

EL MODELO DE ELLIOT DE LA DESCRICIÓN DE LOS  
NÚCLEOS LIGEROS Y DEFORMADOS. APLICACIÓN A LOS  
ESPECTROS Y TRANSICIONES E2 EN  ${}^8\text{Be}$ ,  ${}^{12}\text{C}$ ,  ${}^{20}\text{Ne}$  y  ${}^{24}\text{Mg}$

Javier Rubio Peña <sup>†</sup>



# Prefacio

Las presentes notas constituyen un pequeño trabajo para la asignatura Fundamentos de Estructura Nuclear del Master de Física Teórica de la Universidad Autónoma de Madrid. En ellas se aborda fundamentalmente el modelo  $SU(3)$  para átomos ligeros basándose fundamentalmente en el artículo original de Elliot y en el libro de Talmi. Las notas no pretenden ser exhaustivas y son simplemente mi guía personal a la hora de estudiar el tema. Precisamente por esto pido disculpas por cualquier error tipográfico o conceptual. Se han tratado los aspectos que en mi opinión eran más interesantes, descartándose otros, pido disculpas también por esto. Además del modelo  $SU(3)$  se incluyen aspectos curiosos como la equivalencia entre el método de Hartree-Fock, el de Nilsson y el  $SU(3)$  para potenciales centrales, a pesar de no ser el tema central, pues ayuda a relacionar los diversos modelos (al menos a mí).



# Índice general

<b>1. EL MODELO DE ELLIOT</b>	<b>7</b>
1.1. Introducción . . . . .	7
1.2. Teoría General del Modelo de Capas . . . . .	7
1.3. Resumen de estructuras rotacionales de los núcleos . . . . .	9
1.4. $SU(3)$ como grupo intermedio G:La Simetría del oscilador cuántico . . . . .	9
1.5. Clasificación de acuerdo a $U(3)$ y $SU(3)$ . . . . .	12
1.6. La acción efectiva . . . . .	14
1.7. La fuerza cuadrupolo cuadrupolo . . . . .	14
1.8. El operador de Casimir de $SU(3)$ . . . . .	16
1.9. Un hamiltoniano interesante . . . . .	18
1.10. Representación $(\lambda, \mu)$ Tableros de Young . . . . .	20
1.10.1. Reglas de los tableros de Young . . . . .	20
1.11. Clasificación de acuerdo a $SU(3)$ y $SU(2) \times U(1)$ . . . . .	21
1.12. Construcción de los estados de acuerdo a $SU(3)$ y $O(3)$ . . . . .	23
1.13. Aplicación a núcleos ligeros . . . . .	24
1.14. Precisión en las capas $(2s, 1d)$ . . . . .	25
1.15. Algunos ejemplos sencillos . . . . .	26
1.15.1. El ${}^8Be$ . . . . .	26
1.16. El ${}^{12}C$ . . . . .	27
1.17. El ${}^{20}Na$ . . . . .	28
1.18. El ${}^{24}Mg$ . . . . .	29
1.19. Un aspecto curioso: la similitud con el Hartree-Fock . . . . .	31
1.20. Conclusiones . . . . .	32
<b>2. Apéndice I</b>	<b>33</b>
2.1. Reglas de los tableros de Young . . . . .	33



# Capítulo 1

## EL MODELO DE ELLIOT

### 1.1. Introducción

El modelo de capas se ha convertido en una aproximación útil para la descripción multipartícula de los núcleos atómicos. A pesar del éxito relativo el número de estados posibles es a menudo demasiado grande y sólo unos pocos núcleos pueden ser descritos sin morir en la labor de cálculo. Los diversos submodelos del modelo de capas se han construido para reducir el número de estados y con ello la dificultad computacional. Estos submodelos describen la mayoría de la estructura física de los estados en términos de números cuánticos bien definidos. Uno de estos modelos es el modelo  $SU(3)$  que estudiaremos aquí.

### 1.2. Teoría General del Modelo de Capas

El principio fundamental en el que se basa el modelo de capas es que las interacciones de cada nucleón con los demás se puede aproximar por un potencial promedio monoparticular. Asumiremos inicialmente que este campo es esféricamente simétrico. En la práctica este raras veces se deriva de algún método autoconsistente tipo Hartree-Fock sino más bien de las consideraciones acerca de la física básica del problema. Puesto que los nucleones están ligados en una región finita del espacio es de esperar que el potencial sea atractivo en esa zona y nulo en el resto, esto se conoce como potencial de Woods-Saxon. Sin embargo, si nos fijamos solamente en los estados ligados más bajos las órbitas de partículas independientes de este potencial finito, nos damos cuenta de que son similares a los de un potencial infinito apropiado, como el oscilador armónico. Podemos por tanto concentrarnos en un problema mucho más sencillo de tratar matemáticamente y que encie-

rra muchos de los aspectos físicos del problema. Las funciones de onda del oscilador armónico serán defectuosas a la hora de determinar la cola de los núcleos (es decir, las regiones de radios grandes donde la función de onda se aproxima a cero) puesto que decaen con una forma gaussiana en lugar de la forma exponencial más realista. Siempre y cuando no estemos considerando propiedades nucleares sensibles a dichas colas (como por ejemplo transiciones electromagnéticas de alto orden multipolar), el uso de la aproximación de oscilador armónico es razonable.

