Re(U^*_{\alpha i}U_{\beta i}U_{\alpha j}U^*_{\beta j})\sin^2(\Delta m^2_{ij}\frac{L}{4E}) - 2\sum_{i>j} \Im(U^*_{\alpha i}U_{\beta i}U_{\alpha j}U^*_{\beta j})\sin(\Delta m^2_{ij}\frac{L}{2E}) \quad . \tag{5.40}$$

De estas expresiones vemos que la matriz de mezcla U es compleja, $\mathrm{P}(\overline{\nu_\alpha} \longrightarrow \overline{\nu_\beta})$ y $\mathrm{P}(\nu_\alpha \longrightarrow \nu_\beta)$ serán en general diferentes. Puesto que $\overline{\nu_\alpha} \longrightarrow \overline{\nu_\beta}$ es la imagen CP de $\nu_\alpha \longrightarrow \nu_\beta$, $\mathrm{P}(\overline{\nu_\alpha} \longrightarrow \overline{\nu_\beta}) \neq \mathrm{P}(\nu_\alpha \longrightarrow \nu_\beta)$ implicaría una violación de la invarianza CP, hasta ahora sólo vista en el sector de quarks.

Con las expresiones para $\mathrm{P}(bar\nu_\alpha \longrightarrow \bar{\nu_\beta})$ y $\mathrm{P}(bar\nu_\alpha \longrightarrow \bar{\nu_\beta})$ en la mano, veamos algunas características de las oscilaciones de neutrinos.

5.3. Comentarios acerca de las oscilaciones

1. Si los neutrinos son no masivos, tales que $\Delta m^2_{ij} = 0$, entonces $\mathrm{P}(\nu_\alpha \longrightarrow \nu_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$. Por tanto, la observación de que los neutrinos cambian de

flavour implica una masa para el neutrino. Esta es la observación que llevó a la conclusión de que los neutrinos tenían masa.

Lo visto hasta ahora son oscilaciones en el vacío y no tiene en cuenta cualquier interacción entre los neutrinos y la materia que pudiera ocurrir entre la fuente y el detector. Por tanto, podríamos preguntarnos como podemos saber que los cambios en flavour observados no se deben a interacciones que cambien el flavour entre el neutrino y la materia, en lugar de a la existencia de una masa para los neutrinos. Para responder a esta cuestión podemos hacer dos puntualizaciones. En primer lugar, aunque el modelo estándar no incluye masas para los neutrinos, si incluye una descripción bastante bien confirmada de las interacciones de neutrinos que establece que las interacciones de los neutrino con la materia no cambian el flavour. En segundo lugar, por lo menos para algunos de los cambios de flavour observados se espera que los efectos de la materia sean despreciables y existe evidencia de que en estos casos la probabilidad de cambio de flavour depende L y E en la combinación L/E, tal y como hemos predicho. Salvo una constante, L/E es el tiempo propio en el sistema de referencia del neutrino que tarda en recorrer una distancia L con energía E. Por tanto, estos cambios de flavour parecen ser la propia evolución del neutrino en el tiempo más que el resultado de su interacción con la materia.

2. Supongamos que no hay mezcla leptónica, lo que significa que en el decaimiento $W^+ \longrightarrow \overline{\ell_\alpha} + \nu_i$, que como dijimos tiene una amplitud $U^*_{\alpha i}$, el lepton cargado $\overline{\ell_\alpha}$ de flavour α viene siempre acompañado por el *mismo* autoestado de masa del neutrino ν_i. Es decir, si $U^*_{\alpha i} \neq 0$, entonces $U_{\alpha j}$ se anula para todo $j \neq i$. Por tanto, $\mathrm{P}(\nu_\alpha \longrightarrow \nu_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$ y la servación de que los neutrinos pueden cambiar de flavour implica mixing.

3. EL neutrino mixing puede detectarse de dos maneras distintas. Una de ella es observando en un haz de neutrinos de un único flavour α, la aparición de neutrinos de un nuevo sabor β diferente del orginal. Estos son los llamados experimentos de aparición. La otra forma en comenzar con un haz de a ν_α de flujo conocido y observar que parte de este flujo desaparece. Estos son los llamados experimentos de desaparición.

4. Incluyendo los factores hasta ahora omitidos $\hbar$ y c, el argumento de la cantidad oscilante $\sin^2[\Delta m^2_{ij} L/4E]$ en $\mathrm{P}(\bar{\nu_\alpha} \longrightarrow \bar{\nu_\beta})$ viene dado por

$$\Delta m^2_{ij} \frac{L}{4E} = 1{,}27\, \Delta m^2_{ij}(\mathrm{eV}^2) \frac{L\,(\mathrm{km})}{E\,(\mathrm{GeV})} \quad . \tag{5.41}$$

Ahora, $\sin^2[1{,}27\,\Delta m^2_{ij}(\mathrm{eV}^2)L\,(\mathrm{km})/E\,(\mathrm{GeV})]$ es sólo apreciable cuando el argumento es de orden unidad o superior . Por tanto, un experimento con un L (km)/E (GeV) es sensible a separaciones en la masa del neutrino al cuadrado $\Delta m^2_{ij}(\mathrm{eV}^2)$ hasta $\sim [L\,(\mathrm{km})/E\,(\mathrm{GeV}]^{-1}$. Por ejemplo, un experimento con $L \sim 10^4$ km, el diámetro de la tierra, y $E \sim 1$ GeV es sensible a Δm^2_{ij} hasta $\sim 10^{-4}$ eV^2. Esto ilustra que las oscilaciones de neutrinos proporcionan acceso a masas muy pequeñas.

5. Como vimos en la sección anterior, la probabilidad de cambio de flavour cambia en el vacío con L/E. Este comportamiento ha llevado a que el fenómeno de cambio de flavour se llame oscilaciones de neutrinos.

6. La probabilidad de oscilación depende sólo de la separación de la masas cuadradas de los neutrinos *splittings*, y no de las masas individuales al cuadrado en si mismas. Por tanto, como ilustra la figura 5.3, los experimentos de oscilación pueden determinar el especto de masas al cuadrado de los neutrinos, pero no la escala absoluta del mismo.

Figura 5.3: Un posible espectro de masas al cuadrado. Los experimentos de oscilación no nos dan información sobre la altura sobre el cero de dicha estructura, es decir, no puede determinar el valor de "??".

7. El cambio de flavour no altera el flujo total en un haz de neutrinos sino que lo redistribuye entre los flavours. De la unitariedad de la matriz U, se sigue que
$$\sum_\beta \mathrm{P}(\nu_\alpha \longrightarrow \nu_\beta) = 1 \quad , \tag{5.42}$$
donde la suma se estiende a todos los flavours β, incluyendo el original α. Esta última ecuación establece que la probabilidad de que un neutrino cambie su sabor más la probabilidad de que no lo haga debe ser la unidad. Por tanto, el cambio de flavour no implica cambio en el flujo total. Sin embargo, algunos de los flavours $\beta \neq \alpha$ en los cuales se transforma un neutrino pueden ser esteriles; esto es, flavors que no sienten las interacciones débiles y por tanto no pueden detectarse en un detector. Si alguno de los nuetrinos del flujo original se vuelve esteril el flujo medido sería menor que el inicial.

8. En la literatura, los tratamientos de las oscilaciones de neutrinos asumen frecuentemente que la diferencia que los diferentes autoestados de

masa que contribuyen coherentemente al haz tiene un momento común, en lugar de una energía común que nosotros hemos supuesto que deben de tener. La asunción de un momento común es tecnicamente incorrecta da lugar a la misma probabilidad de oscilación que hemos encontrado nosotros.

5.4. Oscilaciones en presencia de materia

Cuando un acelerador en la superficie de la tierra envía un haz de neutrinos a un detector situado a cientos de kilómetros el haz no viaja en el vacío. El scattering con partículas que se encuentren en su camino puede tener un efecto grande. Asumiendo que las interacciones del neutrino con la materia conservan el flavour como describe el modelo estándar, un neutrino en presencia de materia puede sufrir un scattering de dos maneras. En primer lugar, si es un ν_e—y sólo si lo es— puede intercambiar un bosón W con un electron. Esto da lugar a una energía potencial de interacción extra V_W. Claramente esta energía extra será proporcional a la constante de acoplo de Fermi G_F y por venir del $\nu_e - e$ scattering será también proporcional al número de electrones por unidad de volumen N_e. Del modelo estandar tenemos

$$V_W = +\sqrt{2}\, G_F\, N_e \quad , \tag{5.43}$$

En segundo lugar, un neutrino en la materia puede intercambiar un bosón Z con un electrón, protón o neutrón del ambiente.

Figura 5.4: Scattering de neutrinos con la materia a través de corrientes neutras y cargadas

El modelo estándar nos dice que cualquier flavour puede hacerlo, y que la amplitud es independiente de dicho flavour. Del mismo modo, nos dice que a transferencia de momento cero, los acoplos al electrón y al positrón son iguales y opuestos. Asumiendo entonces que la materia a través de la cual viaja el neutrino es electricamente neutra las contribuciones del scattering con el electrón y el protón con el neutrino mediante el intercambio del Z se cancelan entre si. Por tanto, el intercambio de un Z da lugar solamente a un potencial de interacción independiente del flavour del neutrino V_Z que depende solamente de N_n, el número de neutrones por unidad de volumen. Del modelo estándar sabemos que

$$V_Z = -\frac{\sqrt{2}}{2}\, G_F\, N_n \quad , \tag{5.44}$$

y que, al igual que para V_W, esta energía de interacción cambia de signo si cambiamos neutrinos por antineutrinos.

Como ya hemos repetido hasta la saciedad, las interacciones del modelo estándar no cambian el flavour del neutrino. Por tanto, a menos que unas hipotéticas interacciones que cambien el flavour fuera del modelo estándar estén actuando, la observación del cambio en el flavour del neutrino implica una masa para el neutrino y mixing incluso cuando los neutrinos atraviesan la materia.

En el sistema de laboratorio la ecuación de evolución temporal toma la forma

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\nu(t)>=\mathcal{H}|\nu(t)> \quad . \tag{5.45}$$

donde, $|\nu(t)>$ es un vector de estado para el neutrino multicomponente, con una componente para casa uno de los posibles flavours. Correspondientemente, el Hamiltoniano $\mathcal{H}$ es una matriz en el espacio de flavours. Para ilustrar esto describamos el caso sencillo de sólo dos flavours, digamos ν_e y ν_μ. Entonces

$$|\nu(t)>=\begin{bmatrix} f_e(t) \\ f_\mu(t) \end{bmatrix} \quad , \tag{5.46}$$

donde $f_e(t)$ es la amplitud de que el neutrino sea un ν_e a tiempo t, y lo mismo para $f_\mu(t)$. $\mathcal{H}$ es una matriz 2×2 en el espacio $\nu_e - \nu_\mu$.

En el caso del vacío encontramos que el elemento de matriz $\nu_\alpha - \nu_\beta$ del hamiltoniano en el vacío, $\mathcal{H}_{\rm Vac}$, viene dado por

$$\begin{aligned} <\nu_\alpha|\mathcal{H}_{\rm Vac}|\nu_\beta> &= <\sum_i U^*_{\alpha i}\nu_i|\mathcal{H}_{\rm Vac}|\sum_j U^*_{\beta j}\nu_j> \\ &= \sum_j U_{\alpha j}U^*_{\beta j}\sqrt{p^2+m_j^2} \quad . \end{aligned} \tag{5.47}$$

donde asumimos que nuestro neutrino está en un haz de momento definido p, común a todos las componentes de los autoestados de masa [2]. En el último paso hemos usado el hecho de que $\mathcal{H}_{\rm Vac}|\nu_j>=E_j|\nu_j>$, donde $E_j=\sqrt{p^2+m_j^2}$ es la energía del autoestado de masae ν_j con momento p, y que los autoestados de masa del hamiltoniano hermítico $\mathcal{H}_{\rm Vac}$ deben ser diagonales.

Como vimos, el cambio de flavour es un fenómeno de interferencia cuántica. Sólo las fases *relativas* de la contribuciones importan . Por tanto, sólo las

[2]Como ya indiqué asumir esto, aunque incorrecto tecnicamente da lugar a una probabilidad de oscilación correcta

energías *relativas* de estas contribuciones,que determinarán sus masas relativas, importan.

En consecuencia si resulta conveniente podemos sustraer del hamiltoniano cualquier multiplo de la identidad I, no afectando a la diferencia entre los autovalores de $\mathcal{H}$, y por tanto no afectando a las predicciones.

Por supuesto, en el caso de dos neutrinos solo hay dos autoestados de masa, ν_1 and ν_2, con un splitting $\Delta m^2 \equiv m_2^2 - m_1^2$ entre ellos. Insertando la matriz U en las ecuaciones anteriores,haciendo la aproximación altamente relativista $(p^2 + m_j^2)^{1/2} \cong p + m_j^2/2p$, and y sustrayendo de $\mathcal{H}_{\rm Vac}$ un multiplo irrelevante de la identidad tenemos

$$\mathcal{H}_{\rm Vac} = \frac{\Delta m^2}{4E} \begin{bmatrix} -\cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix} \quad . \tag{5.48}$$

Al escribir esta expresión hemos usado $p \cong E$, donde E es la energía media de los autoestados de masa del neutrino en nuestro haz de momento p.

Es fácil confirmar que el Hamiltoniano $\mathcal{H}_{\rm Vac}$ anterior da lugar a la misma probabilidad de oscilación de dos neutrinos. Por ejemplo, consideremos la oscilación $\nu_e \longrightarrow \nu_\mu$. Tenemos

$$|\nu_e > = \quad |\nu_1 > \cos\theta + |\nu_2 > \sin\theta \quad , \tag{5.49}$$

$$|\nu_\mu > = -|\nu_1 > \sin\theta + |\nu_2 > \cos\theta \quad . \tag{5.50}$$

Los autovalores de $\mathcal{H}_{\rm Vac}$, son

$$\lambda_1 = -\frac{\Delta m^2}{4E} \quad , \; \lambda_2 = +\frac{\Delta m^2}{4E} \quad . \tag{5.51}$$

Los correspondientes autovectores, $|\nu_1 >$ and $|\nu_2 >$ se relacionan con los $|\nu_e >$ y $|\nu_\mu >$ mediante las ecuaciones (5.49) y (5.50). Por tanto, con $\mathcal{H}$ el $\mathcal{H}_{\rm Vac}$, la ecuación de Schrodinger implica que si a tiempo $t = 0$ empezamos con un $|\nu_e >$, transcurrido un tiempo t este $|\nu_e >$ evolucionará a un estado

$$|\nu(t) > = |\nu_1 > e^{+i\frac{\Delta m^2}{4E}t} \cos\theta + |\nu_2 > e^{-i\frac{\Delta m^2}{4E}t} \sin\theta \quad . \tag{5.52}$$

La probabilidad $\mathrm{P}(\nu_e \longrightarrow \nu_\mu)$ de que este neutrino evolucionado se detecte como un ν_μ es entonces, de la ecuaciones (5.50) y (5.52),

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(\nu_e \longrightarrow \nu_\mu) &= |<\nu_\mu|\nu(t)>|^2 \\ &= |\sin\theta\cos\theta(-e^{i\frac{\Delta m^2}{4E}t} + e^{-i\frac{\Delta m^2}{4E}t})|^2 \\ &= \sin^2 2\theta \sin^2(\Delta m^2 \frac{L}{4E}) \quad . \end{aligned} \tag{5.53}$$

donde en el último paso hemos reemplazado el tiempo de viaje de nuestro neutrino altamente relativista por su distancia recorrida L. Nótese que la probabilidad obtenida coincide con la obtenida anteriormente.

Volvamos ahora a la propagación del neutrino en la materia. El hamiltoniano de vacío 2×2 Hamiltonian $\mathcal{H}_{\text{Vac}}$ se ve reemplazado por una matriz $\mathcal{H}_M$ dada por

$$\mathcal{H}_M = \mathcal{H}_{\text{Vac}} + V_W \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + V_Z \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad . \tag{5.54}$$

El segundo término del lado derecho es la contribución del potencial de interacción debido al interecambio de un W. Puesto que este energía afecta solamente a ν_e, esta contribución es distinta de cero solo en el elemento superior izquierdo $\nu_e - \nu_e$, de $\mathcal{H}_M$. El último término del lado derecho de la ecuación es la contribución es la contribución por el intercambio de un Z. Puesto que esta energía afecta por igual a todos los flavours, su contribución a $\mathcal{H}_M$ es un multiplo de la matriz identidad, y en consecuencia puede quitarse. Entonces

$$\mathcal{H}_M = \mathcal{H}_{\text{Vac}} + \frac{V_W}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \frac{V_W}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \tag{5.55}$$

donde hemos separado la contribución del intercambio del W en una parte no proporcional a la indentidad más una proporcional. Quitando esta parte irrelevante, tenemos por las ecuaciones (5.48) y (5.55)

$$\mathcal{H}_M = \frac{\Delta m^2}{4E} \begin{bmatrix} -(\cos 2\theta - x) & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & (\cos 2\theta - x) \end{bmatrix} \quad , \tag{5.56}$$

en donde

$$x \equiv \frac{V_W/2}{\Delta m^2/4E} = \frac{2\sqrt{2} G_F N_e E}{\Delta m^2}. \tag{5.57}$$

Este parámetro x es una medida de la importancia de los efectos de la materia relativos a los del splitting del cuadrado de masas del neutrino.

Si definimos

$$\Delta m_M^2 \equiv \Delta m^2 \sqrt{\sin^2 2\theta + (\cos 2\theta - x)^2} \tag{5.58}$$

and

$$\sin^2 2\theta_M \equiv \frac{\sin^2 2\theta}{\sin^2 2\theta + (\cos 2\theta - x)^2} \quad , \tag{5.59}$$

entonces $\mathcal{H}_M$ se puede escribir como

$$\mathcal{H}_M = \frac{\Delta m_M^2}{4E} \begin{bmatrix} -\cos 2\theta_M & \sin 2\theta_M \\ \sin 2\theta_M & \cos 2\theta_M \end{bmatrix} \quad . \tag{5.60}$$

El hamiltoniano en presencia de materia , $\mathcal{H}_M$, es por tanto idéntico al del vacío, $\mathcal{H}_{\rm Vac}$, salvo que los parámetros del vacío Δm^2 y θ han sido reemplazados por Δm^2_M y θ_M.

No es necesario decir, que los autoestados de $\mathcal{H}_M$ difieren de los del vacío. La separación entre las masas efectivas cuadrados de estos autoestados en materia difiere del splitting del vacío Δm^2, y el ángulo de mezcla en la materia difiere del del vacío θ. Toda la física de la propagación de neutrinos en presencia de materia se encuentra contenida en el hamiltoniano de materia $\mathcal{H}_M$. $\mathcal{H}_M$ depende de los parámetros Δm^2_M y θ_M de la misma manera que el hamiltoniano de vacío $\mathcal{H}_{\rm Vac}$. Por tanto Δm^2_M debe ser el splitting entre las masas cuadradas efectivas en la materia y θ_M el ángulo de mezcla efectivo.