El espectro por tanto es un espectro equiespaciado con constante de equiespaciado  $\hbar\omega$ . Para poder reproducir los números mágicos es necesario añadir al modelo anterior un potencial monoparticular dependiente del spin de la forma  $V_S = \xi(l \cdot s)$  que se asume forma parte del potencial promedio. Se produce entonces un desdoblamiento de los niveles .

En un núcleo con un número mayor de partículas que el requerido para cerrar una capa nos encontramos con degeneraciones usualmente múltiples. Debido a esta degeneración las funciones de onda de muchos cuerpos que se pueden formar son generalmente enormes, y puesto que dicha degeneración no se observa en los núcleos debemos extender el modelo de capas permitiendo a las partículas extra del núcleo interactuar unas con las otras rompiendo la degeneración.

El modelo de capas presenta el problema básico de la interacción residual introducida. Se supone que esta tiene en cuenta los efectos de interacción nucleón- nucleón que no han sido incluidos en el campo medio. Existen diversas posibilidades a la hora de escoger la interacción residual que darán lugar a las autofunciones de los niveles más bajos con los valores observados de energías, momentos etc. . . .

El problema de encontrar las autofunciones de una interacción residual dada parece en principio fácil de resolver. Basta con diagonalizar la matriz de energías con los estados de muchas partículas como base. Sin embargo, aunque en diversos casos es posible encontrar una solución numericamente los resultados no son fácilmente interpretables y se hace necesario entenderlos refiriéndose quizá a modelos más restrictivos. En la mayoría de los casos ni siquiera se puede obtener nada numericamente. Nos vemos forzados por tanto a considerar un modelo más restrictivo considerando sólo el número de funciones de onda que el sistema de cálculo puede soportar e ignorando el resto. Otra posible opción es considerar submodelos del modelo de capas como el de  $SU(3)$  que estudiamos aquí.

Como ilustración de lo anterior tomemos por ejemplo el  $^{20}\text{Ne}$  y tomemos la configuración  $(1s)^4, (1p)^{12}, (2s, 1d)^4$  en la que tenemos dos protones y dos neutrones en la capa no llena  $(2s, 1d)$ . El número de subestados magnéticos degenerados disponibles para cada protón o neutrón es 12, y el número de

### 1.3. RESUMEN DE ESTRUCTURAS ROTACIONALES DE LOS NÚCLEOS<sup>9</sup>

estados para dos neutrones y dos protones es por tanto 66. El número total de estados es entonces  $66 \times 66 = 4356$ , que pueden enumerarse en 640 niveles de energía diferentes con varios valores del momento angular total  $J$  y paridad  $\pi$ . A pesar de que cualquier interacción residual pudiera romper algunas de las degeneraciones de estos 640 estados se requerirá una gran cantidad de cálculo para diagonalizar. Sin embargo, muchos de esos niveles tienen diversas simetrías espaciales. El modelo  $SU(3)$  no es más que una clasificación de acuerdo con esta simetría.

### 1.3. Resumen de estructuras rotacionales de los núcleos

Los espectros rotacionales de ciertos núcleos, como el  $^{20}\text{Na}$ , el  $^{24}\text{Mg}$ , el  $^{24}\text{Si}$  y otros núcleos en la primera mitad de la capa  $ds$  muestran un espectro de niveles espaciados en energía  $J(J + 1)$  y las tasas de las transiciones  $E2$  son un orden de magnitud mayores que las estimaciones de partícula independiente. Si miramos a la capa  $p$  formalmente tenemos la siguiente descomposición en subgrupos

$$U(12) \supset U(3) \times U(4) \quad (1.1)$$

donde  $U(3)$  describe las transformaciones unitarias entre los estados orbitales  $p_{\pm}, P_0$  y  $U(4)$  la transformación entre los cuatro estados carga-espín de la partícula. Estos estados se pueden clasificar por  $U(3)$  y el grupo de rotaciones  $O(3)$ .

Como haríamos algo similar para la capa  $ds$ ? Tenemos en este caso

$$U(24) \supset U(6) \times U(4) \quad (1.2)$$

y queremos encontrar una secuencia

$$U(6) \supset G \supset O(3) \quad (1.3)$$

para describir rotaciones en términos de teoría de grupos.

Para encontrar dicho grupo consideraremos el caso sencillo de un oscilador armónico para una partícula.