En un experimento con un haz de neutrinos generados en un acelerador enviados a un detector a, digamos 1000 km, el haz atraviesa la materia pero no penetra muy profundamente en la tierra. La densidad de materia encontrada por tal haz en su viaje es muy aproximadamente constante. Por tanto, la densidad de electrones N_e, y por tanto el parámetro x, y por tanto el hamiltoniano de materia $\mathcal{H}_M$, es aproximadamente independiente de la posición , al igual que ocurre con el hamiltoniano de vacío $\mathcal{H}_{\rm Vac}$. Comparando las ecuaciones (5.60) y (5.48), vemos que puesto que $\mathcal{H}_{\rm Vac}$ da lugar a la probabilidad de oscilación en el vacío $\mathrm{P}(\nu_e \longrightarrow \nu_\mu)$, $\mathcal{H}_M$ debe dar lugar a una probabilidad de oscilación en la materia

$$\mathrm{P}_M(\nu_e \longrightarrow \nu_\mu) = \sin^2 2\theta_M \sin^2(\Delta m^2_M \frac{L}{4E}) \quad . \tag{5.61}$$

La probabilidad de oscilación en materia es por tanto la misma que en el vacío pero reemplazando adecuadamente los parámetros θ y Δm^2 por sus equivalentes en materia.

Cual es el efecto de la materia y cuales son sus consecuencias? Para responder a esta pregunta n ótese que el parámetro x, que mide precisamente el efecto relativo de la materia, es proporcional a la energía del neutrino E. Para estimar la constante de proporcionalidad imaginemos que tenemos un haz de neutrinos generado en un acelerador que viaje $\sim$1000 km. La densidad de electrones encontrada en el viaje será la del manto de la tierra. El splitting Δm^2 que dominará el comportamiento de tal haz será el Δm^2 que gobierna tambien el comportamiento de los neutrinos atmosfericos, y cuyo tamaño es aproxiamadamente $2{,}4 \times 10^{-3}\mathrm{eV}^2$. Entonces

$$|x| \simeq \frac{E}{12\,\mathrm{GeV}} \quad . \tag{5.62}$$

Por tanto, en un haz con energía de, digamos, 2 GeV, el efecto de la materia es modesto pero no despreciable mientras que en un haz de digamos 20 GeV, el efecto de la materia es muy grande.

Nótese que Δm^2 está definido como $m_2^2 - m_1^2$, de manera que, dependiendo de si ν_2 es más pesado o más ligero que que ν_1, Δm^2 será positivo or negativo. Nótese además que si los neutrinos, cuya propagación en la materia hemos estudiado explicitamente, se reemplazan por antineutrinos, entonces la energía potencial de interacción V_W, positiva para neutrinos ve invertido su signo. Como resultado de estos dos efectos, el signo de x queda como se resume en la tabla 5.1.

Cuadro 5.1: El signo del parametro de efecto de la materia x.

Tipo de espectro	x para Neutrinos	x para Antineutrinos
ν_2 +pesado que ν_1	$+$	$-$
ν_2 +ligero que ν_1	$-$	$+$

5.5. Lo que nos gustaría saber

- Cuantas especies de neutrinos hay? Existen neutrinos esteriles?
- Cuales son los autoestados de masa del neutrino?
- Cual es el valor de θ_{13}?
- Son los neutrinos sus propias antipartículas?
- Violan las interacciones de neutrinos CP?

Capítulo 6

Violación de CP

6.1. Simetrías C, P , CP y CPT

La violación de CP significa que la materia y antimateria o una reacción y su conjugada CP son basicamente indistinguibles. Se manifiesta en las interacciones débiles en la forma de un conjunto de fases complejas no triviales en la matriz de mezcla de leptones y quarks. Si asumimos CPT como una simetría válida, la violación de CP da lugar a violación de T. En este capítulo revisamos las diferentes simetrías de manera general y como estas actuan en los campos para después analizar la violación de CP en el sector quark. Utilizaremos la información allí obtenida y la aplicaremos al caso de los neutrinos. Distinguiendo entre fases de Dirac y Majorana.

6.2. La transformación de paridad

La paridad o inversión espacial, generalmente llamada P, se caracteriza por invertir las coordenadas espaciales $\overrightarrow{x} \longrightarrow -\overrightarrow{x}$. Esta transformación cambia el sentido a derechas del sistema de ejes. Un sistema diestro se convierte en zurdo bajo la operación de paridad. En el espacio de momentos, la dirección de todos los momentos se invierte y el espín no se ve afectado por la paridad.

A veces la simetría bajo paridad se llama en algunos casos simetría de espejo, ya que la inversión de los ejes de coordenadas se puede obtener mediante la reflexión en un espejo y un giro de 180 grados en torno al eje perpendicular a dicho plano. De las asunciones básicas de homogeneidad e isotropía se sigue que la física es invariante bajo una rotación. Por tanto, el punto clave es si la física es invariante bajo la reflexión en un espejo. En la practica por tanto, la simetría bajo P es equivalente a la simetría bajo la

reflexión en un espejo. En cierta manera, es un hecho obvio que izquierda y derecha son distintos en la naturaleza. No representan más que meras convenciones, y no tenemos más que echar un vistazo a nuestro propio cuerpo para darnos cuenta de esto o a la mayoría de las moleculas orgánicas que tienen una versión zurda y una diestra, ocurriendo una de las dos versiones mucho más frecuentemente en la biosfera que las otras. No obstante, las asimetrías anteriores deberían considerarse como accidentes de la evolución y no como una asimetría fundamental de la naturaleza.

En teoría de campos los campos libres se transforman de la siguiente manera bajo la operación de paridad

- Campo escalar
$$\phi(\overrightarrow{x},t) \longrightarrow \phi(-\overrightarrow{x},t) \tag{6.1}$$

- Campo pseudoescalar
$$P(\overrightarrow{x},t) \longrightarrow P(-\overrightarrow{x},t) \tag{6.2}$$

- Espinor de Dirac
$$\psi(\overrightarrow{x},t) \longrightarrow \gamma_\sigma\psi(-\overrightarrow{x},t) \tag{6.3}$$
$$\overline{\psi}(\overrightarrow{x},t) \longrightarrow \overline{\psi}(-\overrightarrow{x},t)\gamma_\sigma \tag{6.4}$$

- Campo vectorial
$$V_\mu(\overrightarrow{x},t) \longrightarrow V^\mu(-\overrightarrow{x},t) \tag{6.5}$$

- Campo vectorial axial
$$A_\mu(\overrightarrow{x},t) \longrightarrow -A^\mu(-\overrightarrow{x},t) \tag{6.6}$$

Debemos mencionar también que las ecuaciones que definen la operación de paridad pueden ser más generales que las dadas arriba. Para campos complejos se deben incluir fases arbitrarias en la definición de los campos transformados. Tales fase jugarán un papel muy importante más adelante. Intentemos entender este punto pues es básico. Lo primero que nos damos cuenta es que la paridad de un campo libre carece de significado pues no es observable. Es la interacción entre campos la que fija las paridades relativas de los diversos campos, supuesto que P es una buena simetría. Si la paridad no es una buena simetría no hay manera de elegir las fases de manera que $\mathcal{L}(\overrightarrow{x},t) \longrightarrow \mathcal{L}(-\overrightarrow{x},t)$. Ilustremos esto con un ejemplo sencillo. Consideremos una partícula de espín semientero que interacciona con un objeto real de

espín cero. Podemos llamarlos nucleón y mesón respectivamente y tomar la densidad lagrangiana como

$$\mathcal{L} = i\overline{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - m\overline{\psi}\psi + \frac{1}{2}\partial^{\mu}\phi\partial_{\mu}\phi - V + \overline{\psi}(a + ib\gamma_5)\psi\phi \tag{6.7}$$

donde V es un potencial que depende de ϕ^2 y es tal que nuestro mesón tiene una masa bien definida. El último término de la ecuación anterior describe la interacción entre el nucleón y el mesón. Estas interacciones son escalares (con constante de acoplo a) y pseudoescalares (con constante de acoplo b). Estas constantes son real para garantizar que $\mathcal{L}$ sea hermítico. La hermiticidad del lagrangiano es necesaria para tener un operador de transición unitario (la matriz S). Bajo paridad

- Densidad escalar

$$\overline{\psi}(\overrightarrow{x}, t)\psi(\overrightarrow{x}, t) \longrightarrow \overline{\psi}(-\overrightarrow{x}, t)\psi(-\overrightarrow{x}, t) \tag{6.8}$$

- Densidad pseudoescalar

$$\overline{\psi}(\overrightarrow{x}, t)\gamma_5\psi(\overrightarrow{x}, t) \longrightarrow -\overline{\psi}(-\overrightarrow{x}, t)\gamma_5\psi(-\overrightarrow{x}, t) \tag{6.9}$$

relaciones que no cambian si redefinimos $\psi^P = \exp(i\eta)\psi(-\overrightarrow{x}, t)$ siendo η un número real. Por tanto, vemos que las dos piezas, escalar y pseudoescalar, en el último término requieren respectivamente $\phi(\overrightarrow{x}, t) \longrightarrow \phi(-\overrightarrow{x}, t)$ y $\phi(\overrightarrow{x}, t) \longrightarrow -\phi(-\overrightarrow{x}, t)$ para obtener invarianza bajo paridad, es decir, $\mathcal{L}(\overrightarrow{x}, t) \longrightarrow \mathcal{L}(-\overrightarrow{x}, t)$. Estos dos requerimiento son incompatibles si paridad se viola, en el modelo considerado. A continuación mostramos las propiedades de transformación de los bilineares. Estos bilineares son objetos fundamentales en física y aparecen frecuentemente, quarks y leptones se describen por espinores debido a su invarianza Lorentz de los mismos en las formas bilineares.

- Escalar

$$\overline{\psi}_1\psi_2 \longrightarrow \overline{\psi}_1\psi_2 \tag{6.10}$$

- Pseudoescalar

$$\overline{\psi}_1\gamma_5\psi_2 \longrightarrow -\overline{\psi}_1\gamma_5\psi_2 \tag{6.11}$$

- Vector

$$\overline{\psi}_1\gamma_\mu\psi_2 \longrightarrow -\overline{\psi}_1\gamma^\mu\psi_2 \tag{6.12}$$

- Axialvector

$$\overline{\psi}_1\gamma_\mu\gamma_5\psi_2 \longrightarrow -\overline{\psi}_1\gamma^\mu\gamma_5\psi_2 \tag{6.13}$$

- Tensor

$$\overline{\psi}_1 \sigma_{\mu\nu} \psi_2 \longrightarrow -\overline{\psi}_1 \sigma^{\mu\nu} \psi_2 \tag{6.14}$$

donde ψ_1 y ψ_2 son dos campos de Dirac no necesariamente iguales. Nótese que bajo paridad las coordenadas espaciales de todos los campos se invierten. A pesar de no conservarse universalemente, la paridad es fundamental en física, ya que es conservada en las interacciones electromagnéticas y fuertes.

6.3. La conjugación de carga C

A diferencia de P la conjugación de carga no tiene una anaálogo en mecánica clásica. Esta simetría está relacionada con la existencia de una antipartícula para cada partícula. En teoría de campos relativista podemos asignar partículas con carga positiva y negativa a cada campo ϕ. Es más, hay una transformación C que cambia ϕ en ϕ^+, que tiene cargas $U(1)$ opuestas, entendiendose por carga todo tipo y no sólo la eléctrica, por ejemplo el numero leptónico y bariónico,estrañeza, tercera componente de isospin etc.... El campo transformado obedece las mismas ecuaciones de movimiento que el original. La idea fundamental detrás de la simetría C es que lo que nosotros llamamos partícula o antipartícula no es más que mera convención.

A nivel de campos libres, la operación de conjugación de carga es bastante sencilla de entender. Un campo libre tiene una descomposición en serie de Fourier en términos de los operadores creación (y destrucción) asociados a partículas y antipartículas $a(a^+)$ y $b(b^+)$. Bajo conjugación de carga los operadores a y b se intercambian. La conjugación de carga cambia los signos de las cargas internas. Sin embargo, debemos tener en cuenta que C no es una buena simetría en la naturaleza.

Veamos cual es la acción de C en los campos libres y examinemos sus consecuencias en los trozos del lagrangiano de interacción. Bajo C los campos libres cambian como:

- Campo escalar

$$\phi(\overrightarrow{x}) \longrightarrow \phi(\overrightarrow{x})^+ \tag{6.15}$$

- Espinor de Dirac

$$\psi(\overrightarrow{x}, t) \longrightarrow C\overline{\psi}^T(\overrightarrow{x}, t) \tag{6.16}$$

$$\overline{\psi}(\overrightarrow{x}, t) \longrightarrow -\overline{\psi}^T(\overrightarrow{x}, t)C^{-1} \tag{6.17}$$

- Campo vectorial

$$V_\mu(\overrightarrow{x}, t) \longrightarrow -V_\mu^+(\overrightarrow{x}, t) \tag{6.18}$$

- Campo vectorial axial

$$A_\mu(\overrightarrow{x},t) \longrightarrow A_\mu^+(-\overrightarrow{x},t) \tag{6.19}$$

donde C es una matriz unitaria 4×4 que satisface la condición $C^{-1}\gamma_\mu C = -\gamma_\mu^T$, donde T significa transpuesta. La matriz C toma generalmente la forma $C = i\gamma^2\gamma^0$. De nuevo al igual que hicimos con paridad podemos incluir fases arbitrarias en las definiciones anteriores. Discutiremos estas modificaciones si fuera necesario. Veamos por último las propiedades de transformación de los bilineares bajo C

- Escalar

$$\overline{\psi}_1\psi_2 \longrightarrow \overline{\psi}_2\psi_1 \tag{6.20}$$

- Pseudoescalar

$$\overline{\psi}_1\gamma_5\psi_2 \longrightarrow -\overline{\psi}_2\gamma_5\psi_1 \tag{6.21}$$

- Vector

$$\overline{\psi}_1\gamma_\mu\psi_2 \longrightarrow -\overline{\psi}_2\gamma^\mu\psi_1 \tag{6.22}$$

- Axialvector

$$\overline{\psi}_1\gamma_\mu\gamma_5\psi_2 \longrightarrow \overline{\psi}_2\gamma^\mu\gamma_5\psi_1 \tag{6.23}$$

- Tensor

$$\overline{\psi}_1\sigma_{\mu\nu}\psi_2 \longrightarrow -\overline{\psi}_2\sigma^{\mu\nu}\psi_1 \tag{6.24}$$

6.3.1. La simetría CP

Por último apliquemos las operaciones C y P en secuencia y obtengamos la transformación de los bilineares bajo CP

- Escalar

$$\overline{\psi}_1\psi_2 \longrightarrow \overline{\psi}_2\psi_1 \tag{6.25}$$

- Pseudoescalar

$$\overline{\psi}_1\gamma_5\psi_2 \longrightarrow -\overline{\psi}_2\gamma_5\psi_1 \tag{6.26}$$

- Vector

$$\overline{\psi}_1\gamma_\mu\psi_2 \longrightarrow -\overline{\psi}_2\gamma^\mu\psi_1 \tag{6.27}$$

- Axialvector

$$\overline{\psi}_1\gamma_\mu\gamma_5\psi_2 \longrightarrow -\overline{\psi}_2\gamma^\mu\gamma_5\psi_1 \tag{6.28}$$

- Tensor

$$\overline{\psi}_1\sigma_{\mu\nu}\psi_2 \longrightarrow -\overline{\psi}_2\sigma^{\mu\nu}\psi_1 \tag{6.29}$$

6.3.2. Un breve comentario sobre el teorema CPT

Una propiedad muy importante de las teorías de campo locales invariantes Lorentz es que deben ser invariantes bajo la operación de simetría combinada CPT, tomada en cualquier orden. Por tanto, la invarianza bajo CP implica la invarianza bajo T en esas teorías. Veamos como se transforman los bilineares bajo CPT

- Escalar
$$\overline{\psi}_1\psi_2 \longrightarrow \overline{\psi}_2\psi_1 \tag{6.30}$$
- Pseudoescalar
$$\overline{\psi}_1\gamma_5\psi_2 \longrightarrow \overline{\psi}_2\gamma_5\psi_1 \tag{6.31}$$
- Vector
$$\overline{\psi}_1\gamma_\mu\psi_2 \longrightarrow -\overline{\psi}_2\gamma^\mu\psi_1 \tag{6.32}$$
- Axialvector
$$\overline{\psi}_1\gamma_\mu\gamma_5\psi_2 \longrightarrow -\overline{\psi}_2\gamma^\mu\gamma_5\psi_1 \tag{6.33}$$
- Tensor
$$\overline{\psi}_1\sigma_{\mu\nu}\psi_2 \longrightarrow \overline{\psi}_2\sigma^{\mu\nu}\psi_1 \tag{6.34}$$

Es fácil de entender, al menos intuitivamente, porqué una teoría de campos local, invariante Lorentz y con un Lagrangiano hermítico debe ser invariante bajo CPT. La clave es que el lagrangiano tiene que ser escalar o pseudoescalar, bajo transformaciones Lorentz. Este requisito no es muy exigente, en el sentido de que dada una teoría de campos es posible escribir un número infinito de términos que sean invariantes Lorentz. Si un término , digamos $\mathcal{L}_\infty$ incluye escalares y pseudoescalares entonces $\mathcal{L}_1(\overrightarrow{x},t) \longrightarrow \mathcal{L}_1^+(-\overrightarrow{x},-t)$. Puesto que el lagrangiano tiene que ser hermítico debemos tener un término $\mathcal{L}_1^+$ en el lagrangiano y CPT es respetada por la suma $\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_1^+$. Supongamos ahora que tenemos un término $\mathcal{L}_2$, en el cual haya un término vectorial V_μ. Debido a la invarianza Lorentz este índice vectorial debe contraerse con otro. Tal índice podría venir de otro vector o vector axial. Puesto que V y A se transforman de la misma manera, de nuevo CPT es una buena simetría. El índice μ podría pertenecer también a un tensor de dos o más índices. De nuevo, es fácil convencerse a si mismo de que CPT es una buena simetría.

La consecuencia más básica de la simetría CPT es la igualdad de masas de una partícula y su antipartícula. Los tiempos de vida de una partícula y su antipartícula deberían ser iguales, lo cual no es sorprendente, porque las anchura de decaimiento son equivalentes a la parte imaginaria de las masas. Otra consecuencia de CPT es que las cargas electricas de una partícula

y su antipartícula deberían ser exactamente simétricos. De igual manera, el momento magnético μ de una partícula y su antipartícula deberían ser opuestos; para los leptones, que son particulas de tipo puntual, es usual establecer esto en términos de los cocientes giromagnéticos, denotados por la letra g.

En todo caso, el mejor test de la simetría CPT viene del sistema de kaones neutros que estudiaremos posteriormente.

6.4. La violación de CP en el sector quark

En el marco del modelo estandar de las interacciones elctrodébiles , basado en la ruptura espontanea de simetría del grupo gauge

$$SU(2)_{\mathrm{L}} \times U(1)_{\mathrm{Y}} \xrightarrow{\mathrm{SSB}} U(1)_{\mathrm{em}}, \tag{6.35}$$

los efectos de violación de CP pueden originarse de las interacciones de las corrientes cargadas de los quarks con la estructura

$$D \to UW^{-}. \tag{6.36}$$

Aquí $D \in \{d, s, b\}$ and $U \in \{u, c, t\}$ denota los quarks tipo down y tipo up, respectivamente, mientras que el W^{-} es el bosón gauge $SU(2)_{\mathrm{L}}$ usual. Desde el punto de vista fenomenológico, es conveniente juntar las distintas longitudes de acoplo V_{UD} de las procesos con corrientes cargadas en en la siguiente matriz:

$$V_{\mathrm{CKM}} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix}, \tag{6.37}$$

que se conoce como la matriz de Cabibbo–Kobayashi–Maskawa (CKM). [**?**, **?**].