### 1.4. $SU(3)$ como grupo intermedio G: La Simetría del oscilador cuántico

Para encontrar el grupo intermedio  $G$  consideraremos el caso sencillo de un oscilador armónico para una partícula.

Tomemos el hamiltoniano del oscilador armónico y consideremos simetrías dinámicas que mezclan variables y momentos conjugados, es decir, simetrías en el espacio de fases. El hamiltoniano del oscilador armónico se puede escribir

$$H_0 = \frac{1}{2}(\mathbf{p}^2 + r^2) = \frac{1}{2}(\mathbf{p} + i\mathbf{r})(\mathbf{p} - i\mathbf{r}) + \frac{3}{2}\hbar = \hbar(a^\dagger \cdot a + \frac{3}{2}) \quad (1.4)$$

donde los cuantos de oscilador son bosones que satisfacen las relaciones de conmutación

$$[a_\alpha^\dagger, a_\beta^\dagger] = [a_\alpha, a_\beta] = 0 \quad (1.5)$$

$$[a_\alpha, a_\beta^\dagger] = \delta_{\alpha\beta} \quad (1.6)$$

Podemos construir los operadores shift que mueven un cuanto de la dirección  $\beta$  a la  $\alpha$  en términos de los anteriores

$$\mathcal{A}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(a_\alpha^\dagger a_\beta + a_\beta a_\alpha^\dagger) \quad (1.7)$$

para  $\alpha, \beta = x, y, z$

Las relaciones de conmutación para los operadores *shift* anteriores se deducen fácilmente de las relaciones de conmutación para los operadores creación y destrucción

$$[\mathcal{A}_{\alpha\beta}, \mathcal{A}_{\gamma\delta}] = \mathcal{A}_{\alpha\delta}\mathcal{A}_{\beta\gamma} - \mathcal{A}_{\gamma\beta}\mathcal{A}_{\alpha\delta} \quad (1.8)$$

Definimos por completitud las nuevas matrices generadoras hermíticas

$$\mathcal{G}_{\alpha\beta}^\pm = (\mathcal{A}_{\alpha\beta} + \mathcal{A}_{\beta\alpha}) \pm i(\mathcal{A}_{\alpha\beta} - \mathcal{A}_{\beta\alpha}). \quad (1.9)$$

El términos de los operadores shift el hamiltoniano del oscilador armónico se escribe

$$H_0 = \mathcal{A}_{xx} + \mathcal{A}_{yy} + \mathcal{A}_{zz} \quad (1.10)$$

El hamiltoniano anterior es invariante bajo transformaciones en el espacio de fases generado por  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{r}$  o equivalentemente invariante bajo el grupo unitario  $U(3)$  (nótese que el hamiltoniano es básicamente una norma, de manera que las transformaciones unitarias dejan invariante el producto  $a^\dagger \cdot a$ ).

Es fácil darse cuenta también usando el algebra de las funciones shift que

$$[H_0, \mathcal{A}_{\alpha\beta}] = 0 \quad (1.11)$$

para todo  $\alpha$  y  $\beta$ , y por tanto para todas las transformaciones unitarias

$$U = \exp(i \sum_{\alpha\beta\pi} C_{\alpha\beta}^\pi \mathcal{G}_{\alpha\beta}^\pi), \quad (1.12)$$

#### 1.4. $SU(3)$ COMO GRUPO INTERMEDIO $G$ : LA SIMETRÍA DEL OSCILADOR CUÁNTICO 11

donde  $\mathcal{G}$  denota los generadores del grupo, tenemos

$$[H_0, U] = 0 \quad (1.13)$$

Puesto que el oscilador armónico es invariante  $U(3)$ , cada autovalor del hamiltoniano se puede etiquetar con una etiqueta de una representación irreducible de  $U(3)$ . Cada autovalor tendrá la degeneración de la dimensión de la representación. A continuación discutiremos el etiquetado de las diversas representaciones de  $U(3)$  en términos de los tableros de Young, pero puede verse que para una partícula en un oscilador armónico el número  $n$  que da el número de cuantos es suficiente para distinguir los estados de las diversas representaciones.

Argumentos similares a los anteriores se pueden dar para mostrar que el hamiltoniano de muchos cuerpos

$$H_0^{total} = \sum_i H_0(i) \quad (1.14)$$

donde  $i$  es el número de partículas, es invariante con respecto al grupo  $U(3)$  descrito por los nueve operadores shift

$$A_{\alpha\beta} = \sum_i \mathcal{A}_{\alpha\beta}(i). \quad (1.15)$$

Estos operadores de muchos cuerpos tienen relaciones de conmutación similares a los operadores monoparticulares. Se pueden definir operadores generadores hermíticos

$$G_{\alpha\beta}^{\pm} = (A_{\alpha\beta} + A_{\beta\alpha}) \pm i(A_{\alpha\beta} - A_{\beta\alpha}). \quad (1.16)$$

Es útil en ocasiones definir el conjunto básico de los nueve operadores shift de  $U(3)$  de manera que tengan propiedades de tensor esférico definidas, en lugar de las propiedades cartesianas dadas anteriormente. El nuevo conjunto consta de  $H_0^{total}$ ,  $L_q$  y  $Q_q$ , que son tensores de rango 0,1,y 2 respectivamente.

El operador  $L_q$  es el operador momento angular orbital

$$L_q = \sum_i l_q(i) \quad (1.17)$$

donde

$$l_q = (r \times p)_q \quad (1.18)$$

y  $Q_q$

$$Q_q = \sum_i \mathcal{Q}_q(i) \quad (1.19)$$

donde

$$Q_q(i) \sim r^2 Y_q^2(\theta_r \phi_r) + p^2 Y_q^2(\theta_p \phi_p) \quad (1.20)$$

es el momento cuadrupolar.

El conjunto de los ocho operadores  $L_q(q = \pm 1, 0)$  y  $Q_q(q = \pm 2, \pm 1, 0)$  conmutan entre si y están por tanto asociados con un subgrupo de  $U(3)$ , en concreto el grupo de transformaciones unitarias con determinante +1,  $SU(3)$ . Las transformaciones unitarias  $U = \exp iC_0 H_0$  para coeficientes arbitrarios reales son simplemente cambios de fase y no tienen interés físico. Por tanto, en el modelo de capas, estrictamente hablando nos interesa solamente la clasificación de acuerdo a  $SU(3)$ .

Otro subgrupo obvio de  $U(3)$  y  $SU(3)$  es el grupo de rotaciones  $O(3)$  generado por los operadores momento angular. Es por esto por lo que podremos hacer una clasificación simultanea. Tenemos por tanto la cadena

$$U(6) \supset U(3) \supset SU(3) \supset O(3) \quad (1.21)$$

## 1.5. Clasificación de acuerdo a $U(3)$ y $SU(3)$

Cualquier solución de N osciladores armónicos independientes se puede escribir

$$|pqr\rangle_{i_1 \dots i_{p+q+r}} = a_x^\dagger(i_1) a_x^\dagger(i_2) \dots a_y^\dagger(i_p) a_y^\dagger(i_{p+1}) \dots a_y^\dagger(i_{p+q}) a_z^\dagger(i_{p+q+1}) \dots a_z^\dagger(i_{p+q+r}) |0\rangle \quad (1.22)$$

donde actuamos sobre el vacío sin cuantos, es decir, el estado  $1s$  con los operadores creación que nos dan la partícula  $i$  en un cuanto de oscilador en la dirección  $\alpha$ .

Supongamos que los estados de partícula independiente están ocupados por  $A$  partículas. Si asumimos que cada miembro del conjunto  $i_1 \dots i_{p+q+r}$  toma sólo valores del conjunto  $1, 2, \dots, A$  (es decir, cada partícula tiene *un* cuanto), entonces, las colecciones de estados  $|pqr\rangle_{i_1 \dots i_A}$ , que tienen una simetría de permutación definida con respecto al grupo de permutaciones  $S_A$  de números de partículas  $1, 2, \dots, A$  tendrán también simetría definida de acuerdo con el grupo  $U(3)$  de transformaciones unitarias entre cuantos.

Como ejemplo consideremos los estados de de dos partículas en los cuales una partícula tiene un cuanto en la dirección  $x$  y otro en la dirección  $y$ . Podemos construir dos estados que no tienen simetría definida,  $a_x^\dagger(1) a_y^\dagger(2)$  y  $a_x^\dagger(2) a_y^\dagger(1)$ . Consideremos por tanto

$$\psi_\pm = a_x^\dagger(1) a_y^\dagger(2) \pm a_x^\dagger(2) a_y^\dagger(1) \quad (1.23)$$

La función  $\psi_+$  es simétrica con respecto al intercambio del número de partícula y se dice que pertenece a la representación  $[2]$  de  $S_2$ . Esta función tambien

pertenece a una representación definida de  $U(3)$  y podemos usar la etiqueta de simetría de partícula para describir esta simetría. La función  $\psi_-$  es antisimétrica con respecto al intercambio del número de partícula y pertenece a la representación [11] de  $S_2$ , o equivalentemente a la (11) de  $U_3$ .