Desde un punto de vista teórico, esta matriz conecta los estados electrodébiles (d', s', b') con sus autoestados de masa (d, s, b) a través de la siguiente transformación unitaria:

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}. \tag{6.38}$$

Consecuentemente, V_{CKM} es realmente una matriz *unitaria*. Este hecho asegura la ausencia de corrientes neutras con cambio de sabor a nivel arbol en el modelo estandar , y es por tanto la base del famoso mecanismo de Glashow–Iliopoulos–Maiani (GIM). Si reexpresamos el lagrangiano de interacción para

corrientes cargadas no leptónicas en término de los autoestados que aparecen en la expresión anterior, llegamos a

$$\mathcal{L}_{\rm int}^{\rm CC} = -\frac{g_2}{\sqrt{2}} \left(\begin{array}{ccc} \bar{u}_{\rm L}, & \bar{c}_{\rm L}, & \bar{t}_{\rm L} \end{array} \right) \gamma^\mu V_{\rm CKM} \left(\begin{array}{c} d_{\rm L} \\ s_{\rm L} \\ b_{\rm L} \end{array} \right) W_\mu^\dagger \; + \; \text{h.c.}, \tag{6.39}$$

donde el acoplo gauge g_2 es relacionado con el grupo gauge $SU(2)_{\rm L}$, y el campo $W_\mu^{(\dagger)}$ corresponde con los bosones cargados W. Mirando a los vértices de interacción que se siguen de esta expresión observamos que los elementos de la matriz CKM describen de hecho las longitudes asociadas a los procesos con corrientes cargadas.

Tomemos el vértice $D \to UW^-$ y su conjugado CP. Puesto que la correspondiente transformación CP implica el cambio

$$V_{UD} \xrightarrow{\mathcal{CP}} V_{UD}^*, \tag{6.40}$$

podremos, en principio, acomodar la violación de CP en el modelo estandar a través de fases complejas en la matriz CKM. La pregunta crucial en este contesto es si realmente tenemos fases físicas en esta matriz.

6.5. Interacciones débiles de los quarks y la matriz de mezcla

En el modelo estandar con N generaciones la matriz CKM es una matriz $N \times N$ unitaria, y como tal debería en principio ser parametrizada con N^2 parámetros. Sin embargo, de todos ellos $2N - 1$ son fases carentes de significado físico que pueden absorberse o cambiarse a voluntad reescribiendo los campos de los quark

$$U_\alpha = e^{i\psi_\alpha} U'_\alpha \tag{6.41}$$

$$D_k = e^{i\psi_k} D'_k, \tag{6.42}$$

con esto, la matriz CKM se transforma como

$$V'_{\alpha k} = e^{i(\psi_k - \psi_\alpha)} V_{\alpha k}. \tag{6.43}$$

Nótese que no podemos eliminar $2N$ fases puesto que, si todos los ψ_α y ψ_k son iguales, no hay cambio en $V_{\alpha k}$, ya que un cambio de fase en todos los campos de quarks no tiene efecto en V. Por tanto, el número de parámetros físicos en V es

$$N^2 - (2N - 1) = (N - 1)^2. \tag{6.44}$$

Una matriz $N \times N$ ortogonal se parametriza por $N(N-1)/2$ ángulos de rotación, llamados generalmente ángulos de Euler. Una matriz unitaria es una extensión compleja de una matriz ortogonal. Por tanto, de todos los parámetros involucrados

$$\frac{1}{2}N(N-1) \tag{6.45}$$

parámetros deben identificarse como ángulos de rotación. El resto de parámetros

$$(N-1)^2 = \underbrace{\frac{1}{2}N(N-1)}_{\text{Euler angles}} + \underbrace{\frac{1}{2}(N-1)(N-2)}_{\text{complex phases}} \tag{6.46}$$

son fases de caracter físico.

Como vemos, en el caso del modelo estandar con dos generaciones no existe fáse física, sino solamente un ángulo, el ángulo de Cabibbo θ_C que puede determinarse a partir de los decays $K \longrightarrow \pi l \overline{nu}$

$$V_{\mathrm{C}} = \begin{pmatrix} \cos\theta_{\mathrm{C}} & \sin\theta_{\mathrm{C}} \\ -\sin\theta_{\mathrm{C}} & \cos\theta_{\mathrm{C}} \end{pmatrix}, \tag{6.47}$$

La matriz que obtenemos es por tanto ortogonal, lo que permite explicar la ausencia de corrientes neutras que cambian el sabor (el mecanismo de GIM), pero lo que es que es más importante, es real, con lo que CP es automaticamente conservada en el modelo estandar con dos familias. Este hecho constituyó un gran problema para el modelo estandar en su época. Una solución posible era extender el sector de Higgs del modelo estandar, o más genericamente, la violación de CP asociada al proceso de ruptura espontanea de simetría. Otro posible solución propuesta en su momento era ir más allá del modelo estandar. Finalmente, el problema puede resolverse introduciendo una tercera familia, como sugirieron Kobayashi y Maskawa en 1973

En el caso de tres generaciones, la parametrización correspondiente a la matriz 3×3 involucra cuatro parámetros: tres ángulos tipo Euler y una fase compleja. Desafortunadamente, existen muchas parametrizaciones de la matriz CKM. Nosotros no entraremos aquí en una discusión detallada de estas parametrizaciones, sino que presentaremos al lector aquellas que vayamos a utilizar en futuros desarrollos. No obstante hagamos unos comentarios generales.

Podemos escribir la matriz en cuestión como el producto de tres matrices de *rotación*, donde una de ellas involucra una fase, es decir

$$V_{CKM} = R_{23}(\theta_3, \delta) R_{12}(\theta_1, 0) R_{23}(\theta_2, 0) \tag{6.48}$$

donde $R_{ij}(\theta, \phi)$ denota una rotación unitaria en el plano ij por el ángulo θ y la fase ψ, donde $0 \leq \theta_j \leq \pi/2$ y $0 \leq \delta \leq 2\pi$. Evidentemente, podemos redefinir los planos de rotación y por tanto las matrices sin más que encontrar ángulos apropiado. Centrémonos en la matriz central R_{12}. Puesto que hemos elegido los índices 12 no podremos usar estos índices para las matrices laterales, puesto que si no no entendríamos la matriz más general. Sin embargo, podemos tomar las matrices laterales ambas con indices 23 o 31, o una de ellas con 23 y la otra con 31. Los índices de las matrices laterales se pueden tomar iguales puesto que las matrices de rotación no conmutan. Por tanto, con 12 en el medio tenemos cuatro posibilidades. Si repetimos el mismo procedimiento para los índices 23 y 31 tendremos 12 posibilidades. Más es, podemos poner la fase en cualquiera de las matrices, y por tanto tenemos 36 parametrizaciones de aspecto similar.

6.6. Requerimientos adicionales para violación de CP

Consideremos ahora las condiciones para tener violación de CP proveniente de la matriz de mezcla. Tomemos la matriz de mezcla más general $V_{CKM} = R_{23}(\theta_3, \delta)R_{12}(\theta_1, 0)R_{23}(\theta_2, 0)$. Ninguno de los ángulos de rotación puede ser 0 o $\pi/2$ si se viola CP. Por ejemplo, si θ_3 se anula, la matriz R_{23} se convierte en la matriz unidad y V se vuelve real. De igual forma, si θ_1 se anula V se convierte en una matriz de rotación en el espacio 23. De hecho, la matriz tendrá entonces 4 ceros, la primera familia no se mezcla con las otras y no habrá violación de CP. Finalmente, si todos los ángulos de rotación son distintos de 0 y $\pi/2$, para tener una matriz no real V, debemos exigir $\delta \neq 0, \pi$. En resumen, existen ocho condiciones a satisfacer por los ángulos y la fase

$$\theta_j \neq 0, \pi/2 \quad \delta \neq 0, \pi, \quad j = 1, 2, 3 \tag{6.49}$$

Tenemos por tanto un total de catorce condiciones necesarias para tener violación de CP en el modelo estandar con tres familias. Veremos como estas 14 relaciones se unifican en una sólo condición.

La relación de ortogonalidad para las dos primeras filas se escribe

$$V_{ud}V_{cd}^* + V_{us}V_{cs}^* + V_{ub}V_{cb}^* = 0. \tag{6.50}$$

Multiplicándola por $V_{us}^*V_{cs}$ y tomando la parte imaginaria obtenemos

$$Im(Q_{udcs}) = -Im(Q_{ubcs}). \tag{6.51}$$

donde $Q_{\alpha i\beta j \equiv V_{\alpha i}V_{\beta j}V^*_{\alpha j}V^*_{\beta i}}$. Por tanto, los dos cuartetos tienen partes imaginarias simétricas. Procediendo de la misma forma, es posible demostrar que, debido a la ortogonalidad de cada par de filas o columnas diferentes de V, las partes imaginarias de todos los cuartetos son iguales salvo un signo (Jarlskog 1985, Dunietz et al. 1985). Podemos por tanto definir

$$J \equiv Im(Q_{uscb}) = Im(V_{us}V_{cb}V^*_{ub}V^*_{cs}). \tag{6.52}$$

La cantidad J es por tanto una cantidad universal, en el sentido de que no depende de la parametrización. Nótese que J es independiente del convenio de fases. Por ejemplo, si modificamos la fase del quark u, entonces, debido al hecho de que uno de los elementos que aparece en J, V_{uj}, es complejo conjugado, mientras que el otro no lo es, J no cambia. De hecho, los invariantes de la matriz de mezcla son el modulo de estos elementos $V_{\alpha j}$ y la cantidad J, en el sentido de que no dependen de la parametrización elegida, y por tanto, podemos usarlos para dar una parametrización independiente del ángulo y de la fase, como haremos proximamente. Los invariantes de orden superior se pueden escribir como función de los cuartetos y del modulo, por ejemplo

$$V_{\alpha i}V_{\beta j}V_{\gamma k}V^*_{\alpha j}V^*_{\beta k}V^*_{\gamma i} = \frac{Q_{\alpha i\beta j}Q_{\beta i\gamma k}}{U_{\beta i}}. \tag{6.53}$$

El procedimiento puede fallar en algunos casos en los cuales los elementos de la matriz CKM sean cero. No consideraremos dichos casos aquí.

6.7. La matriz U_{PMNS} a la vista de CP

Como vimos cuando hablamos de oscilaciones de neutrinos el lagrangiano de las interacciones débiles mediante corrientes cargadas puede escribirse como

$$-\mathcal{L}_{W+m} = \frac{g}{\sqrt{2}}\,\overline{e_i}\,\gamma^\mu\,(V_L^\dagger U_L)_{ij}\,\nu_{Lj}\,W^-_\mu + h.c. \tag{6.54}$$

donde la matriz $U = V_L^\dagger U_L$, que se conoce como matriz de Pontecorvo-Maki-Nakawaga-Sakata y se denota usualmente por U_{PMNS}, cuyos elementos denotaremos por $V_{\alpha i}$,es una matriz unitaria 3×3 que relaciona los autoestados de masas (ν_1, ν_2, ν_3) con los de flavour $(\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau)$

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{e1} & V_{e2} & V_{e3} \\ V_{\mu 1} & V_{\mu 2} & V_{\mu 3} \\ V_{\tau 1} & V_{\tau 2} & V_{\tau 3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}. \tag{6.55}$$

Esta matriz es el análogo de la matriz CKM que discutimos anteriormente.

6.8. Cotas experimentales

Experimental Constraints

Las cotas experimentales actuales sobre los elementos de la matriz de mezcla en el sector leptónico vienen principalmente de las oscilaciones de neutrinos solares, atmosféricos y CHOOZ reactor neutrinos. Estos tres tipos de oscilaciones de neutrinos pertenecen a los llamados experimentos de desaparición, en los cuales la probabilidad de supervivencia de un autoestado de flavour ν_α viene dada como vimos por

$$P(\nu_\alpha \to \nu_\alpha) \;=\; 1 \;-\; 4\sum_{i<j}\left(|V_{\alpha i}|^2|V_{\alpha j}|^2 \sin^2 F_{ji}\right) \;, \tag{6.56}$$

donde $F_{ji} \equiv 1{,}27\Delta m^2_{ji}L/E$, con $\Delta m^2_{ji} \equiv m^2_j - m^2_i$, L es la línea base en km, y E es la energía del haz en GeV. Debido a la invarianza CPT, la probabilidad de supervivencia de neutrinos y antineutrinos en el vacío son iguales $P(\overline{\nu}_\alpha \to \overline{\nu}_\alpha) = P(\nu_\alpha \to \nu_\alpha)$. Esta igualdad puede violarse si los neutrinos y antineutrinos se propagan en la materia.

Los datos de oscilaciones de neutrinos solares ($\nu_e \to \nu_e$) y atmosféricos ($\nu_\mu \to \nu_\mu$) parecen indicar que

$$|\Delta m^2_{21}| = \Delta m^2_{\rm sun} \ll \Delta m^2_{\rm atm} = |\Delta m^2_{32}| \approx |\Delta m^2_{31}| \;. \tag{6.57}$$

Además, los datos de oscilaciones de CHOOZ ($\overline{\nu}_e \to \overline{\nu}_e$) se obtienen a la escala $\Delta m^2_{\rm chz} \approx |\Delta m^2_{32}|$. Con un buen nivel de precisión tenemos, como ya indicamos en el capítulo anterior, la expresión simplificada

$$P(\nu_e \to \nu_e) \;\approx\; 1 - \sin^2 2\theta_{\rm sun}\sin^2\left(1{,}27\frac{\Delta m^2_{\rm sun}L}{E}\right) \tag{6.58}$$

donde

$$\sin^2 2\theta_{\rm sun} \;=\; 4|V_{e1}|^2|V_{e2}|^2 \tag{6.59}$$

para neutrinos solares;

$$P(\nu_\mu \to \nu_\mu) \;\approx\; 1 - \sin^2 2\theta_{\rm atm}\sin^2\left(1{,}27\frac{\Delta m^2_{\rm atm}L}{E}\right) \tag{6.60}$$

con

$$\sin^2 2\theta_{\rm atm} \;=\; 4|V_{\mu 3}|^2\left(1 - |V_{\mu 3}|^2\right) \tag{6.61}$$

para neutrinos atmosféricos; y

$$P(\overline{\nu}_e \to \overline{\nu}_e) \;\approx\; 1 - \sin^2 2\theta_{\rm chz}\sin^2\left(1{,}27\frac{\Delta m^2_{\rm chz}L}{E}\right) \tag{6.62}$$

con

$$\sin^2 2\theta_{\rm chz} \;=\; 4|V_{e3}|^2\left(1-|V_{e3}|^2\right) \tag{6.63}$$

para el experimento de oscilaciones CHOOZ. A la vista de los datos experimentales actuales de SK, SNO , KamLAND , K2K and CHOOZ , tenemos

$$\begin{aligned}
0{,}25 \;\leq\; & \sin^2\theta_{\rm sun} \;\leq\; 0{,}4 \quad \text{or} \quad 30{,}0^\circ \;\leq\; \theta_{\rm sun} \;\leq\; 39{,}2^\circ\,, \\
0{,}92 \;<\; & \sin^2 2\theta_{\rm atm} \;\leq\; 1{,}0 \quad \text{or} \quad 36{,}8^\circ \;<\; \theta_{\rm atm} \;<\; 53{,}2^\circ\,, \\
0 \;\leq\; & \sin^2 2\theta_{\rm chz} \;<\; 0{,}1 \quad \text{or} \quad 0^\circ \;\leq\; \theta_{\rm chz} \;<\; 9{,}2^\circ\,,
\end{aligned} \tag{6.64}$$

al 90 % de nivel de confianza.

Teniendo en cuenta la unitariedad de la matriz U, podemos expresar $|V_{e1}|$, $|V_{e2}|$, $|V_{e3}|$, $|V_{\mu3}|$ and $|V_{\tau3}|$ en términos de $\theta_{\rm sun}$, $\theta_{\rm atm}$ y $\theta_{\rm chz}$:

$$\begin{aligned}
|V_{e1}| &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\cos^2\theta_{\rm chz}+\sqrt{\cos^4\theta_{\rm chz}-\sin^2 2\theta_{\rm sun}}}\;, \\
|V_{e2}| &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\cos^2\theta_{\rm chz}-\sqrt{\cos^4\theta_{\rm chz}-\sin^2 2\theta_{\rm sun}}}\;, \\
|V_{e3}| &= \sin\theta_{\rm chz}\;, \\
|V_{\mu3}| &= \sin\theta_{\rm atm}\;, \\
|V_{\tau3}| &= \sqrt{\cos^2\theta_{\rm chz}-\sin^2\theta_{\rm atm}}\;.
\end{aligned} \tag{6.65}$$

Los otros cuatro elementos de U (i.e., $|V_{\mu1}|$, $|V_{\mu2}|$, $|V_{\tau1}|$ y $|V_{\tau2}|$) no presentan restricciones. Una forma realista de conseguir ligaduras brutas pero realistas sobre estos cuatro elementos desconocidos es permitir que la fase de Dirac de violación de CP en U varíe entre n 0 y π, de manera que podamos encontrar las magnitudes máximas y mínimas de cada elemento. Para ver esto de una manera más clara adoptemos una parametrización simplificada (ver la próxima sección) en la cual omitimos las fases de Majorana de violación de CP violation:

$$U \;=\; \begin{pmatrix} c_x c_z & s_x c_z & s_z \\ -c_x s_y s_z - s_x c_y e^{-i\delta} & -s_x s_y s_z + c_x c_y e^{-i\delta} & s_y c_z \\ -c_x c_y s_z + s_x s_y e^{-i\delta} & -s_x c_y s_z - c_x s_y e^{-i\delta} & c_y c_z \end{pmatrix}\;, \tag{6.66}$$

donde $s_x \equiv \sin\theta_x$, $c_x \equiv \cos\theta_x$, y así . La fase de Dirac δ afecta a los valores de de $V_{\mu1}$, $V_{\mu2}$, $V_{\tau1}$ y $V_{\tau2}$, mientras que las fases de Majorana no tienen tales efectos. Nótese que los tres ángulos de mezcla $(\theta_x, \theta_y, \theta_z)$, se pueden escribir como

$$\tan\theta_x \;=\; \frac{|V_{e2}|}{|V_{e1}|}\;, \qquad \tan\theta_y \;=\; \frac{|V_{\mu3}|}{|V_{\tau3}|}\;, \qquad \sin\theta_z \;=\; |V_{e3}|\;. \tag{6.67}$$

Es fácil ver que

$$
\begin{aligned}
|V_{\mu 1}| &= \frac{\left||V_{e2}||V_{\tau 3}| + |V_{e1}||V_{e3}||V_{\mu 3}|\ e^{i\delta}\right|}{1-|V_{e3}|^2}\ , \\
|V_{\mu 2}| &= \frac{\left||V_{e1}||V_{\tau 3}| - |V_{e2}||V_{e3}||V_{\mu 3}|\ e^{i\delta}\right|}{1-|V_{e3}|^2}\ , \\
|V_{\tau 1}| &= \frac{\left||V_{e2}||V_{\mu 3}| - |V_{e1}||V_{e3}||V_{\tau 3}|\ e^{i\delta}\right|}{1-|V_{e3}|^2}\ , \\
|V_{\tau 2}| &= \frac{\left||V_{e1}||V_{\mu 3}| + |V_{e2}||V_{e3}||V_{\tau 3}|\ e^{i\delta}\right|}{1-|V_{e3}|^2}\ .
\end{aligned}
\tag{6.68}
$$

Variando la fase de Dirac δ de 0 a π, obtenemos los rangos más generosos para $|V_{\mu 1}|$, $|V_{\mu 2}|$, $|V_{\tau 1}|$ y $|V_{\tau 2}|$ [**?**]:

$$
\begin{aligned}
\frac{|V_{e2}||V_{\tau 3}| - |V_{e1}||V_{e3}||V_{\mu 3}|}{1-|V_{e3}|^2} &\leq |V_{\mu 1}| \leq \frac{|V_{e2}||V_{\tau 3}| + |V_{e1}||V_{e3}||V_{\mu 3}|}{1-|V_{e3}|^2}\ , \\
\frac{|V_{e1}||V_{\tau 3}| - |V_{e2}||V_{e3}||V_{\mu 3}|}{1-|V_{e3}|^2} &\leq |V_{\mu 2}| \leq \frac{|V_{e1}||V_{\tau 3}| + |V_{e2}||V_{e3}||V_{\mu 3}|}{1-|V_{e3}|^2}\ , \\
\frac{|V_{e2}||V_{\mu 3}| - |V_{e1}||V_{e3}||V_{\tau 3}|}{1-|V_{e3}|^2} &\leq |V_{\tau 1}| \leq \frac{|V_{e2}||V_{\mu 3}| + |V_{e1}||V_{e3}||V_{\tau 3}|}{1-|V_{e3}|^2}\ , \\
\frac{|V_{e1}||V_{\mu 3}| - |V_{e2}||V_{e3}||V_{\tau 3}|}{1-|V_{e3}|^2} &\leq |V_{\tau 2}| \leq \frac{|V_{e1}||V_{\mu 3}| + |V_{e2}||V_{e3}||V_{\tau 3}|}{1-|V_{e3}|^2}
\end{aligned}
\tag{6.69}
$$

Nótese que la cota inferior y superior de cada elemento de matriz coinciden en el límite $|V_{e3}| \to 0$. Debido al pequeño valor de $|V_{e3}|$, los rangos obtenidos deberían ser bastante restrictivos.

Usando los valores de $\theta_{\rm sun}$, $\theta_{\rm atm}$ and $\theta_{\rm chz}$ calculamos $|V_{e1}|$, $|V_{e2}|$, $|V_{e3}|$, $|V_{\mu 3}|$ and $|V_{\tau 3}|$. Entonces, los rangos permitidos para $|V_{\mu 1}|$, $|V_{\mu 2}|$, $|V_{\tau 1}|$ y $|V_{\tau 2}|$ pueden encontrarse con ayuda de las relaciones anteriores. El resultado numérico se presenta a continuación

$$
|V| = \begin{pmatrix} 0{,}70-0{,}87 & 0{,}50-0{,}69 & <0{,}16 \\ 0{,}20-0{,}61 & 0{,}34-0{,}73 & 0{,}60-0{,}80 \\ 0{,}21-0{,}63 & 0{,}36-0{,}74 & 0{,}58-0{,}80 \end{pmatrix}\ . \tag{6.70}
$$

6.9. Parametrización estándar

Standard Parametrization

El flavour mixing entre n familias leptónicas diferentes viene en general descrito por una matriz unitaria $n \times n$ U, cuyo número de parámetros independientes depende del tipo de neutrinos. Si los neutrinos son partículas

de Dirac, como vimos para el caso de los quarks, U puede parametrizarse en términos de $n(n-1)/2$ ángulos de rotación y $(n-1)(n-2)/2$ fases. Si por el contrario los neutrinos son partículas de Majorana una parametrización completa de U requerirá $n(n-1)/2$ angulos de rotación y el mismo número de fases

Como puede verse el flavour mixing de leptones cargados y neutrinos de Dirac es completamente análogo al de los quarks. Con independencia de la libertad de asignación de fases existen nueve representaciones matematicamente equivalentes pero estructuralmente diferentes para $n = 3$. Una de ella hace la física subyacente a la generación de masas y a la violación de CP más transparente, o es más útil en el análisis de los experimentos de oscilaciones de neutrinos.

La matriz de flavour mixing 3×3 se puede expresar como el producto de tres matrices unitarias O_1, O_2 y O_3, correspondientes a rotaciones simples en los planos complejos (1,2), (2,3) y (3,1) :

$$\begin{aligned}
O_1(\theta_1, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1) &= \begin{pmatrix} c_1 e^{i\alpha_1} & s_1 e^{-i\beta_1} & 0 \\ -s_1 e^{i\beta_1} & c_1 e^{-i\alpha_1} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\gamma_1} \end{pmatrix} , \\
O_2(\theta_2, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2) &= \begin{pmatrix} e^{i\gamma_2} & 0 & 0 \\ 0 & c_2 e^{i\alpha_2} & s_2 e^{-i\beta_2} \\ 0 & -s_2 e^{i\beta_2} & c_2 e^{-i\alpha_2} \end{pmatrix} , \\
O_3(\theta_3, \alpha_3, \beta_3, \gamma_3) &= \begin{pmatrix} c_3 e^{i\alpha_3} & 0 & s_3 e^{-i\beta_3} \\ 0 & e^{i\gamma_3} & 0 \\ -s_3 e^{i\beta_3} & 0 & c_3 e^{-i\alpha_3} \end{pmatrix} ,
\end{aligned} \tag{6.71}$$

donde $s_i \equiv \sin\theta_i$ and $c_i \equiv \cos\theta_i$ (para $i = 1, 2, 3$). Obviamente $O_i O_i^\dagger = O_i^\dagger O_i = \mathbf{1}$ tenemos, y cualesquiera dos matrices de rotación no conmutan. Tenemos doce formas distintas de ordenar el producto de O_1, O_2 y O_3, que pueden cubrir completamente el espacio 3×3, proporcionando una descripción completa de U. Explicitamente, seis de las diferentes combinaciones pertenecen al tipo

$$V = O_i(\theta_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i) \otimes O_j(\theta_j, \alpha_j, \beta_j, \gamma_j) \otimes O_i(\theta_i', \alpha_i', \beta_i', \gamma_i') \tag{6.72}$$

con $i \neq j$, donde la matriz de rotación compleja O_i aparece dos veces; las otras seis son del tipo

$$V = O_i(\theta_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i) \otimes O_j(\theta_j, \alpha_j, \beta_j, \gamma_j) \otimes O_k(\theta_k, \alpha_k, \beta_k, \gamma_k) \tag{6.73}$$

con $i \neq j \neq k$, en las cuales las rotaciones tienen lugar en tres planos complejos diferentes. Nótese que los productos $O_i O_j O_i$ and $O_i O_k O_i$ (para $i \neq k$)

están correlacionados los unos con los otros si los parametros de fase relevantes se apagan. Por tanto, sólo nueve de las doce parametrizaciones, tres del primer tipo y seis del segundo son estructuralemente diferentes.

En cada una de estas nueve parametrizaciones existen aparentemente nueve parámetros. Seis de ellos o sus combinaciones se pueden absorber redefiniendo las fases arbitrarias de los leptones cargados y una fase comun de los campos neutrino. Si los neutrinos son partículas de Dirac podemos tambien redefinir las fases arbitrarias de los campos de neutrino de Dirac , reduciendo el número de parámetros de fase restantes de tres a uno. En este caso U contiene una única fase de violación de CP de naturaleza Dirac. Si los neutrinos son partículas de Majorana, no existe en cambio libertad de recolocar las fases relativas de los campos de Majorana. Por tanto, tres parámetros de fase no triviales aparecen en la matriz de mezcla tipo Majorana. Dos de las tres fases de violación de CP pueden factorizarse como fases "puramente" Majorana mediante una asignación adecuada de los campos de los leptones cargados, la restante se identifica como una fase tipo Dirac. Los efectos de violación de CP en oscilaciones neutrinos normales dependen sólo de la fase tipo Dirac.

De todas las posibles parametrizaciones resulta interesante la siguiente:

$$V = \begin{pmatrix} c_x c_z & s_x c_z & s_z \\ -c_x s_y s_z - s_x c_y e^{-i\delta} & -s_x s_y s_z + c_x c_y e^{-i\delta} & s_y c_z \\ -c_x c_y s_z + s_x s_y e^{-i\delta} & -s_x c_y s_z - c_x s_y e^{-i\delta} & c_y c_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\rho} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6.74}$$

donde, al igual que antes, $s_x \equiv \sin\theta_x$, $c_y \equiv \cos\theta_y$, etc.... Sin perdida de generalidad , podemos recolocar los tres ángulos de mezcla en el primer cuadrante. Valores arbitrarios entre 0 y 2π están permitidos para la fase de violación de CP de Dirac δ y para las fases de Majorana ρ y σ. Uno de los meritos de esta parametrización es que sus tres ángulos de mezcla $(\theta_x, \theta_y, \theta_z)$ están directamente relacionados con los angulos de mezcla de oscilaciones de neutrinos solares, atmosféricos y CHOOZ

$$\theta_x \approx \theta_{\rm sun} \ , \qquad \theta_y \approx \theta_{\rm atm} \ , \qquad \theta_z \approx \theta_{\rm chz} \ , \tag{6.75}$$

Otras parametrizaciones no son capaces de obtener relaciones tan sencilla entres las cantidades de mezcla fundamentales y los observables experimentales relevantes.

Los efectos de violación de CP en oscilaciones de neutrinos se miden por el parámetro de Jarlskog que ya introducimos para quarks, J , y que resulta ser proporcional a $\sin\delta$ de la siguiente manera:

$$J \approx \sin\theta_{\rm sun}\cos\theta_{\rm sun}\sin\theta_{\rm atm}\cos\theta_{\rm atm}\sin\theta_{\rm chz}\cos^2\theta_{\rm chz}\sin\delta \ . \tag{6.76}$$

$P(\nu_\beta \to \nu_\alpha)$ or $P(\overline{\nu}_\alpha \to \overline{\nu}_\beta)$ can directly be read off from (3.26) through the replacement $J \Longrightarrow -J$ (i.e., $V \Longrightarrow V^*$). Es fácil ver que la asimetría de violación de CP entre $P(\nu_\alpha \to \nu_\beta)$ y $P(\overline{\nu}_\alpha \to \overline{\nu}_\beta)$ o equivalentemente la violación de T entre $P(\nu_\alpha \to \nu_\beta)$ y $P(\nu_\beta \to \nu_\alpha)$: resulta ser

$$\begin{aligned} \Delta P &\equiv P(\nu_\alpha \to \nu_\beta) - P(\overline{\nu}_\alpha \to \overline{\nu}_\beta) \\ &= P(\nu_\alpha \to \nu_\beta) - P(\nu_\beta \to \nu_\alpha) \\ &= -16J \sin F_{21} \sin F_{31} \sin F_{32} \ . \end{aligned} \tag{6.77}$$

La determinación de J a partir de ΔP nos permitirá extraer la fase de violación de CP δ,siempre y cuando el resto de ángulos de mezcla $(\theta_x, \theta_y, \theta_z)$ hayan sido medidos de alguna en algún lado. En experimentos de oscilaciones prácticos sin embargo,todas las cantidades medibles pueden ser contaminadas por efectos de la materia terrestre. Por tanto los parámetros fundamentales de la mezcla en el sector leptónico deben desentrañarse de aquellos corregidos por la materia. No entraremos aquí en este tipo de cuestiones.

En lo que respecto a las fases Majorana ρ y σ, que no tienen que ver nada con las oscilaciones de neutrinos usuales, hemos situado la fase de Dirac δ de manera que los elementos de matriz de la primera fila y la tercera columna de U sean reales. Como consecuencia de esto, la fase δ no aparece en el término de masa edectivo del neutrinoless double beta decay, que si es sensible a una combinación de las fases de Majorana.

Una pregunta importante es si las dos fases de Majorana ρ y σ se pueden determinar separadamente mediante otros procesos que no conserven el número leptónico, diferentes del neutrinoless double beta decay. Aunque la respuesta es en principio afirmativa, en la practica parece no serlo. El principal problema es que los procesos con violación del número leptónico , en los cuales aparecen las fases de Majorana, están suprimidos en magnitud por un factor extremadamente pequeño comparado con las interacciones débiles normales. Por tanto, es muy dificil, o incluso imposible, medir o acotar ρ y σ en cualquier otro experimento distinto del neutrinoless double beta decay. Desde el punto de vista teórico calcular o predecir los ángulos de mezcla y las fases de violación de CP sobre una base dinámica sólida es también un gran reto.

6.10. Fases de la matriz de mezcla para neutrinos Dirac

6.11. Fases de la matriz de mezcla para neutrinos Majorana

6.12. Violación de CP es oscilaciones de neutrinos

Capítulo 7

Cosmología y neutrinos

7.1. Introducción

La cosmología de neutrinos es un ejemplo fascinante de la fecunda interacción entre físicos de partículas y astrofísica que siempre he venido defendiendo. En la actualidad la gente que trabaja es este campo empieza a darse cuenta de que los avances en este campos precisan de un esfuerzo combinado en ambas áreas.

Desde el punto de vista de los cosmólogos la idea de que los neutrinos masivos podriar jugar un papel significativo en la historia del Universo y en la formación de estructuras ha sido discutida durante más de treinta años, primero como una mera especulación. Sin embargo, hoy en día sabemos a partir de los resultados experimentales de oscilaciones de neutrinos que estos deben ser masivos. Al menos dos estados de neutrinos tienen una masa suficientemente grande como para ser no relativistas hoy en día, constituyendo por tanto una pequeña fracción de la materia oscura del Universo. En una etapa como la actual en la que la cosmología, pese a quien le pese, está alcanzando un grado de precisión alto, y en algunos casos competitivo con los experimentos en aceleradores, gracias a la gran cantidad de datos observacionales, es inevitable tener en cuenta la presencia de neutrinos masivos. En particular, el espectro de potencias de la densidad de materia observable está amortiguado a pequeñas escalas debido a los neutrinos masivos. Este efecto puede variar desde unos pocos por cien para masas $0{,}05 - 0{,}1$ eV, los valores mínimos permitidos por las oscilaciones, a $10 - 20$ por ciento en el límite de tres masas degeneradas.

Desde el punto de vista de los físicos de partículas la meta de los experimentos terrestres como el neutrinoless doble beta deca es fijar la escala absoluta de la masa del neutrino, una tarea dificil a pesar de los tremendos

esfuerzos y los muy prometedores experimentos programados. Las mejores cotas actuales no vienen sin embargo de estos experimentos sino del análisis de los datos cosmológicos, del requerimiento de que los neutrinos no diluyan demasiado demasiado las estructuras cosmoógicas a pequeñas escalas. Recientemente los límites cosmológicos en las masas de los neutrinos progresaron de manera espectacular, gracias en gran medida a la observación precisa del fondo cósmico de microondas por el satélite $WMAP$ y a los resultados de una nueva generación de sondeos de cielo profundo. Los físicos de neutrinos miran con ansiedad hacia el desarrollo de este nuevo campo puesto que en los proximos años muchas observaciones cosmológicas estarán disponibles con una precisión sin precedentes.

7.2. El fondo cósmico de neutrinos

La existencia de un mar primordial de neutrinos es una predicción es una predicción genérica del modelo estándar de big bang, en un número ligeramente menor que el de fotones que constituyen el CMB. Producidos a altas temperaturas por interacciones débiles frecuentes, los neutrinos cósmicos se mantuvieron en equilibrio hasta que estos procesos llegaron a ser inefectivos en el curso de la expansión. Mientras se encontraban acoplados al resto del plasma tenían un espectro de momentos con una distribución de equilibrio de Fermi-Dirac a temperatura T

$$f_{\rm eq}(p) = \left[\exp\left(\frac{p-\mu_\nu}{T}\right)+1\right]^{-1} . \tag{7.1}$$

donde hemos incluido un potencial químico μ_ν para el neutrino, que podría existir en caso de una asimetría neutrino-antineutrino. Las cotas actuales en el valor común del parámetro de degeneración del neutrino son $-0{,}05 < \xi_v < 0{,}07$ a 2σ. Por tanto la contribución de una asimetría neutrino antineutrino puede ignorarse.

Al enfriarse el universo, la tasa de interacciones débiles Γ_ν cae por debajo del ritmo de expansión dado por el parámetro de Hubble y se dice entonces que los neutrinos se desacoplan del resto del plasma. Una estimación simple de la temperatura del desacoplo puede encontrarse igualando el valor termicamente promediado de la tasa de interacción débil

$$\Gamma_\nu = \langle \sigma_\nu \, n_\nu \rangle \ , \tag{7.2}$$

donde $\sigma_\nu \propto G_F^2$ es la sección eficaz de los procesos electron-neutrino con G_F la constante de Fermi y n_ν la densidad de número de neutrinos. La tasa de

expansión viene dada por

$$H = \sqrt{\frac{8\pi\rho}{3M_P^2}} \ , \tag{7.3}$$

donde ρ es la densidad de energía total y M_P es la masa de Planck. Si aproximamos los factores numéricos a la unidad, con $\Gamma_\nu \approx G_F^2 T^5$ y $H \approx T^2/M_P$, obtenemos la estimación $T_{\rm dec} \approx 1$ MeV.

Aunque el desacoplo de los neutrinos no viene descrito por una única $T_{\rm dec}$, puede aproximarse en muy buena aproximación por un proceso instantaneo. En esta aproximación el espectro de la ecuación (7.1) se ve preservado después del desacoplo, puesto que tanto los momentos de los neutrinos como la temperatura sufren redshift identicamente con la expansión del Universo. En otras palabras, la densidad de número de nuetrinos no interactuantes permanece constante en un volumen comóvil despues del desacoplo.

Sabemos que los neutrinos activos no pueden tener masas mucho mayores que 1 eV, de manera que son ultrarelativistas en el momento del desacoplo. Por esta razón la distribución de momentos de la ecuación (7.1) no depende de las masas del neutrino, incluso después del desacoplo, es decir, no hay una energía del neutrino en la exponencial de $f_{\rm eq}(p)$.

Al calcular cantidades relacionadas con este tipo de neutrinos relic se deben tener en cuenta los diversos grados de libertad por flavour. Si los neutrinos son partículas sin masa o partículas de Majorana, habrá dos grados de libertad por cada sabor, uno para neutrinos (un estado de helicidad negativa) y otro para antineutrinos (un estado de helicidad positiva). Sin embargo, para neutrino de tipo Dirac hay en principio dos grados de libertad adicionales correspondientes a los dos estados de helicidad. Sin embargo los grados de libertad extra deberían incluirse en el cálculo solamente si están poblados y en equilibrio antes del momento del desacoplo de los neutrinos. En la práctica los neutrinos de Dirac con la helicidad *erronea* no interactuan con el plasma a temperaturas del orden de MeV y tienen una densidad tendiente a cero con respecto a los left-handed usuales (a menos que los neutrinos tengan masas muy cercanas al rango de keV, pero tales masas quedan excluidas para los neutrinos activos). Por tanto, la densidad de neutrinos activos no depende de su naturaleza, tanto para partículas Dirac como para Majorana.