Supongamos ahora que sólo una partícula tiene dos cuantos, uno en la dirección  $x$  y otro en la  $y$ . Los estados de esta partícula se pueden tomar como los anteriores simplemente poniendo 1 en el lugar de 2. Tenemos

$$\psi_+ \approx a_x^\dagger(1)a_y^\dagger(1) \quad (1.24)$$

$$\psi_- \approx 0 \quad (1.25)$$

Para una sólo partícula con dos cuantos solo la representación (2) de  $U(3)$  existe. El estado  $\psi_+$  es un estado monopartícula y pertenece a la representación [1] de  $S_1$ . Hemos demostrado explícitamente como la simetría cuántica y de partícula son equivalentes en la capa  $1p$  que sólo tiene un cuanto de oscilador. Todos los niveles más altos tienen más cuantos de oscilador y por tanto su equivalencia no se mantiene.

Puesto que los cuantos sólo se pueden crear en una de las tres direcciones, es imposible construir un estado totalmente antisimétrico de más de tres cuantos. Por tanto el tablero de Young representando la simetría cuántica debe tener  $N$  cuadrados, y como mucho, tres filas, donde  $N$  es el número total de cuantos, o equivalentemente la representación puede describirse por tres números  $n_1, n_2, n_3$  que miden la longitud de las filas de los tableros de Young y cumplen

$$n_1 \geq n_2 \geq n_3 \quad (1.26)$$

$$n_1 + n_2 + n_3 = N \quad (1.27)$$

Los estados monoparticulares que tienen  $n = 0, 1, 2, \dots etc \dots$  cuantos pertenecen a las representaciones  $(0, 0, 0), (1, 0, 0), (2, 0, 0), \dots, etc \dots$  de  $U(3)$ , respectivamente, es decir, en este caso el número de cuantos  $n$  es una etiqueta suficiente para describir las representaciones de  $U(3)$ .

Las funciones que se transforman de acuerdo a una representación irreducible de  $U(3)$  lo hacen también con respecto a la irreducible de  $SU(3)$ . Sin embargo, conjuntos pertenecientes a representaciones descritas por tableros que difieren solamente en el número de columnas completas pertenecen todos a la misma representación bajo  $SU(3)$ . Por tanto bastan dos números para clasificar los estados de acuerdo con  $SU(3)$  y estos se pueden tomar como

$$\lambda = (n_1 - n_3) \quad (1.28)$$

$$\mu = (n_2 - n_3) \quad (1.29)$$

## 1.6. La acción efectiva

La estructura de los estados nucleares depende por supuesto de lo que asumimos con respecto a las fuerzas nucleares. Es importante recordar sin embargo que la forma del Hamiltoniano nuclear no tiene porqué ser única, es decir, la forma explícita de dos hamiltonianos puede parecer completamente diferente, aunque puedan tener ambos los mismos autovectores y autovalores. Esta situación puede darse en la siguiente forma. Supongamos un hamiltoniano contruido asumiendo una interacción a dos cuerpos. Puesto que estamos tratando con un problema de muchos cuerpos la fuerza efectiva entre dos nucleones no es sólo la fuerza incluida en el hamiltoniano sino que también incluye efectos de términos de orden superior a través de la interacción con los otros nucleones. Por ejemplo, el principio de Pauli modifica la fuerza entre dos nucleones libres transformandola en una fuerza efectiva.

Es difícil derivar un Hamiltoniano efectivo resoluble a partir de uno realista derivado por ejemplo de los datos del scattering a dos cuerpos. Lo que se hace en la práctica es tomar los aspectos más relevantes del problema físico observados en los núcleos y usar una fuerza que reproduzca los mismos, construyendo un hamiltoniano efectivo. La observación de un gap de energía sugiere la importancia de una fuerza de pairing efectiva y la observación de espectros rotacionales sugiere un potencial efectivo cuadrupolo cuadrupolo, aunque no necesariamente.

## 1.7. La fuerza cuadrupolo cuadrupolo

Sabemos que los núcleos ligeros en la región de masas  $A \approx 20$  exhiben aspectos colectivos. Es de esperar que tales aspectos colectivos ocurran solamente si existe algún tipo de comunicación entre lados opuestos del núcleo, o lo que es lo mismo, una fuerza efectiva con un rango más largo que el tamaño del núcleo.

El problema es decidir las partes importantes de esta fuerza efectiva. Consideremos una expansión en términos de un cierto parámetro de rango  $a$  de un cierto potencial central a dos cuerpos, es decir, uno con dependencia radial o Yukawa

$$V^{(2)} = \sum_{i < j} V\left(\frac{r_{ij}}{a}\right) = \sum_{i < j} \left( \xi_0 + \xi_2 \frac{r_{ij}^2}{a^2} + \xi_4 \frac{r_{ij}^4}{a^4} + \dots \right) \quad (1.30)$$

Para rangos grandes la matriz anterior es diagonal y todos los elementos diagonales del problema de  $A$  cuerpos son aproximadamente  $\xi_0[A(A-1)/2]$ ,

debidos al primer término. La primera corrección viene del segundo término que es proporcional a

$$\sum_{i<j} r_{ij}^2 = \sum_{i<j} (r_i - r_j)^2 = (A-1) \sum_i r_i^2 - 2 \sum_{i<j} r_i r_j \cos \theta_{ij}. \quad (1.31)$$

El primer término de esta ecuación es proporcional al potencial del oscilador armónico. Muchos de los estados de muchos cuerpos se ordenan siguiendo a este término de acuerdo con sus cuantos de oscilador, estando los estados con el mismo número de cuantos están degenerados en energía. El splitting de la degeneración vendrá de otros términos en la expansión.

Todas las órbitas de un oscilador armónico tienen la misma paridad. Por tanto, en el modelo de capas con sólo una capa activa todos los elementos de matriz del término  $\sum_{i<j} r_i r_j \cos \theta_{ij}$  son cero. Para más de una capa activa podemos escribir

$$\sum_{i<j} r_i r_j \cos \theta_{ij} = \sum_{i<j} (r_i \cdot r_j) = \frac{1}{2} \sum_{i<j} ((a_i^\dagger + a_i) \cdot (a_j^\dagger + a_j)) \quad (1.32)$$

Los elementos de matriz entre estados con el mismo números de cuanto vienen dados por

$$\frac{1}{2} \sum_{i<j} ((a_i^\dagger \cdot a_i) + (a_i \cdot a_j^\dagger)) = \frac{1}{2} (\tilde{H} - H_0) \quad (1.33)$$

donde  $H_0$  es el hamiltoniano de oscilador armónico de muchos cuerpos  $H_0^{total}$  (hemos omitido el superíndice total por sencillez en la notación), y  $\tilde{H}$  es el hamiltoniano del centro de masas

$$\frac{1}{2} ((\tilde{a}^\dagger \cdot \tilde{a}) + (\tilde{a} \cdot \tilde{a}^\dagger)) \quad (1.34)$$

con

$$\tilde{a}^\dagger = \sum_i a^\dagger(i) \quad (1.35)$$

Por tanto los elementos de matriz de  $\sum_{i<j} (r_i \cdot r_j)$  son constantes entre estados con el mismo número de cuantos de oscilador y la misma excitación del centro de masas y no contribuyen por tanto a ningún splitting de la degeneración.

El siguiente término en la expansión del potencial es proporcional

$$\sum_{i<j} r_{ij}^4 = \sum_{i<j} (r_i^2 + r_j^2 - 2r_i r_j \cos \theta_{ij})^2 = \sum_{i<j} (r_i^4 + r_j^4 + \frac{8}{3} r_i^2 r_j^2 + \frac{4}{3} r_i^2 r_j^2 P_2(\cos \theta_{ij})) - \dots \quad (1.36)$$

donde los puntos suspensivos denotan sumandos con elementos de matriz cero en un modelo de capas con sólo una capa activa. Los primeros tres términos son constantes o monoparticulares con lo que no producen splittings significativos en la degeneración de los estados de muchos cuerpos. Por tanto el primer término que da un splitting neto es proporcional a

$$r_i^2 r_j^2 P_2(\cos \theta_{ij}) \equiv (r_i^2 Y^2(\cos \theta_i \phi_i) \cdot r_j^2 Y^2(\theta_j \phi_j)) \quad (1.37)$$

Este término es el potencial conocido como cuadrupolar y acopla estados del oscilador armónico de muchos cuerpos con diferente número de cuantos. Estos acoplos se ignoran en el marco  $SU(3)$  con el argumento de que el splitting entre capas de oscilador es suficientemente grande por efectos de primer orden como para hacer que tales efectos sean despreciables. Por tanto se considera que el potencial anterior opera sólo en una capa del oscilador. Tenemos entonces

$$r_i^2 Y_q^2(\theta_i \phi_j) \sim \frac{1}{4} \sqrt{\frac{5}{\pi}} Q_q \quad (1.38)$$

donde  $Q_q$  es el operador de  $SU(3)$  que introdujimos en su momento. Por tanto el splitting es proporcional a  $\sum_{i < j} (Q(i) \cdot Q(j))$ . Veamos la relación con las autofunciones clasificadas de acuerdo a  $SU(3)$

## 1.8. El operador de Casimir de $SU(3)$

Ya vimos anteriormente que el oscilador armónico es invariante bajo  $SU(3)$ . Podemos construir otros operadores invariantes a partir de los generadores del grupo que reciben el nombre de operadores de Casimir del grupo. Para  $U(3)$  se puede reescribir

$$C_2 = \sum_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} A_{\beta\alpha} \quad (1.39)$$

con los operadores shift definidos para  $SU(3)$ .