Poco después del desacoplo de los neutrinos la temperatura del fotón cae por debajo de la masa del electrón, favoreciendo la aniquilación $e^\pm$ que calienta los fotones. Si asumimos que esta transferencia de entropía no afecta a los neutrinos debido a que estos están totalmente desacoplados, es fácil calcular el cociente entre la temperatura de los photons y los neutrinos $T_\gamma/T_\nu = (11/4)^{1/3} \simeq 1{,}40102$. Cualquier cantidad relacionado con los neutrinos iniciales debería calcularse a tiempos posterior con el espectro (7.1)

y T_ν. Por ejemplo, la densidad de número por flavour viene fijada por la temperatura,

$$n_\nu = \frac{3}{11}\, n_\gamma = \frac{6\zeta(3)}{11\pi^2}\, T_\gamma^3 \ , \tag{7.4}$$

que proporciona el valor actual de 113 neutrinos y antineutrinos de cada flavour por cm^3. Sin embargo, la densidad de energía para neutrinos masivos debería en principio calcularse numericamente, con dos límites analíticos bien definidos,

$$\begin{aligned} \rho_\nu(m_\nu \ll T_\nu) &= \frac{7\pi^2}{120}\left(\frac{4}{11}\right)^{4/3} T_\gamma^4 \ , \\ \rho_\nu(m_\nu \gg T_\nu) &= m_\nu n_\nu \ . \end{aligned} \tag{7.5}$$

Por tanto la contribución de los neutrinos masivos a la densidad de energía en el límite no relativista es una función de la masa (o la suma de las masas si las masas de todos son mucho mayores que la temperatura).

En analisis más refinados del desacoplo de los neutrinos, la imagen estandar mostrada arriba se ve modificada: los procesos de desacoplo de neutrinos y aniquilación $e^\pm$ estan suficientemente próximos en el tiempo como para que las interacciones entre $e^\pm$ y neutrinos existan. Estos procesos son más eficientes cuanto mayor son las energías del neutrino, dando lugar a distorsiones no térmicas en el espectro del neutrino, y a un incremento ligeramente menor de la temperatura comóvil del fotón. Un cálculo detallado del proceso de desacoplo de neutrinos no instantaneo pasa por resolver las conocidas como ecuaciones de Boltzmann para el espectro del neutrino, un conjunto de ecuaciones cinéticas integrodiferenciales que son difícil de resolver numericamente. El lector entenderá que esto va más allá de la profundidad de este texto, por lo que no entraremos más en detalle en esto.

7.3. Radiación extra y el número de neutrinos efectivos

Los neutrinos fijan la tasa de expansión durante la era cosmológica en la cual el Universo se encuentra dominado por radiación.La contribución al contenido total de radiación se puede parametrizar en términos del número efectivo de neutrinos mediante

$$\rho_{\rm R} = \left[1 + \frac{7}{8}\left(\frac{4}{11}\right)^{4/3} N_{\rm eff}\right] \rho_\gamma \ , \tag{7.6}$$

Figura 7.1: Cotas sobre $N_{\rm eff}$ de BBN incluyendo D and ^{4}He (contornos al 68 % y 95 % CL) y de los análisi combinados de BBN (sólo D) y datos del CMB.$\omega_{\rm b} = \Omega_{\rm b} h^2 \simeq 10^{10}(\eta_{\rm b}/274)$.

donde ρ_γ es la densidad de energía de fotones, cuyo valor hoy en día se conoce de las medidas de la temperatura del CMB. Esta ecuación es válida cuando el desacoplo del neutrino es completo y permanece válida siempre y cuando los neutrinos sean relativistas.

Sabemos por los datos de los aceleradores que el número de neutrinos activos es 3, mientras que del análisis del desacoplo del neutrino sabemos que estos tres neutrinos activos contribuyen como $N_{\rm eff} = 3{,}046$. Cualquier separación de este último valor sería debido a características no estandar del neutrino o a otras relics relativistas.

Daremos aquí un breve resumen de las cotas más recientes a $N_{\rm eff}$ procedentes de datos cosmológicos.

El valor de $N_{\rm eff}$ esta constreñido en la epoca de BBN por la comparación de las predicciones teóricas y los datos experimentales de las abundancias primordiales de elementos ligeros, las cuales dependen también del cociente barión-fotón $\eta_{\rm b} = n_{\rm b}/n_\gamma$. El efecto principal de $N_{\rm eff}$ es fijar la tasa de expansión Hubble mediante su contribución a la densidad de energía total. Esto por su parte, cambia la temperatura de freezing del cociente neutrón-a-protón, produciendo entonces una abudancia diferente de ^{4}He.

Las cotas BBN sobre $N_{\rm eff}$ han sido reanalizadas recientemente tomando como input el valor de la densidad de bariones derivados del primer año de datos de WMAP $\eta_{\rm CMB} = 6{,}14 \pm 0{,}25$. En la Fig. 7.1 se muestran los resultados obtenidos, donde el rango permitido $N_{\rm eff} = 2{,}5^{+1{,}1}_{-0{,}9}$ (95 % CL) se infirió de los datos de abundancias de elementos ligeros. Este rango es perfectamente compatible con la predicción estandar de 3,046. Sin embargo, debemos ser cautos en la interpretación del rango permitido por BBN para $N_{\rm eff}$, como el de la figura 7.1. Es bien sabido que el principar problema al derivar las abundancias primordiales de las observaciones de fuentes astrofísicas es la existencia de sistemáticos no tenidos en cuentas, en particular para el ^{4}He.

Cotas independientes sobre el contenido de radiación del Universo en una epoca posterior se pueden extraer del análisis del espectro de potencias de las anisotropías del CMB. Asumiendo un conjunto mínimo de parámetros cosmológicos y un universo plano se tiene $N_{\rm eff} = 3{,}5^{+3{,}3}_{-2{,}1}$ (95 % CL) mediante la combinación de los datos del primer año de WMAP junto con otros de CMB y LSS. La adición de los datos de supernovas y de WMAPIII produce

una reduccion del rango permitido $N_{\rm eff} = 4{,}2^{+1{,}2}_{-1{,}7}$ (con los últimos datos de BOOMERANG) y $N_{\rm eff} = 3{,}3^{+0{,}9}_{-4{,}4}$ (con los de WMAPIII).

7.4. Neutrinos masivos como materia oscura

A priori, los neutrinos masivos son excelentes candidatos para contribuir a la densidad de materia oscura, en particular porque estamos seguros de que existen, a diferencia del resto de partículas candidatas. Junto con los fotones del CMB los neutrinos se pueden encontrar en todos los lugares del Universo con una densidad de número de 339 neutrinos y antineutrinos por cm^3. Dependiendo del valor de la masa la densidad se ve aumentada cuando los neutrinos caen en los pozos gravitacionales.

Además de lo anterior, es fácil tener una contribución del neutrino de orden unidad al valor actual de la densidad de energía del Universo considerando tan sólo masas de eV para los neutrinos. En tal caso, todos los neutrinos deberían compartir la misma masa m_0 y su densidad de energías en unidades de la densidad crítica es

$$\Omega_\nu = \frac{\rho_\nu}{\rho_{\rm c}} = \frac{\sum_i m_i}{93{,}14\, h^2 \text{ eV}} \ , \tag{7.7}$$

donde h es el valor actual del parametro de Hubble en unidades de 100 km s^{-1} Mpc^{-1} y $\sum_i m_i = 3m_0$ Incluso si los tres neutrinos son no degenerados en masa la ecuación (7.7) se puede aplicar con seguridad. De hecho, sabemos por los datos de las oscilaciones de neutrinos que al menos dos de los neutrinos son no relativistas hoy en día, puesto que tanto $(\Delta m^2_{31})^{1/2} \simeq 0{,}047$ eV como $(\Delta m^2_{21})^{1/2} \simeq 0{,}009$ eV son mayores que la temperatura $T_\nu \simeq 1{,}96$ K $\simeq 1{,}7 \times 10^{-4}$ eV. Si el tercer neutrino es muy ligero y aun relativista su contribución relativa a Ω_ν es desprecible y la ecuación (7.7) sigue siendo una excelente aproximación a la densidad total de energía.

Si exigimos que los neutrinos no deberían ser tan pesados como para cerrar el universo ($\Omega_\nu < 1$), obtenemos una cota superior $m_0 \leq 15$ eV para el valor absoluto de la escala de masas del neutrino $m_0 = \sum_i m_i/3$ (con $h = 0{,}7$). Este argumento se uso hace ya muchos aos (1966,1972) por Gershtein y Zeldovich. Puesto que de los datos actuales sabemos que la contribución aproximada de materia es $\Omega_{\rm m} \simeq 0{,}3$, las masas del neutrino deberían obedecer la cota mas restrictiva $m_0 \leq 5$ eV.

Figura 8.1: El espectro de potencias de las anisotropías definidas en las Eq. 8.2 y 8.3 como función del multipolo, l.

Capítulo 8

Leptogénesis

El entendimiento de la asimetría bariónica constituye un reto tanto para la física de partículas como para la cosmología. En un Universo en expansión, fuera del equilibrio, la asimetría bariónica puede generarse dinamicamente mediante conjugación de carga,(C), de carga-paridad (CP) y interacciones entre quarks y leptones que violen el número bariónico (B). Las posibles realizaciones de estas condiciones, conocidas como condiciones de Sakharov se han estudiado durante décadas. La reciente evidencia de una masa para los neutrinos ha dado lugar a una gran cantidad de trabajo en leptogenesis, materia de especial interés puesto que la asimetría bariónica en este escenerio viene fundamentalmente determinada por las propiedades de los neutrinos. .

8.0.1. Evidencias de la asimetría en el número bariónico

Uno de los principales éxitos del modelo consmológico estándar es la predicción de la abundancia de elementos ligeros, D, ^{3}He, ^{4}He and ^{7}Li. El acuerdo entre la teoría y la observación se obtiene para un cierto rango del parámetro, η_B, que es el cociente de la densidad de número bariónico, n_B, a la densidad de fotones, n_γ,

$$\eta_B^{\rm BBN} = \frac{n_B}{n_\gamma} = (2{,}6 - 6{,}2) \times 10^{-10} \ . \tag{8.1}$$

El fondo cósmico de microondas no es un baño de radiación perfectamente isotrópico. Las pequeñas anisotropias en temperatura se analizan generalmente descomponiendo la señal en armónicos esféricos, en términos de los

ángulos polares θ y ϕ en el cielo,

$$\frac{\Delta T}{T} = \sum_{l,m} a_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi) \ , \tag{8.2}$$

donde a_{lm} son los coeficientes de la expansión. El espectro de potencias se define mediante

$$C_l = \left\langle |a_{lm}|^2 \right\rangle \ , \tag{8.3}$$

y es estándar dibujar la cantidad $l(l+1)C_l$ como función de l . Las medidas del CMB nos muestran que la temperatura actual del Universo es $T_{now} \sim 3^o K$. Debido a la estadística de Bose-Einstein la densidad de número de fotones, n_γ, escalea como T^3. Con estos dos ingredientes obtenemos una densidad de número de fotones del orden de $411/\text{cm}^3$. La densidad de número de bariones es más dificil de contar puesto que sólo una pequeña fracción forma estrellas y otros objetos luminosos. Existen dos pruebas indirectas que apuntan a la misma densidad bariónica. Las medidas de las anisotropías del CMB muestran las oscilaciones acústicas del fluido de bariones/fotones. La Fig. 8.1 ilustra la dependencia como dependen las anisotropías del parámetro n_B/n_γ. La densidad de número bariónico , $n_B \sim 1/\text{m}^3$, se obtiene de la anisotropía en el in CMB, $\Omega_B = 0{,}044$. Otra prueba indirecta es la nucleosíntesis primordial(BBN), cuyas predicciones dependen de n_B/n_γ a través de los procesos mostrados en la figura Fig. 8.2. El valor de n_B/n_γ deducido a partir de la abundancia primordial de deuterio está de acuerdo con el obtenido por WMAP. Para ^{4}He y ^{7}Li, existen sin embargo discrepancias que pueden ser debidas a un infraestimación de los errores. Combinando las medidas de WMAP y las abundancias de deuterio tenemos ,

$$\frac{n_B}{n_\gamma} \equiv \eta_B = (6{,}1 \pm 0{,}3) \times 10^{-10} \ . \tag{8.4}$$

8.0.2. Condiciones de Sakharov

Una asimetría materia-antimateria puede generarse de manera dinámica en un universo en expansión si las interacciones entre partículas y la evolución cosmológica satisfacen las tres condiciones de Sakharov : (i) Violación del número bariónico; (ii) violación de C y CP; (iii) no equilibrio térmico.

Figura 8.2: Principales reacciones que determinan la abundancia de elementos ligeros

Violacion del número bariónico

Puesto que empezamos con un Universo simétrico en bariones ($B = 0$), y evolucionamos a un Universo donde $B \neq 0$, la violación del número bariónico es una condición necesaria. Dicha violación del número bariónico ocurre de manera natural en las teorías de Gran Unificación (GUT), puesto que los quarks y los leptones están unificados en las mismas representaciones irreducibles. Es por tanto posible tener bosones gauge y escalares mediando interacciones entre fermiones con diferentes números bariónicos. En el modelo estándar, por el contrario, el número bariónico y el número leptónico son simetrías adicionales. Por tanto, no es posible violar dichas simetrías al nivel arbol. t'Hooft se dió cuenta de que efectos no perturbativos podrían dar lugar a procesos que violaran $(B + L)$, pero que preservaran $(B - L)$. Classicamente, B y L son conservados,

$$B = \int d^3x J_0^B(x), \quad L = \int d^3x J_0^L(x) \ , \tag{8.5}$$

donde las corrientes asociadas con B y L vienen dadas por,

$$J_\mu^B = \frac{1}{3}\sum_i \left(\overline{q}_{L_i}\gamma_\mu q_{L_i} - \overline{u}^c_{L_i}\gamma_\mu u^c_{L_i} - \overline{d}^c_{L_i}\gamma_\mu d^c_{L_i}\right) \ , \tag{8.6}$$

$$J_\mu^L = \sum_i \left(\overline{\ell}_{L_i}\gamma_\mu \ell_{L_i} - \overline{e}^c_{L_i}\gamma_\mu e^c_{L_i}\right) \ . \tag{8.7}$$

q_L se refiere al doblete quark $SU(2)_L$, mientras que u_L y d_L se refieren a los singletes quark $SU(2)_L$. De manera similar, ℓ_L se refiere a los dobletes leptónicos $SU(2)_L$ y e_L a los singletes de leptones cargados $SU(2)_L$. El suíndice i es el índice de la generación . Aunque B y L se conservan individualmente a nivel árbol, las anomalías triangulares de Adler-Bell-Jackiw (ABJ) triangular anomalies [**?**] no se anulan y por tanto B y L son anómalos al nivel cuántico mediante interacciones con los campos gauge electrodebiles en los diagramas triangulares. En otras palabras, las divergencias de las corrientes asociadas con B y L no se anulan al nivel cuántico, y vienen dadas por

$$\partial_\mu J_B^\mu = \partial_\mu J_L^\mu = \frac{N_f}{32\pi^2}\left(g^2 W^p_{\mu\nu}\widetilde{W}^{p\mu\nu} - g'^2 B_{\mu\nu}\widetilde{B}^{\mu\nu}\right) \ , \tag{8.8}$$

donde $W_{\mu\nu}$ y $B_{\mu\nu}$ son las intensidades de campo de $SU(2)_L$ y $U(1)_Y$.

$$W^p_{\mu\nu} = \partial_\mu W^p_\nu - \partial_\nu W^p_\mu \tag{8.9}$$

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \ , \tag{8.10}$$

respectivamente, con correspondientes acoplos gauge constantes g y g', y N_f es en número de generaciones de fermiones. Como $\partial^\mu(J_\mu^B - J_\mu^L) = 0$, $(B - L)$

esta conservada . Sin embargo , $(B+L)$ es violada con la divergencia de la corriente dada por,

$$\partial^\mu (J^B_\mu + J^L_\mu) = 2N_F \partial_\mu K^\mu \ , \tag{8.11}$$

donde

$$\begin{aligned} K^\mu &= -\frac{g^2}{32\pi^2} 2\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} W^p_\nu (\partial_\rho W^p_\sigma + \frac{g}{3}\epsilon^{pqr} W^q_\rho W^r_\sigma) \\ &+ \frac{g'^2}{32\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} B_\nu B_{\rho\sigma} \ . \end{aligned} \tag{8.12}$$

Esta violación se debe a la estructura de vacío de las teorías gauge no abelianas. Los cambios en los números B y L se relacionan con los cambios en las cargas topológicas ,

$$\begin{aligned} B(t_f) - B(t_i) &= \int_{t_i}^{t_f} dt \int d^3x \ \partial^\mu J^B_\mu \\ &= N_f [N_{cs}(t_f) - N_{cs}(t_i)] \ , \end{aligned} \tag{8.13}$$

donde la carga topológica del campo gauge (*i.e.* el número de Chern-Simons N_{cs} viene dado por,

$$N_{cs}(t) = \frac{g^3}{96\pi^2} \int d^3x \epsilon_{ijk} \epsilon^{IJK} W^{Ii} W^{Jj} W^{Kk} \ . \tag{8.14}$$

Existen por tanto infinitos estados fundamentales degenerados con $\Delta N_{cs} = \pm 1, \ \pm 2, \ .....$, separados por una barrera de potencial, como se representa en la figura 8.3. En la aproximación semiclásica la probabilidad de tunneling

Figura 8.3: La dependencia con la energía de las configuraciones gauge A como función del número de Chern-Simons $N_{cs}[A]$. Los Sphalerones corresponden a puntos sillas, *i.e.* a máximos del potencial.

entre vacíos vecinos viene determinada por las configuraciones instanton. En el modelo estándar al haber tres generaciones de fermiones, $\Delta B = \Delta L = N_f \Delta N_{cs} = \pm 3n$, con n un entero positivo. En otras palabras, las transiciones vacío a vacío cambia ΔB y ΔL en múltiplos de 3 unidades. Como resultado, los instantones $SU(2)$ dan lugar al siguiente operador efectivo al orden más bajo,

$$\mathcal{O}_{B+L} = \prod_{i=1,2,3} (q_{L_i} q_{L_i} q_{L_i} \ell_{L_i}) \ , \tag{8.15}$$

que da doce interaccioners fermiónicas, tales como,

$$\overline{u} + \overline{d} + \overline{c} \rightarrow d + 2s + 2b + t + \nu_e + \nu_\mu + \nu_\tau \ . \tag{8.16}$$

A temperatura cero, la tasa de transición viene dada por, $\Gamma \sim e^{-S_{int}} = e^{-4\pi/\alpha} = \mathcal{O}(10^{-165})$. La tasa de transición resultante está exponencialmente suprimida y por tanto es despreciable. En un baño térmico en cambio las cosas pueden ser bastante diferentes. Kuzmin, Rubakov y Shaposhnikov demostraron que en un baño térmico las transiciones entre diferentes vacíos gauge no podían hacerse mediante tunneling sino mediante fluctuaciones térmicas que ayudaran a superar la barrera. Cuando las temperaturas son mayores que la altura de la barrera, la supresión debida al factor de Boltzmann desaparece completamente , y por tanto los procesos que violan $(B + L)$ pueden tener lugar con una tasa significativamente alta, estando en equilibrio en el Universo en expansión. La tasa de transición a temperatura fínita en la teoría electrodébil viene determinada por las configuraciones sphaleron, que son configuraciones estáticas que corresponden a soluciones inestables de las ecuaciones de movimiento. En otras palabras, las configuraciones sphaleron son puntos silla de la energía del sistema gauge-Higgs, como se represente en la Fig. 8.3. Tienen número de Chern-Simon 1/2 y energía

$$E_{sp}(T) \simeq \frac{8\pi}{g} \langle H(T) \rangle \ , \tag{8.17}$$

que es proporcional al vev del Higgs, $\langle H(T) \rangle$, a temperatura finita T. Por debajo de la transición de fase electrodébil, $T < T_{EW}$, (*i.e.* en la fase Higgs), la tasa de transición por unidad de volumen

$$\frac{\Gamma_{B+L}}{V} = k \frac{M_W^7}{(\alpha T)^3} e^{-\beta E_{ph}(T)} \sim e^{\frac{-M_W}{\alpha k T}} \ , \tag{8.18}$$

donde M_W es la masa del bosón gauge W y k es la constante de Boltzmann. La tasa de transición está por tanto muy suprimida. En la fase simétrica, $T \geq T_{EW}$, la tasa de transición viene dada por [**?**]

$$\frac{\Gamma_{B+L}}{V} \sim \alpha^5 \ln \alpha^{-1} T^4 \ , \tag{8.19}$$

donde α es la constante de estructura fina. Por tanto, para $T > T_{EW}$, la violación del número bariónico puede no verse suprimida.