El casimir anterior es invariante con respecto a  $U(3)$ . El casimir  $\tilde{C}_2$  de  $SU(3)$  se puede extraer del anterior eliminando la dependencia del operador  $H_0^{total}$ .

$$\frac{1}{6} \tilde{C}_2 = \sum_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} A_{\beta\alpha} + \frac{1}{6} (2A_{zz} - A_{xx} - A_{yy})^2 + \frac{1}{2} (A_{xx} - A_{yy})^2 \quad (1.40)$$

o equivalentemente

$$\frac{1}{6} \tilde{C}_2 = \frac{1}{6} ((Q \cdot Q) + 3(L \cdot L)) \quad (1.41)$$

donde en la última expresión hemos usado la forma tensorial esférica para los operadores shift. El casimir anterior es claramente invariante o escalar bajo el grupo de rotaciones  $SO(3)$ , como debe ser pues este grupo está contenido en  $SU(3)$ .

Nótese que el casimir dado incluye el término

$$(Q \cdot Q) = \sum_i (Q(i) \cdot Q(i)) + 2 \sum_{i < j} (Q(i) \cdot Q(j)) \quad (1.42)$$

con números de partícula  $i$  y  $j$ . La parte a dos cuerpos de este operador es un término importante para la fuerza de largo alcance en el modelo de oscilador armónico con una capa activa. El término de autoenergía da lugar a un splitting de las órbitas monoparticulares y puede incluirse el término a dos cuerpos que tiene en cuenta las interacciones con capas cerradas.

Podemos reescribir la ecuación para el casimir  $\tilde{C}_2$  como

$$-Q \cdot Q = -\tilde{C}_2 + 3L^2 \quad (1.43)$$

Toda fuerza atractiva de gran rango contiene un término de la forma anterior. Nótese que  $\tilde{C}_2$  es invariante bajo  $SU(3)$  y por tanto no acopla estados pertenecientes a diferentes representaciones. Dentro de una representación, solo los elementos de matriz diagonales son distintos de cero y tiene un valor que depende sólo de los índices de la representación  $(\lambda\mu)$ . El operador  $L^2$  consta de operadores de  $SU(3)$  y por tanto no puede acoplar representaciones diferentes, pero no es invariante con respecto a  $SU(3)$ . Esto es un ejemplo claro de un grupo de simetría roto.

Dentro de una representación de  $SU(3)$  los autovalores de  $(Q \cdot Q)$  son proporcionales a  $L(L+1)$ , que es exactamente el comportamiento colectivo que esperábamos obtener del marco  $SU(3)$ . Además, los estados de menor energía pertenecen a la representación de  $SU(3)$  que maximiza el valor esperado de  $C_2$ .

Puesto que  $\tilde{C}_2$  es invariante con respecto a  $SU(3)$  su valor de expectación entre estados clasificados de acuerdo al grupo depende sólo de los índices de la representación  $(\lambda\mu)$ . Por tanto, cualquier estado perteneciente a esa representación puede usarse para determinar  $\langle \tilde{C}_2 \rangle$ . Es conveniente usar el estado de máximo peso en la clasificación en cadena  $SU(3) \rightarrow SU(2) \times U(1)$ . Dentro de una representación el estado de máximo peso  $\phi(\lambda\mu)$  tiene el máximo número de cuantos en la dirección  $z$  y para este número el máximo en la  $y$ . Claramente entonces

$$A_{xy}\phi(\lambda\mu) = A_{zx}\phi(\lambda\mu) = A_{zy}\phi(\lambda\mu) = 0 \quad (1.44)$$

Los términos  $A_{xy}A_{yx}$  pueden reescribirse como

$$A_{xy}A_{yx} = A_{yx}A_{xy} + A_{xx} - A_{yy} \quad (1.45)$$

y para el estado  $\phi(\lambda\mu)$

$$(2A_{zz} - A_{xx} - A_{yy})\phi(\lambda\mu) = \epsilon_{max}\phi(\lambda\mu), \quad (1.46)$$

$$(A_{xx} - A_{yy})\phi(\lambda\mu) = \nu_{max}\phi(\lambda\mu) \quad (1.47)$$

con  $\epsilon_{max} = 2\lambda + \mu$  y  $\nu_{max} = \mu$  Con esto deducimos

$$\langle \tilde{C}_2 \rangle_{\lambda\mu} = 4[\lambda^2 + \mu\lambda + \mu^2 + 3(\lambda + \mu)] \quad (1.48)$$

expresión que es simétrica en  $\lambda$  y  $\mu$

## 1.9. Un hamiltoniano interesante

Ayudándonos de los anterior construyamos un hamiltoniano más interesante cuyos estados pertenezcan a representaciones irreducibles de  $SU(3)$ . Los índices  $(\lambda, \mu)$  de estas representaciones pueden servir como números cuánticos exactos para los diversos estados. La prescripción es sencilla: construyamos el hamiltoniano a partir de los generadores de  $SU(3)$ . Consideremos el hamiltoniano:

$$H = H_0 + \frac{1}{2}a(Q \cdot Q) + \frac{1}{2}b(L \cdot L) \quad (1.49)$$

En el caso en que  $b = 3a$  el hamiltoniano anterior conmuta con todos los generadores de  $SU(3)$ . Por tanto, los autoestados del hamiltoniano deben pertenecer a representaciones irreducibles de  $SU(3)$  y todos los estados en la misma representación irreducible están degenerados. De hecho, los autovalores de los estados incluidos en representación irreducible  $(\lambda\mu)$  tienen autovalores de  $H$  dados por

$$E = \hbar\omega(N + \frac{3}{2}\hbar) + 2a(\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2 + 3(\lambda + \mu)) \quad (1.50)$$