C and CP Violation

Para ilustrar porque las violaciones de C y CP son necesarias para la bariogénesis, consideremos el caso en la cual un bosón X superpesado tiene interacciones que violan el número bariónico.

Los números bariónicos producidos en los decaimientos de X y $\overline{X}$ son,

$$B_X = \alpha\Big(\frac{2}{3}\Big) + (1-\alpha)\Big(-\frac{1}{3}\Big) = \alpha - \frac{1}{3} \ , \tag{8.20}$$

$$B_{\overline{X}} = \overline{\alpha}\Big(-\frac{2}{3}\Big) + (1-\overline{\alpha})\Big(\frac{1}{3}\Big) = -\Big(\overline{\alpha} - \frac{1}{3}\Big) \ , \tag{8.21}$$

respectivamente, donde los prefactores dependientes de α son los branching ratio. El número neto de bariones producidos en los decaimientos de los pares X, $\overline{X}$ es por tanto,

$$\epsilon \equiv B_X + B_{\overline{X}} = (\alpha - \overline{\alpha}) \ . \tag{8.22}$$

Si C o CP se conservan, $\alpha = \overline{\alpha}$, y por tanto el número bariónico total se anula, $\epsilon = 0$.

Concretemos en un modelo de juguete consistente en cuatro fermiones, $f_{1,..,4}$, y dos escalares pesados, X and Y. La interacción entre dichos campos viene descrita por el siguiente lagrangiano,

$$\mathcal{L} = g_1 X f_2^\dagger f_1 + g_2 X f_4^\dagger f_3 + g_3 Y f_1^\dagger f_3 + g_4 Y f_2^\dagger f_4 + h.c. \ , \tag{8.23}$$

donde $g_{1,..,4}$ son las constantes de acoplo. El lagrangiano $\mathcal{L}$ da lugar a los siguientes decamientos,

$$X \to \overline{f}_1 + f_2, \ \overline{f}_3 + f_4 \ , \tag{8.24}$$

$$Y \to \overline{f}_3 + f_1, \ \overline{f}_4 + f_2 \ , \tag{8.25}$$

y los diagramas a nivel árbol son los mostrados en la figura Fig. 8.4. A nivel árbol, la tasa de decaimiento de $X \to \overline{f_1} + f_2$ es,

$$\Gamma(X \to \overline{f}_1 + f_2) = |g_1|^2 I_X \ , \tag{8.26}$$

donde I_X es el factor de espacio de fases. Para los procesos conjugados $\overline{X} \to f_1 + \overline{f}_2$, la tasa es,

$$\Gamma(\overline{X} \to f_1 + \overline{f}_2) = |g_1^*|^2 I_{\overline{X}} \ . \tag{8.27}$$

(a) (b)

(c) (d)

Figura 8.4: Diagramas a nivel árbol para los decaimientos de los escalares pesados, X y Y.

Como los factores de espacio de fases I_X y $I_{\overline{X}}$ son iguales, no podemos generar asimetría a nivel árbol.

A un loop, hay diagramas adicionales, como los mostrados en la Fig. 8.5, que deben ser tenidos en cuenta . Incluyendo estas contribuciones a un loop, las tasas de decaimiento de $X \to \overline{f}_1 + f_2$ y $\overline{X} \to f_1 + \overline{f}_2$ resultan ser,

$$\Gamma(X \to \overline{f}_1 + f_2) = g_1 g_2^* g_3 g_4^* I_{XY} + c.c. \ , \tag{8.28}$$
$$\Gamma(\overline{X} \to f_1 + \overline{f}_2) = g_1^* g_2 g_3^* g_4 I_{XY} + c.c. \ , \tag{8.29}$$

I_{XY} incluye tanto los factores de espacio de fase como los facotres cinemáticos resultante de integrar sobre el momento interno al loop. Si los fermiones $f_{1,..,4}$ se propagan on-shell, entonces el factor I_{XY} es complejo. Por tanto,

$$\Gamma(X \to \overline{f}_1 + f_2) - \Gamma(\overline{X} \to f_1 + \overline{f}_2) = 4Im(I_{XY})Im(g_1^* g_2 g_3^* g_4) \ . \tag{8.30}$$

De manera similar, para el modo, $X \to \overline{f}_3 + f_4$, tenemos,

$$\Gamma(X \to \overline{f}_3 + f_4) - \Gamma(\overline{X} \to f_3 + \overline{f}_4) = -4Im(I_{XY})Im(g_1^* g_2 g_3^* g_4) \ . \tag{8.31}$$

Notese que además de los diagramas a un loop mostrados en la Fig. 8.5, existen diagramas que involucran el mismo bosón como decayente. Sin embargo, las contribuciones a dichos diagramas se anula ya que en este caso el término de interferencia es proporcional a $Im(g_i g_i^* g_i g_i^*) = 0$. La asimetría en el número bariónico total debido a los decaimientos de X viene dado por,

$$\epsilon_X = \frac{(B_1 - B_2)\Delta\Gamma(X \to \overline{f}_1 + f_2) + (B_4 - B_3)\Delta\Gamma(X \to \overline{f}_3 + f_4)}{\Gamma_X} \ , \tag{8.32}$$

donde

$$\Delta\Gamma(X \to \overline{f}_1 + f_2) = \Gamma(X \to \overline{f}_1 + f_2) - \Gamma(\overline{X} \to f_1 + \overline{f}_2) \ , \tag{8.33}$$
$$\Delta\Gamma(X \to \overline{f}_3 + f_4) = \Gamma(X \to \overline{f}_3 + f_4) - \Gamma(\overline{X} \to f_3 + \overline{f}_4) \ . \tag{8.34}$$

(a) (b)

(c) (d)

Figura 8.5: Diagramas a un loop para los decaimientos de los campos escalares pesados, X e Y, que contribuyen a la asimetría.

Una expresión similar se puede derivar para los decaimientos Y. Las asimetrías totales debido a los decaimientos de los bosones superpesados, X e Y, vienen dadas respectivamente por

$$\epsilon_X = \frac{4}{\Gamma_X} Im(I_{XY}) Im(g_1^* g_2 g_3^* g_4)[(B_4 - B_3) - (B_2 - B_1)] \,, \quad (8.35)$$

$$\epsilon_Y = \frac{4}{\Gamma_Y} Im(I'_{XY}) Im(g_1^* g_2 g_3^* g_4)[(B_2 - B_4) - (B_1 - B_3)] \,. \quad (8.36)$$

Por mera inspeccción de la ecuaciones 8.35 y 8.36, parece claro que se deben satisfacer las siguientes condiciones de cara a tener una asimetría distinta de cero, $\epsilon = \epsilon_X + \epsilon_Y$:

- La presencia de los dos bosones que violen el número bariónico, cada uno de los cuales tiene una masa mayor que la suma de las masas de los fermiones en el loop interno;
- Las constantes de acoplo deben ser complejas. La violación de C y CP se debe a la interferencia entre los diagramas a un árbol y a un loop. En general, la asimetría generada es proporcional a, $\epsilon \sim \alpha^n$, donde n es el número de loops en el diagrama de orden más bajo que da una asimetría distinta de cero y $\alpha \sim g^2/4\pi$;
- Las partículas pesadas X y Y no deben ser degeneradas en masa. De otra manera, $\epsilon_X = -\epsilon_Y$, lo que da lugar a una asimetría total nula, ϵ.

No equilibrio térmico

El número bariónico B es impar bajo C y CP. Usando esta propiedad de B junto con el requerimiento de que el hamiltoniano, H, commute con CPT, la tercera condición de Sakharov puede comprobarse calculando la media de B en equilibrio a una temperatura $T = 1/\beta$,

$$\begin{aligned} < B >_T &= \mathrm{Tr}[e^{-\beta H} B] = \mathrm{Tr}[(CPT)(CPT)^{-1} e^{-\beta H} B)] \\ &= \mathrm{Tr}[e^{-\beta H} (CPT)^{-1} B (CPT)] = -\mathrm{Tr}[e^{-\beta H} B] \,. \end{aligned} \quad (8.37)$$

En equilibrio, se anula por tanto la media $< B >_T$, y no hay generación de un número bariónico neto. Los diferentes mecanismos para bariogénesis difieren en la forma en la que nos separamos del equilibrio térmico. Existen tres maneras posibles de conseguir esto:

- Decaimientos fuera del equilibrio de partículas pesadas: Bariogenesis GUT , Leptogenesis;

- Transition de fase electrodébil: Bariogenesis EW;

- Dinamica de efectos topológicos.

En leptogenesis, la separación del equilibrio térmico se consigue mediante decaimientos fuera del equilibrio de partículas pesadas en un Universo en expansión. Si la tasa de decaimientos Γ_X de algunas partículas superpesadas X con masa M_X en el momento en que se vuelven no relativistas (*i.e.* $T \sim M_X$) es mucho menos que la tasa de expansión del Universo, las partículas X no pueden decaer en la escala temporal de la expansión. Las partículas X mantienen por tanto su abundancia térmica inicial , $n_X = n_{\overline{X}} \sim n_\gamma \sim T^3$, para $T \lesssim M_X$. Dicho de otra manera, a alguna temperatura $T > M_X$, las partículas superpesadas X son tan debilmente interactuantes que no pueden seguir a la expansión del Universo. Por tanto se desacoplan del baño térmico mientras siguen siendo relativistas. En el momento del desacoplo, $n_X \sim n_{\overline{X}} \sim T^3$. Por tanto, pueblan el Universo a $T \simeq M_X$ con una abundancia mucho mayor que sus abundancias en equilibrio. Recuerdese que en equilibrio,

$$n_X = n_{\overline{X}} \simeq n_\gamma \quad \text{for} \quad T \gtrsim M_X \ , \tag{8.38}$$

$$n_X = n_{\overline{X}} \simeq (M_X T)^{3/2} e^{-M_X/T} \ll n_\gamma \quad \text{for} \quad T \lesssim M_X \ . \tag{8.39}$$

Esta sobreabundancia a temperaturas menores que M_X es la separación del equilibrio necesaria para producir una asimetría en el número bariónico total no nula. Esto se muestra en la Fig. 8.6. La escala de tasas de estos procesos que involucran X y $\overline{X}$ relativa a la expansión del Universo viene determinada por M_X,

$$\frac{\Gamma}{H} \propto \frac{1}{M_X} \ . \tag{8.40}$$

La condición de no equilibrio, $\Gamma < H$, requiere estados muy pesados: para bosones gauge, $M_X \gtrsim (10^{15-16})$ GeV; para escalares , $M_X \gtrsim (10^{10-16})$ GeV, asumiendo que estas partículas pesadas pueden decaer mediante operadores renormalizables. Evidentemente el cálculo preciso de las abundancias se lleva a cabo resolviendo las ecuaciones de Boltzman.

Figura 8.6: La distribución de partículas X en equilibrio térmico (en azul) sigue las ecuaciones 8.38 y 8.39. Cuando nos separamos del equilibrio, la distribución de partículas X permanece igual a la térmica (punteado en rojo).

8.0.3. Relación entre las asimetría bariónica y leptónica

Un ingrediente adicional para la leptogénesis en relacionar la asimetría en el número leptónico con la asimetría en el número bariónico, a la alta temperatura de la fase simétrica del modelo estándar. En un plasma debilmente acoplado con temperatura T y volumen V, podemos asignar un potencial químico a cada campo quark μ_i, lepton y Higgs , i. Existen por tanto $5N_f+1$ potenciales químicos en el modelo estándar con un doblete de Higgs y N_f generaciones de fermiones. La correspondiente función de partición viene dada por,

$$Z(\mu, T, V) = \mathrm{Tr}[e^{-\beta(H-\sum_i \mu_i Q_i)}] \tag{8.41}$$

donde $\beta = 1/T$, H es el Hamiltoniano y Q_i es el operador de carga para el correspondiente campo. La asimetría en las densidades de número de partículas y antipartículas viene dada por la derivada del potencial térmico dinámico , $\Omega(\mu, T)$,

$$n_i - \overline{n}_i = -\frac{\partial \Omega(\mu, T)}{\partial \mu_i} \ , \tag{8.42}$$

donde $\Omega(\mu, T)$ se define como,

$$\Omega(\mu, T) = -\frac{T}{V} \ln Z(\mu, T, V) \ . \tag{8.43}$$

Para un gas de partículas si masa no interactuantes, asumiendo $\beta\mu_i \ll 1$,

$$n_i - \overline{n}_i = \frac{1}{6} g T^3 \begin{cases} \beta\mu_i + \mathcal{O}((\beta\mu_i)^3), & \text{fermions} \\ 2\beta\mu_i + \mathcal{O}((\beta\mu_i)^3), & \text{bosons} \ . \end{cases} \tag{8.44}$$

En el plasma a alta temperatura, quarks, leptones y Higgs interactuan via los acoplos de Yukawa y gauge. Además, existen procesos sphaleron no perturbativos. Todos estos procesos dan lugar a ligaduras entre los diversos potenciales químicos en equilibrio térmico. Estos incluyen :

1. Las interacciones efectivas 12-fermiones $\mathcal{O}_{B+L}$ inducidas por los sphalerones dan lugar a la siguiente ralación,

$$\sum_i (3\mu_{q_i} + \mu_{\ell_i}) = 0 \ . \tag{8.45}$$

2. Los procesos instantón SU(3) QCD dan lugar a interacciones entre quarks left-handed y right-handed. Estas vienen descritas por el operador, $\prod_i (q_{L_i} q_{L_i} u^c_{R_i} d^c_{R_i})$. En equilibrio,

$$\sum_i (2\mu_{q_i} - \mu_{u_i} - \mu_{d_i}) = 0 \ . \tag{8.46}$$

3. La hipercarga total del plasma debe anularse a toda temperatura. Esto nos da
$$\sum_i (\mu_{q_i} + 2\mu_{u_i} - \mu_{d_i} - \mu_{\ell_i} - \mu_{e_i} + \frac{2}{N_f}\mu_H) = 0 \ . \tag{8.47}$$

4. Las interacciones tipo Yukawa nos llevan a las siguientes relaciones entre fermiones LH y RH,
$$\mu_{q_i} - \mu_H - \mu_{d_j} = 0 \ , \tag{8.48}$$
$$\mu_{q_i} + \mu_H - \mu_{u_j} = 0 \ , \tag{8.49}$$
$$\mu_{\ell_i} - \mu_H - \mu_{e_j} = 0 \ . \tag{8.50}$$

De la ecuación (8.44), la densidad de número bariónico $n_B = \frac{1}{6}gBT^2$ y de número leptónico $n_L = \frac{1}{6}gL_iT^2$, donde L_i es el número de flavour individual con $i = (e, \mu, \tau)$, se puede expandir en términos de los potenciales químicos. Por tanto
$$B = \sum_i (2\mu_{q_i} + \mu_{u_i} + \mu_{d_i}) \tag{8.51}$$
$$L = \sum_i L_i, \quad L_i = 2\mu_{\ell_i} + \mu_{e_i} \ . \tag{8.52}$$

Consideremos el caso donde todas las interacciones Yukawa están en equilibrio. La asimetría $(L_i - B/N_f)$ se ve por tanto preserveda. Si asumimos equilibrio entre las diferentes generaciones, $\mu_{\ell_i} \equiv \mu_\ell$ y $\mu_{q_i} \equiv \mu_q$, junto con las ligaduras sphaleron e hipercarga, todos los potenciales químicos se pueden expresar en términos de μ_ℓ,
$$\mu_e = \frac{2N_f + 3}{6N_f + 3}\mu_\ell, \quad \mu_d = -\frac{6N_f + 1}{6N_f + 3}\mu_\ell, \quad \mu_u = \frac{2N_f - 1}{6N_f + 3}\mu_\ell \tag{8.53}$$
$$\mu_q = -\frac{1}{3}\mu_\ell, \quad \mu_H = \frac{4N_f}{6N_f + 3}\mu_\ell \ .$$

Las correspondientes asimetrías B y L son
$$B = -\frac{4}{3}N_f\mu_\ell \ , \tag{8.54}$$
$$L = \frac{14N_f^2 + 9N_f}{6N_f + 3}\mu_\ell \ . \tag{8.55}$$

Por tanto B, L y $B - L$ están relacionados por:
$$B = c_s(B - L), \quad L = (c_s - 1)(B - L) \ , \tag{8.56}$$

donde

$$c_s = \frac{8N_f + 4}{22N_f + 13} \ . \tag{8.57}$$

Para modelos con N_H Higgses, el parámetro c_s viene dado por,

$$c_s = \frac{8N_f + 4N_H}{22N_f + 13N_H} \ . \tag{8.58}$$

Para $T = 100$ GeV $\sim 10^{12}$ GeV, que es la escala de interés en bariogenesis, las interacciones gauge están en equilibrio. Sin embargo, las Yukawa sólo lo están en un rango de temperaturas más restringido. Pero estos efectos son generalmente pequeños y no los tendremos en cuenta.

8.0.4. Leptogénesis estándar

Existen muchos mecanismos propuestos para bariogenesis, casi tanto como gente trabajando en el campo, cada uno con su propio atractivo y problematica. Las violaciones del número bariónico aparecen de manera natural en muchas teorías de gran unificiación. En la bariogenesis GUT la asimetría se genera mediante decaimientos de bosones gauge masivos (denotados por "V" en lo que sigue) o leptoquarks (denotados por "S"), que son partículas que llevan tanto número B como L. En GUTs basados en $SU(5)$, los bosones gauge pesados o leptoquarks pesados tienen los siguientes decays que no conservan B,

$$V \to \overline{\ell}_L u_R^c, \qquad B = -1/3, \qquad B - L = 2/3 \tag{8.59}$$

$$V \to q_L d_R^c, \qquad B = 2/3, \qquad B - L = 2/3 \tag{8.60}$$

$$S \to \overline{\ell}_L \overline{q}_L, \qquad B = -1/3, \qquad B - L = 2/3 \tag{8.61}$$

$$S \to q_L q_L, \qquad B = 2/3, \qquad B - L = 2/3 \ . \tag{8.62}$$

Puesto que $(B - L)$ se conserva, *i.e.* las partículas V y S llevan ambas cargas $(B - L)$ 2/3, no es posible generar $(B - L)$ dinamicamente. Además, debido a los procesos sphaleron, $\langle B \rangle = \langle B - L \rangle = 0$. En $SO(10)$, $(B - L)$ se rompe espontaneamente, pues es un subgrupo gaugeado de $SO(10)$. Las partículas pesadas X con $M_X < M_{B-L}$ pueden entonces generar una asimetría $(B - L)$ mediante sus decaimientos. Sin embargo, para $M_X \sim M_{GUT} \sim 10^{15}$ GeV, la asimetría CP está altamente suprimida. Además debemos tambien preocuparnos por la alta temperatura de reheating $T_{RH} \sim M_{GUT}$ después de inflacion, la consecución del equilibrio térmico y en el caso supersimmétrico, el problema del gravitino. Estás dificultades presentes en GUT bariogenesis han llevado a un gran interés en la bariogenesis electrodébil, la cual no esta exenta tampoco de desventajas.

La evidencia reciente de una masa para los neutrinos a partir de los experimentos de oscilaciones abre una nueva posibilidad de generar la asimetría mediante el decaimiento de neutrinos pesados. Un marco particular y atractivo en el que masas pequeñas para los neutrinos aparecen de manera natural es una GUT basada en $SO(10)$. Modelos GUT $SO(10)$ incorporan la existencia de neutrinos RH,

$$\psi(16) = (q_L,\ u_R^c,\ e_R^c,\ d_R^c,\ \ell_L,\ \nu_R^c)\ , \tag{8.63}$$

que es unificado junto con los quince fermiones conocidos de casa familia en una representación espinorial 16-dimensional Para masas fermiónicas herárquicas, se tiene

$$M_N \ll M_{B-L} \sim M_{GUT}\ , \tag{8.64}$$

donde $N = \nu_R + \nu_R^c$ es un fermión Majorana. Los decaimientos de los neutrinos right-handed,

$$N \to \ell H, \quad N \to \overline{\ell}\,\overline{H}\ , \tag{8.65}$$

donde H es el doblete de Higgs SU(2), pueden dar lugar a una asimetría en el número leptónico. Tras procesos sphaleron , la asimetría en el número leptónico se convierte en una asimetría en el número bariónico. ($X = N$, $b = \ell$, $a = H$ en el modelo de juguete que hicimos).

El lagrangiano más general que involucra leptones cargados y neutrinos viene dado por

$$\mathcal{L}_Y = f_{ij}\overline{e}_{R_i}\ell_{L_j}H^\dagger + h_{ij}\overline{\nu}_{R_i}\ell_{L_j}H - \frac{1}{2}(M_R)_{ij}\overline{\nu}^c_{R_i}\nu_{R_j} + h.c.\ . \tag{8.66}$$

Como los neutrinos RH son singletes bajo el grupo gauge del modelo estándar, las masas de Majorana están permitidas para los neutrinos RH debido a la invariancia gauge. Después de la ruptura espontanea de simetría, el doblete de Higgs adquiere un VEV, $\langle H\rangle = v$, y se generan masas de Dirac para leptones cargados y los neutrinos, mucho menores que las masas de Majorana del neutrino RH,

$$m_\ell = fv, \quad m_D = hv \ll M_R\ . \tag{8.67}$$

El sector neutrino viene por tanto descrito por una matriz seesaw 2×2,

$$\begin{pmatrix} 0 & m_D \\ m_D^T & M_R \end{pmatrix}\ . \tag{8.68}$$

Diagonalizando, se obtienen los autoestados de masa para los neutrinos ligeros y pesados,

$$\nu \simeq V_\nu^T\nu_L + V_\nu^*\nu_L^c, \quad N \simeq \nu_R + \nu_R^c \tag{8.69}$$

con masas

$$m_\nu \simeq -V_\nu^T m_D^T \frac{1}{M_R} m_D V_\nu, \quad m_N \simeq M_R \,. \tag{8.70}$$

donde la matriz unitaria V_ν es la matriz de diagonalización de la matriz de masas.

A temperaturas $T < M_R$, los neutrinos RH pueden generar una asimetría en el número leptónico por medio de procesos fuera del equilibrio. Los procesos sphaleron convierten ΔL en ΔB.

La asimetría

A nivel árbol, los neutrinos RH decaen en el doblete de Higgs y el doblete de leptones cargados con flavour α, $N_i \to H + \ell_\alpha$, donde $\alpha = (e,\ \mu,\ \tau)$. La anchura total de dicho decaimiento es ,

$$\begin{aligned} \Gamma_{D_i} &= \sum_\alpha \Big[\Gamma(N_i \to H + \ell_\alpha) + \Gamma(N_i \to \overline{H} + \overline{\ell}_\alpha)\Big] \\ &= \frac{1}{8\pi}(hh^\dagger)_{ii} M_i \,. \end{aligned} \tag{8.71}$$

Supongamos que las interacciones del neutrino right-handed más ligero , N_1, que violan el número leptónico, borran cualquier asimetría bariónica generada en el decaimiento de $N_{2,3}$ a temperaturas $T \gg M_1$. En este caso, con el decaimiento dominante de N_1, la asimetría final depende sólo de la dinámica de N_1. La condición de separación del equilibrio requiere que la anchura total para el decaimiento de N_1, Γ_{D_1}, se menor que la tasa de expansión del Universo a temperatura $T = M_1$,

$$\Gamma_{D_1} < H\Big|_{T=M_1} \,. \tag{8.72}$$

Es decir, los neutrinos pesados no son capaces de siguir el rápido cambio en la distribución de equilibrio, una vez que la temperatura baja por debajo de la masa M_1. Finalmente, los neutrinos pesados decaerán y se generará una asimetría leptónica debido a la asimetría CP que aparece debida a la interferencia de los diagramas a nivel arbol y a un loop, que se muestran en la Fig. 8.7,

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{\sum_\alpha [\Gamma(N_1 \to \ell_\alpha H) - \Gamma(N_1 \to \overline{\ell}_\alpha \overline{H})]}{\sum_\alpha [\Gamma(N_1 \to \ell_\alpha H) + \Gamma(N_1 \to \overline{\ell}_\alpha \overline{H})]} \\ &\simeq \frac{1}{8\pi}\frac{1}{(h_\nu h_\nu)_{11}} \sum_{i=2,3} \mathrm{Im}\Big\{(h_\nu h_\nu^\dagger)_{1i}^2\Big\} \cdot \Big[f\Big(\frac{M_i^2}{M_1^2}\Big) + g\Big(\frac{M_i^2}{M_1^2}\Big)\Big] \,. \end{aligned} \tag{8.73}$$

(a) (b) (c)

Figura 8.7: Diagramas en el modelo estándar con neutrinos RH que pueden contribuir a la asimetría en el número bariónico a través del decay de los neutrinos RH. La asimetría se genere debido a la interferencia de los diagramas a nive árbol (a), los diagramas a un loop tipo vértice (b) y los diagramas de autoenergía (c)

En la Fig. 8.7, el diagrama (b) es la correcciíon a un loop que da el término, $f(x)$, en la ecuación 8.73 tras llevar a cabo la integración a un loop,

$$f(x) = \sqrt{x}\Big[1 - (1+x)\ln\Big(\frac{1+x}{x}\Big)\Big] \ . \tag{8.74}$$

El diagrama (c) es la autoenergía a un loop. Para $|M_i - M_1| \gg |\Gamma_i - \Gamma_1|$, este diagrama nos da el término

$$g(x) = \frac{\sqrt{x}}{1-x} \ , \tag{8.75}$$

de la ecuación 8.73. Para masas de neutrinos RH herárquicas, $M_1 \ll M_2,\ M_3$, la asimetría viene dada por,

$$\epsilon_1 \simeq -\frac{3}{8\pi}\frac{1}{(h_\nu h_\nu^\dagger)_{11}}\sum_{i=2,3}\mathrm{Im}\Big\{(h_\nu h_\nu^\dagger)^2_{1i}\Big\}\frac{M_1}{M_i} \ . \tag{8.76}$$

Nótese que cuando N_k y N_j en el diagrama (c) tiene masas casi degeneradas puede existir una resonancia en las contribuciones de los diagramas de autoenergía a la asimetría. Tales efectos de resonancia puede permitir que M_1 sea mucho menor y que siga sin embargo generando suficiente cantidad de asimetría en el número leptónico.

Para evitar que la asimetría generada dada por la ecuación 8.73 sea destruida por los procesos de scattering o de decaimiento inverso el decaimiento de los *RH* neutrinos debe tener lugar fuera del equilibrio. Dicho de otro modo, debemos tener

$$r \equiv \frac{\Gamma_1}{H|_{T=M_1}} = \frac{M_{pl}}{(1{,}7)(32\pi)\sqrt{g_*}}\frac{(h_\nu h_\nu^\dagger)_{11}}{M_1} < 1 \ , \tag{8.77}$$

Lo que nos lleva a la siguiente ligadura en la masa efectiva del neutrino ligero

$$\widetilde{m}_1 \equiv (h_\nu h_\nu^\dagger)_{11} \frac{v^2}{M_1} \simeq 4\sqrt{g_*} \frac{v^2}{M_{pl}} \frac{\Gamma_{D_1}}{H}\Big|_{T=M_1} < 10^{-3} \text{ eV} , \tag{8.78}$$

donde g_* es el número de grados de libertad relativistas. Para el modelo estándar $g_* \simeq 106{,}75$, mientras que para el MSSM, $g_* \simeq 228{,}75$. El efecto de dilución de la asimetría se parametriza por el coeficiente κ, y la asimetría leptónica final viene dada por

$$Y_L \equiv \frac{n_L - \overline{n}_L}{s} = \kappa \frac{\epsilon_1}{g_*} , \tag{8.79}$$

La dilución depende del valor del parámetro r:

1. Si $r \ll 1$ para la temperatura de decay $T_D \lesssim M_X$, el decaimiento inverso y los procesos 2-2 no tienen efecto. En este caso, la anchura de decaimiento inverso viene dada por,

$$\frac{\Gamma_{ID}}{H} \sim \Big(\frac{M_X}{T}\Big)^{3/2} e^{-M_X/T} \cdot r , \tag{8.80}$$

mientras que la anchura para los procesos de scattering es

$$\frac{\Gamma_S}{H} \sim \alpha \Big(\frac{T}{M_X}\Big)^5 \cdot r . \tag{8.81}$$

Por tanto, los decaimientos inversos y los procesos de scattering pueden ignorarse, y la asimetría ΔB producida por los decaimientos no se ve destruida por la asimetría $-\Delta B$ producida en los dacaimientos inversos y los scatterings. A $T \simeq T_D$, la densidad de número de partículas pesadas X tiene una distribución térmica, $n_X \simeq n_{\overline{X}} \simeq n_\gamma$. Por tanto, la densidad neta de número de bariones producida en los procesos fuera del equilibrio es

$$n_L = \epsilon_1 \cdot n_X \simeq \epsilon_1 \cdot n_\gamma . \tag{8.82}$$

2. Para $r \gg 1$, la abundancia de X y $\overline{X}$ sigue los valores de equilibrio, y no hay separación del equilibrio. Como consecuencia ningún número leptónico puede evolucionar y la asimetrá leptónica desaparece ,

$$\frac{n_\ell - n_{\overline{\ell}}}{dt} + 3H(n_\ell - n_{\overline{\ell}}) = \Delta\gamma^{eq} = 0 . \tag{8.83}$$

En general, para $1 < r < 10$, podría existir una asimetría considerable . Los efectos de dilución comentados antes junto con la evolución temporal

(a) (b)

Figura 8.8: Procesos de decaimiento y decaimiento inverso en el baño térmico.

del sistema dan cuenta del factor κ, que se obtiene resolviendo la ecuaciónes de Bolzmann para el sistema. Una aproximación puede verse en el libro de Kolb y Turner

$$10^6 \lesssim r: \quad \kappa = (0{,}1r)^{1/2} e^{-\frac{4}{3}(0{,}1)^{1/4}} \quad (< 10^{-7}) \tag{8.84}$$

$$10 \lesssim r \lesssim 10^6: \quad \kappa = \frac{0{,}3}{r(\ln r)^{0{,}8}} \quad (10^{-2} \sim 10^{-7}) \tag{8.85}$$

$$0 \lesssim r \lesssim 10: \quad \kappa = \frac{1}{2\sqrt{r^2+9}} \quad (10^{-1} \sim 10^{-2}) \ . \tag{8.86}$$

Los efectos sphaleron electrobébiles convierten Y_L en Y_B,

$$Y_B \equiv \frac{n_B - n_{\overline{B}}}{s} = cY_{B-L} = \frac{c}{c-1} Y_L \ , \tag{8.87}$$

donde c es el factor de conversión calculado en la Sec. 8.0.3.

Boltzmann Equations

Puesto que los decaimientos de neutrinos RH son procesos fuera del equilibrio, pueden tratarse mediante las ecuaciones de Boltzmann. Los principales procesos en el baño térmico que son relevantes en leptogénesis incluyen entre otros,

(a) (b)

Figura 8.9: Pocesos de scattering $\Delta L = 1$ en el baño térmico.

1. decaimiento de N (Fig. 8.8 (a)):

$$N \to \ell + H, \qquad N \to \overline{\ell} + \overline{H} \tag{8.88}$$

2. decaimiento inverso de N (Fig. 8.8 (b)):

$$\ell + H \to N, \qquad \overline{\ell} + \overline{H} \to N \tag{8.89}$$

(a) (b) (c)

Figura 8.10: Procesos de scattering con $\Delta L = 2$ en el baño térmico.

3. scattering 2-2 : Incluye los siguientes procesos de scattering $\Delta L = 1$ (Fig. 8.9),

$$[\text{s-channel}]: \quad N_1\,\ell \leftrightarrow t\,\overline{q} \quad , \quad N_1\,\overline{\ell} \leftrightarrow t\,\overline{q} \tag{8.90}$$

$$[\text{t-channel}]: \quad N_1 t \leftrightarrow \overline{\ell}\,q \quad , \quad N_1\,\overline{t} \leftrightarrow \ell\,\overline{q} \tag{8.91}$$

y $\Delta L = 2$ (Fig. 8.10),

$$\ell H \leftrightarrow \overline{\ell}\,\overline{H} \quad , \quad \ell\ell \leftrightarrow \overline{H}\,\overline{H}, \quad \overline{\ell}\,\overline{\ell} \leftrightarrow H\,H\ . \tag{8.92}$$

Basicamente, a temperaturas $T \gtrsim M_1$, estos precesos $\Delta L = 1$ y $\Delta L = 2$ deben ser lo suficientemente fuertes como para mantener N_1 en equilibrio. A temperaturas $T \lesssim M_1$, deben ser lo suficientemente débiles como para permitir que N_1 genere la asimetría.

Las ecuaciones de Boltzmann que gobiernan las evoluciones de la densidad de número de neutrinos RH y la densidad de número $B - L$ vienen dadas por

$$\frac{dN_{N_1}}{dz} = -(D+S)(N_{N_1} - N_{N_1}^{eq}) \tag{8.93}$$

$$\frac{dN_{B-L}}{dz} = -\epsilon_1 D(N_{N_1} - N_{N_1}^{eq}) - W N_{B-L}\ , \tag{8.94}$$

donde

$$(D, S, W) \equiv \frac{(\Gamma_D, \Gamma_S, \Gamma_W)}{Hz}, \quad z = \frac{M_1}{T}\ . \tag{8.95}$$

Γ_D incluye tanto el decaimiento directo como el inverso , Γ_S incluye los procesos de scattering $\Delta L = 1$ y Γ_W los decaimientos inversos y procesos de

Figura 8.11: Comportamiento genérico de las soluciones de las ecuaciones de Boltzmann. Las funciones N_{N_1} (en rojo sólido) y N_{B-L} (en verde sólido) son soluciones de las ecuaciónes 8.93 y 8.94. La función $(N_{N_1})^{eq}$ (en azul punteado) es la distribución de equilibrio de partículas.

scattering con $\Delta L = 1$, $\Delta L = 2$. La abundancia de N_1 se ve afectada por el decaimiento, el decaimiento inverso y los procesos con $\Delta L = 1$. A la vista de la ecuación 8.94 es manifieso que los decays N_1 son la fuentes de $(B - L)$, mientras que los inversos y los precesos $\Delta L = 1$, 2 diluyen la asimetría. El comportamiento genérico de las soluciones puede verse en la figura 8.11.

Cotas sobre la masa de los neutrinos

En el caso de masas de neutrinos RH fuertemente herárquicas, cuando la asimetría ϵ_1 se debe al decaimiento del neutrino right-handed más ligero, N_1, contribuye dominantemente a la asimetría total, leptogenesis se convierte en una herramienta muy predictiva, siempre y cuando los N_1 decaigan a temperatura $T \gtrsim 10^{12}$ GeV. En particular, se pueden obtener diversas cotas para las masas de los neutrinos.

Para masas fuertemente herárquicas, $M_1/M_2 \ll 1$, existe una cota superior sobre ϵ_1, llamada cota de "Davidson-Ibarra",

$$|\epsilon_1| \leq \frac{3}{16\pi} \frac{M_1(m_3 - m_2)}{v^2} \equiv \epsilon_1^{DI} \ , \tag{8.96}$$

que se obtiene expandiendo en serie ϵ_1 a primer orden en M_1/M_2. Puesto que $|m_3 - m_2| \leq \sqrt{\Delta m_{32}^2} \sim 0{,}05$ eV, se sigue una cota inferior sobre M_1,

$$M_1 \geq 2 \times 10^9 \text{ GeV} \ , \tag{8.97}$$

la cual a su vez implica una cota más baja en la temperatura de reheating, T_{RH}, y está en conflicto con la cota superior de sobreproducción de neutrinos si se incorpora supersimetría. Nótese que, en presencia de neutrinos ligeros degenerados, los primeros términos en la expansión de ϵ_1 in M_1/M_2 y M_1/M_3 se anulan. Sin embargo, el siguiente orden no se anula, y en este caso se tiene [56],

$$|\epsilon_1| \lesssim \text{Max}\Big(\epsilon^{DI}, \frac{M_3^3}{M_1 M_2^2}\Big) \ . \tag{8.98}$$

Imponiendo que no haya efecto de dilución sustanciales, se pueden derivar cotas sobre las masas de los neutrinos ligeros. Para tener una cantidad signifcativa de asimetría baríonica, la masa efectiva $\widetilde{m}_1$ definida en la ecuación 8.78 no puede ser demasiado grande. Generalmente se impone $\widetilde{m}_1 \lesssim 0{,}1 - 0{,}2$. Puesto que la masa del neutrino activo más ligero $m_1 \lesssim \widetilde{m}_1$, tenemos una cota superior en m_1. Imponiendo ademas que los efectos de dilución $\Delta L = 2$ sean consistentes con una leptogénesis satisfactoria se obtiene ,

$$\sqrt{(m_1^2 + m_2^2 + m_3^2)} \lesssim (0{,}1 - 0{,}2) \text{ eV} \ , \tag{8.99}$$

que es del mismo orden que la cota sobre $\widetilde{m}_1$. De estas cotas, la escala absoluta de masas para los neutrinos, salvo un factor ~ 3, está en el rango, $0{,}05 \lesssim m_3 \lesssim 0{,}15$ eV, si la asimetría bariónica se originó realmente a través del decaimiento de N_1.

8.0.5. Dirac Leptogenesis

En la leptogénesis estándar discutida previamente, los neutrinos adquieren su masa mediante mecanismos de Seesaw. Los decaimientos de los neutrinos RH producen una asimetría leptónica no nula, $\Delta L \neq 0$. Los procesos sphaleron electrodébiles convierten ΔL parcialmente en ΔB. Este escenario estándar se basa fundamentalmente en la violación del número leptónico , que se debe a la presencia de masas Majorana pesadas para los neutrinos right-handed.

Sin embargo leptogenesis se puede implementar incluso en el caso en el que los neutrinos son Dirac que adquieren masas pequeñas mediante acoplos Yukawa altamente suprimidos sin violar el número leptónico. La realización de esto depende criticamente de las siguientes tres características de los efectos sphaleron: (*i*) Solo las partículas left-handed se acopla a los sphalerones; (*ii*) los sphalerones cambian $(B+L)$ pero no $(B-L)$; (*iii*) los efectos sphaleron están en equilibrio para $T \gtrsim T_{EW}$.

Puesto que los sphelarons se acoplan solo con los fermiones left-handed, podemos especular que mientras que el número leptónico de los fermiones right-handed sobreviva por debajo de la transición de fase electrodébil, un número leptónico neto puede generarse incluso si $L = 0$ inicialmente. Los acoplos de Yukawa de los quarks y leptones del modelo estándar al bosón de Higgs da lugar a una rápida equilibración left-right de manera que los efectos sphaleron separan los $(B + L)$ left-handed , los $(B + L)$ right-handed se convierten para llenar el vacío y por tanto también se separan. De manera que, con $B = L = 0$ inicialmente, no se genera asimetría bariónica para los quarks y leptons. En cambio, para los neutrinos, la equilibración left-right puede ocurrir a un una escala temporal mucho más larga comparada con la época electrodébil La conversión left-right para los neutrinos involucra los acoplos Dirac Yukawa, $\lambda \overline{\ell}_L H \nu_R$, donde λ es la constante de acoplo de Yukawa, y la tasa para estos procesos escalea como,

$$\Gamma_{LR} \sim \lambda^2 T \ . \tag{8.100}$$

Para que la conversión left-right no esté en equilibrio a temperaturas por encima de alguna crítica T_{eq}, se requiere que

$$\Gamma_{LR} \lesssim H \ , \quad \text{for} \quad T > T_{eq} \ , \tag{8.101}$$

Figura 8.12: Con acoplos Yukawa suficientemente pequeños, el equilibrado occurre a un tiempo muy posterior, bien por debajo de la temperatura transición de fase electrodébil. Por tanto, es posible generar un número bariónico distinto de cero incluso si $B = L = 0$ inicialmente. Para partículas de modelo estándar, el equilibrado left-right tiene lugar completamente antes o durante de los procesos sphaleron. Por tanto, un número bariónico neto puede generarse si $B - L = 0$ inicialmente

donde la constante de Hubble escalea como,

$$H \sim \frac{T^2}{M_{\rm Pl}} \ . \tag{8.102}$$

por tanto, el equilibrado puede ocurrir a un tiempo muy posterior, $T \lesssim T_{eq} \ll T_{EW}$, si,

$$\lambda^2 \lesssim \frac{T_{eq}}{M_{\rm Pl}} \ll \frac{T_{EW}}{M_{\rm Pl}} \ . \tag{8.103}$$

Con $M_{\rm Pl} \sim 10^{19}$ GeV y $T_{EW} \sim 10^2$ GeV, esta condición se convierte en

$$\lambda < 10^{-(8\sim 9)} \ . \tag{8.104}$$

Por tanto, para masas de Dirac $m_D < 10$ keV, lo cual es consistente con todas las observaciones experimentales, el equilibrado left-right no ocurre hasta que la temperatura del Universo cae muy por debajo de la transición de fase electrodébil, y el número leptónico en los neutrinos right-handed puede sobrevivir a la dilución de los sphalerons.

Una vez aceptado esto, la leptogenesis a lo Dirac funciona de la siguiente manera. Supogamos que algunos procesos producen inicialmente un número leptónico negativo (ΔL_L), que preservan los neutrinos left-handed, y uno positivo (ΔL_R), en los neutrinos right-handed. Puesto que los sphalerons sólo se acoplan a las partículas left-handed, parte del número leptónico negativo encapsulado en los neutrinos left-handed se convierte en un número bariónico positivo por la anomalía electrodébil. Este número leptónico negativo ΔL_L con magnitud reducida finalmente se equilibra con el número leptónico positivo, ΔL_R cuando la temperatura del Universo baja hasta $T \ll T_{EW}$. Puesto que los procesos equilibradores conservan tanto el número bariónico B y el leptónico L por separado, se obtiene un universo con un número bariónico total positivo y un número leptónico total positivo. Por tanto, podemos generar un número neto bariónico incluso si $B = L = 0$ inicialmente.

8.0.6. Gravitino Problem

Para que leptogenesis sea efectiva, como se mostró en la Sec. 8.0.4, la masa de los neutrino RH más ligeros debe ser $M_1 > 2 \times 10^9$ GeV. La Fig. 8.13 muestra la cota inferior sobre la masa del neutrino RH más ligero como función de la masa más pequeña efectiva a baja energía, $\widetilde{m}_1$. Si los neutrinos RH se producen termicamente, la temperatura de reheating debe ser mayor que la masa del neutrino right-handed, $T_{RH} > M_R$. Esto implica que $T_{RH} > 2 \times 10^9$ GeV, para generar suficiente asimetría en el número bariónico. Tal temperatura de reheating es problemática puesto que podría llevar a una sobreproducción de estados ligeros, tales como gravitinos. Si los gravitinos son estables (i.e. LSP), la ligadura de WMAP sobre DM da lugar a una cota sobre la masa del gluino para cualquier masa del gravitino dada $m_{3/2}$ y temperatura de reheating T_{RH}. Por otro lado, si los gravitinos son inestables, tienen un tiempo de vida largo y podrían decaer durante y después de de BBN, con las siguientes consecuencias:

1. Los decaimientos pueden acelerar la expansión, e incrementan el cociente protón neutrón y por tanto la abundancia de ^{4}He;

2. Los decaimientos radiativos de gravitinos , $\psi \to \gamma + \tilde{\gamma}$, aunmentan la densidad de fotones y por tanto reduce el cociente n_B/n_γ ;

3. Los fotones de alta energía emitidos en los decaimientos de gravitinos podrían destruir los elementos ligeros (D, T, ^{3}He, ^{4}He)

La densidad de numero de gravitinos, $n_{3/2}$, durante el estado de termalización después de inflación viene gobernada por la siguiente ecuación de Boltzmann,

$$\frac{d}{dt} n_{3/2} + 3H n_{3/2} \simeq \left\langle \sum_{\text{tot}} v \right\rangle \cdot n_{\text{light}}^2 \tag{8.105}$$

donde $\sum_{\text{tot}} \sim 1/M_{\text{Pl}}^2$ es la sección eficaz total que determina la tasa de producción de gravitinos y $n_{\text{light}} \sim T^3$ es la densidad de número de partículas ligeras en el baño térmico. Como la termalización es muy rápida, el término

Figura 8.13: Cota inferior sobre la masa de los neutrino RH más ligeros, M_1 (circulos) y la temperatura inicial, T_i (línea punteada), para $m_1 = 0$ y $\eta_B^{CMB} = 6 \times 10^{-10}$. Los círculos rojos (solid lines) denotan los resultados analíticos (numericos). Las líneas punteadas verticales indican el rango $(\sqrt{\Delta m^2_{\text{sol}}}, \sqrt{\Delta m^2_{\text{atm}}})$.

Figura 8.14: Cota superior sobre la temperatura de reheating como función de la masa del gravitino, para el caso en el que el gravitino decae dominantemente en pares gluón gluón. Figure taken from Ref. [**?**].

de fricción $3Hn_{3/2}$ en la ecuación de Boltzmann puede despreciarse. Usando el hecho de que el Universo está dominado por radiación , $H \sim t^{-1} \sim T^2/M_{\rm Pl}$, se sigue que,

$$n_{3/2} \sim \frac{T^4}{M_{\rm Pl}} \ , \tag{8.106}$$

y la densidad de número a termalización en unidades de entropía reza,

$$\frac{n_{3/2}}{s} \simeq 10^{-2} \frac{T_{RH}}{M_{\rm Pl}} \ . \tag{8.107}$$

Las abundancias observadas para los distintos elementos ligeros son,

$$0{,}22 < Y_p = (\rho_{^4He}/\rho_B)_p < 0{,}24 \ , \tag{8.108}$$

$$(n_D/n_H) > 1{,}8 \times 10^{-5} \ , \tag{8.109}$$

$$\left(\frac{n_D + n_{^3He}}{n_H}\right)_p < 10^{-4} \ . \tag{8.110}$$

La cota más restrictiva viene de la abundancia de (D + ^{3}He) que exige que la densidad de número de gravitinos sea

$$\frac{n_{3/2}}{s} \simeq 10^{-2} \frac{T_{RH}}{M_{\rm Pl}} \lesssim 10^{-12} \ . \tag{8.111}$$

Se sigue entonces, $T_{RH} < 10^{8-9}$ GeV . Existe por tanto un conflicto entre la generación de suficiente cantidad de leptogénesis y la no producción de una cantidad excesiva de gravitinos. Para evitar estos conflictos, se han propuesto diversos escenarios para leptogénesis alternativos al estándar, que no discutiremos aquí.

Bibliografía

[1] S. Hannestad, "Neutrinos in cosmology," New J. Phys. **6** (2004) 108 [hep-ph/0404239].

[2] Ø. Elgarøy and O. Lahav, "Neutrino masses from cosmological probes," New J. Phys. **7** (2005) 61 [hep-ph/0412075].

[3] See, for example, J. N. Bahcall, **Neutrino Astrophysics** (Cambridge University Press, Cambridge 1989).

[4] S. Hannestad, "Introduction to neutrino cosmology. Neutrinos in cosmology," Prog. Part. Nucl. Phys. **57** (2006) 309 [astro-ph/0511595].

[5] M. Tegmark, "Cosmological neutrino bounds for non-cosmologists," in Proceedings of Nobel Symposium 2004, Enköping, Sweden (August 2004), hep-ph/0503257.

[6] S. Hannestad, "Primordial neutrinos," hep-ph/0602058.

[7] A.D. Dolgov, "Neutrinos in cosmology," Phys. Rep. **370** (2002) 333 [hep-ph/0202122].

[8] M. Kamionkowski and A. Kosowsky, "The cosmic microwave background and particle physics," Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **49** (1999) 77 [astro-ph/9904108].

[9] M.C. González-García and Y.Ñir, "Developments in neutrino physics," Rev. Mod. Phys. **75** (2003) 345 [hep-ph/0202058].

[10] G. Altarelli and F. Feruglio, "Models of neutrino masses and mixings," New J. Phys. **6** (2004) 106 [hep-ph/0405048].

[11] R.N. Mohapatra and A.Yu. Smirnov, "Neutrino Mass and New Physics," hep-ph/0603118.

[12] S. Eidelman et al [Particle Data Group], "Review of particle physics," Phys. Lett. B **592** (2004) 1.

[13] M. Maltoni, T. Schwetz, M.A. Tórtola and J.W.F. Valle, "Status of global fits to neutrino oscillations," New J. Phys. **6** (2004) 122 [hep-ph/0405172].

[14] S.R. Elliott and P. Vogel, "Double beta decay," Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **52** (2002) 115 [hep-ph/0202264].

[15] S.M. Bilenky, C. Giunti, J.A. Grifols and E. Massó, "Absolute values of neutrino masses: Status and prospects," Phys. Rep. **379** (2003) 69 [hep-ph/0211462].

[16] R.D. McKeown and P. Vogel, "Neutrino masses and oscillations: Triumphs and challenges," Phys. Rep. **394** (2004) 315 [hep-ph/0402025].

[17] A. Aguilar et al [LSND Coll.], "Evidence for neutrino oscillations from the observation of anti-nu/e appearance in a anti-nu/mu beam," Phys. Rev. D **64** (2001) 112007 [hep-ex/0104049].

[18] S. Dodelson, Modern Cosmology (Academic Press, 2003).

[19] S. Hannestad and J. Madsen, "Neutrino decoupling in the early universe," Phys. Rev. D **52** (1995) 1764 [astro-ph/9506015].

[20] G. Mangano, G. Miele, S. Pastor and M. Peloso, "A precision calculation of the effective number of cosmological neutrinos," Phys. Lett. B **534** (2002) 8 [astro-ph/0111408].

[21] S. Sarkar, "Big bang nucleosynthesis and physics beyond the standard model," Rep. Prog. Phys. **59** (1996) 1493 [hep-ph/9602260].

[22] D.N. Spergel et al [WMAP Coll.], "First Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Determination of Cosmological Parameters," Astrophys. J. Suppl. **148** (2003) 175 [astro-ph/0302209].

[23] S. Hannestad, "Neutrino masses and the number of neutrino species from WMAP and 2dFGRS," JCAP **0305** (2003) 004 [astro-ph/0303076].

[24] J.R. Bond, G. Efstathiou and J. Silk, "Massive Neutrinos And The Large-Scale Structure Of The Universe," Phys. Rev. Lett. **45** (1980) 1980.

[25] M. Beltrán, J. García-Bellido, J. Lesgourgues and A. Riazuelo, Phys. Rev. D **70** (2004) 103530 [astro-ph/0409326].

[26] W. Buchmuller, R. D. Peccei and T. Yanagida, "Leptogenesis as the origin of matter," Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **55**, 311 (2005). [arXiv:hep-ph/0502169].

[27] A. Strumia, "Baryogenesis via leptogenesis," hep-ph/0608347.

[28] E.Ñardi, "Topics in leptogenesis," hep-ph/0702033.

[29] Y.Ñir, "Introduction to leptogenesis," hep-ph/0702199.

[30] A. Riotto and M. Trodden, "Recent progress in baryogenesis," Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **49**, 35 (1999); M. Trodden and S. M. Carroll, "*TASI Lectures: Introduction to Cosmology*", published in *Boulder 2002, Particle Physics and Cosmology*, 703-793, the proceedings of the Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics – Particle Physics and Cosmology: The Quest for Physics Beyond the Standard Model(s), Boulder, Colorado, 2-28 Jun 2002, World Scientific, astro-ph/0401547.

[31] A. Riotto, "Theories of baryogenesis," hep-ph/9807454.

[32] M. Trodden, "Baryogenesis and leptogenesis," hep-ph/0411301.

[33] C. J. Copi, D.Ñ. Schramm and M. S. Turner, "Big Bang Nucleosynthesis And The Baryon Density Of The Universe," Science **267**, 192 (1995). [arXiv:astro-ph/9407006].

[34] C. L. Bennett *et al.*, "First Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Preliminary Maps and Basic Results," Astrophys. J. Suppl. **148**, 1 (2003). [arXiv:astro-ph/0302207].

[35] A. D. Sakharov, "VIOLATION OF CP INVARIANCE, C ASYMMETRY, AND BARYON ASYMMETRY OF THE UNIVERSE," Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **5**, 32 (1967) [JETP Lett. **5**, 24 (1967); Sov. Phys. Usp. **34**, 392 (1991)].

[36] S. Dimopoulos and L. Susskind, "On The Baryon Number Of The Universe," Phys. Rev. **D18**, 4500 (1978);

[37] T. P. Cheng and L. F. Li, "*Gauge Theory Of Elementary Particle Physics*", http://www.slac.stanford.edu/spires/find/hep/www?irn=1457624 Oxford, UK: Clarendon (Oxford Science Publications), 536 pages, (1984).

[38] V. A. Kuzmin, V. A. Rubakov and M. E. Shaposhnikov, "On The Anomalous Electroweak Baryon Number Nonconservation In The Early Universe," Phys. Lett. **B155**, 36 (1985).

[39] F. R. Klinkhamer and N. S. Manton, "A Saddle Point Solution In The Weinberg-Salam Theory," Phys. Rev. **D30**, 2212 (1984).

[40] P. Arnold and L. D. McLerran, "Sphalerons, Small Fluctuations And Baryon Number Violation In Electroweak Theory," Phys. Rev. **D36**, 581 (1987).

[41] E. W. Kolb and M. S. Turner, "The Early Universe," Redwood City, USA: Addison-Wesley (1988) 719 pp., (Frontier in Physics, 70). http://www.slac.stanford.edu/spires/find/hep/www?irn=1964267

[42] M. E. Shaposhnikov, "POSSIBLE APPEARANCE OF THE BARYON ASYMMETRY OF THE UNIVERSE IN AN ELECTROWEAK THEORY," JETP Lett. **44**, 465 (1986) [Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **44**, 364 (1986)]. see also, G. R. Farrar and M. E. Shaposhnikov, "Baryon Asymmetry Of The Universe In The Minimal Standard Model," Phys. Rev. Lett. **70**, 2833 (1993) [Erratum-ibid. **71**, 210 (1993)]. [arXiv:hep-ph/9305274].

[43] M.-C. Chen and K. T. Mahanthappa, AIP Conf. Proc. **721**, 269 (2004) hep-ph/0311034.

[44] A. de Gouvea, "Neutrino physics," Proceedings of Theoretical Advance Study Institute in Elementary Particle Physics (TASI 2004): *Physics in* $D >= 4$, 197 - 258 pp, Boulder, Colorado, 6 Jun - 2 Jul 2004, hep-ph/0411274;

[45] R.Ñ. Mohapatra *et al.*, "Theory of neutrinos," hep-ph/0412099;

[46] R.Ñ. Mohapatra *et al.*, "Theory of neutrinos: A white paper," hep-ph/0510213;

[47] C. H. Albright and M.-C. Chen, "Model predictions for neutrino oscillation parameters," Phys. Rev. **D74**, 113006 (2006). [arXiv:hep-ph/0608137].

[48] M. Fukugita and T. Yanagida, "Baryogenesis Without Grand Unification," Phys. Lett. **B174**, 45 (1986);

[49] M. A. Luty, "Baryogenesis Via Leptogenesis," Phys. Rev. **D45**, 455 (1992);

[50] M. Plumacher, "Baryogenesis and lepton number violation," Z. Phys. **C74**, 549 (1997); [arXiv:hep-ph/9604229].

[51] W. Buchmuller and M. Plumacher, "Baryon asymmetry and neutrino mixing," Phys. Lett. **B389**, 73 (1996). [arXiv:hep-ph/9608308]. .

[52] W. Buchmuller, P. Di Bari and M. Plumacher, "Cosmic microwave background, matter-antimatter asymmetry and neutrino masses," Nucl. Phys. **B643**, 367 (2002); [arXiv:hep-ph/0205349].

[53] R. Barbieri, P. Creminelli, A. Strumia and N. Tetradis, "Baryogenesis through leptogenesis," Nucl. Phys. **B575**, 61 (2000). [arXiv:hep-ph/9911315].

[54]

[54] W. Buchmuller, P. Di Bari and M. Plumacher, "Leptogenesis for pedestrians," Annals Phys. **315**, 305 (2005). [arXiv:hep-ph/0401240].

[55] S. Davidson and A. Ibarra, "A lower bound on the right-handed neutrino mass from leptogenesis," Phys. Lett. **B535**, 25 (2002). [arXiv:hep-ph/0202239].

[56] T. Hambye, Y. Lin, A.Ñotari, M. Papucci and A. Strumia, "Constraints on neutrino masses from leptogenesis models," Nucl. Phys. **B695**, 169 (2004). [arXiv:hep-ph/0312203].

[57] K. Dick, M. Lindner, M. Ratz and D. Wright, "Leptogenesis with Dirac neutrinos," Phys. Rev. Lett. **84**, 4039 (2000). [arXiv:hep-ph/9907562].

[58] H. Murayama and A. Pierce, "Realistic Dirac leptogenesis," Phys. Rev. Lett. **89**, 271601 (2002). [arXiv:hep-ph/0206177].

[59]

[59] W. Buchmuller, P. Di Bari and M. Plumacher, "A bound on neutrino masses from baryogenesis," Phys. Lett. **B547**, 128 (2002); [arXiv:hep-ph/0209301].

[60]

[60] K. T. Mahanthappa, "Multiple production of photons in quantum electrodynamics," Phys. Rev. **126**, 329 (1962);

[61] A. De Simone and A. Riotto, "Quantum Boltzmann equations and leptogenesis," hep-ph/0703175.