Si  $b \neq 3a$  el hamiltoniano anterior no conmuta con todos los generadores de  $SU(3)$ . Se puede expresar como

$$H = H_0 + 2a\tilde{C}_2 + \frac{1}{2}(b - 3a)L^2 \quad (1.51)$$

El operador de Casimir conmuta con  $L^2$  que es el operador de Casimir de  $O(3)$ . Ambos son diagonales en las representaciones irreducibles de  $SU(3)$  donde los estados  $L$  tenga valores definidos. Los autoestados en una representación dada no son ya degenerados, y sus autovalores son

$$E = \hbar\omega(N + \frac{3}{2}\hbar) + 2a(\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2 + 3(\lambda + \mu)) + \frac{1}{2}(b - 3a)L(L + 1) \quad (1.52)$$

Los hamiltonianos que poseen las propiedades de simetría descritas aquí se dice que poseen simetrías dinámicas.

Finalmente podríamos añadir al hamiltoniano anterior otro término de Majorana, proporcional al Casimir que baje los estados de energía con mayor simetría espacial. Sin embargo, si nos restringimos a estados con una simetría espacial dada estos tendrán los mismos autovalores del operador de Majorana y por tanto, sólo consideraremos los términos ya incluidos.

A la vista de los autovalores anteriores vemos que todos los autovalores en una representación irreducible dada de  $SU(3)$  tienen los mismos autovalores del Casimir y por tanto sus energías son proporcionales a  $L(L + 1)$ . Si la interacción cuadrupolar es atractiva  $a < 0$  y olvidamos  $b$  a mayor momento  $L$  mayor es la energía. Estas energías se comportan como los niveles de energía de un rotor rígido cuyo momento de inercia viene dado por  $\hbar^2/2\mathcal{I} = -3a/2$ .

Debemos encontrar los valores de  $L$  que pertenecen a estados dentro de una representación irreducible dada. Los que pertenecen a la representación  $(\lambda, 0)$  tienen

$$L = \lambda, \lambda - 2, \dots, 1, 0 \quad (1.53)$$

Aunque el resultado anterior se obtiene para representaciones irreducibles completamente simétricas  $(\lambda, 0)$  de  $\lambda$  cuantos de oscilador de un único nucleón tiene validez general.

En los estados no maximamente simétricos caracterizados por  $(\lambda\mu)$  puede construirse acoplando  $(\lambda + 2\mu)$  partículas con  $l = 1$  para formar estados con esa simetría. Las representaciones irreducibles  $(\lambda, 0)$  se obtienen de acoplar  $\lambda$  partículas a un estado completamente simétrico. Los diagramas correspondientes a la simetría  $(0\mu)$  tienen  $\mu$  columnas con 2 cuadrados. Las partículas en cada columna están acopladas antisimetricamente y por tanto en un estado  $L = 1$ . Las columnas con tres cuadrados en los diagramas de Young de  $SU(3)$  se omiten ya que tres partículas en un estado completamente antisimétrico tienen  $L = 0$  y constituyen una orbita llena. La simetría entre  $\lambda$  y  $\mu$  es una simetría entre partículas y agujeros. Por tanto, para la representación  $(0, \mu)$

$$L = \mu, \mu - 2, \dots, 1, 0 \quad (1.54)$$

Los estados agujero se deben a la antisimetría de los estados cuyos números están escritos en la misma columna del diagrama de Young. Esto está relacionado con el hecho de que para estas partículas hay sólo 3 estados orbitales independientes. Los estados de 3 partículas en una columna son invariantes  $SU(3)$ .

## 1.10. Representación $(\lambda, \mu)$ Tableros de Young

Para construir estado con simetría  $(\lambda, \mu)$  debemos acoplar  $\lambda$  partículas simetricamente,  $\mu$  agujeros simetricamente y combinarlos en dos grupos teniendo en cuenta el tipo de simetría dada. LA representación irreducible  $(\lambda, \mu)$  es el producto de representaciones  $(\lambda, 0)$  y  $(0, \mu)$  y será decompuesta en representaciones irreducibles. Consideremos estados de un conjunto de partículas caracterizados por un diagrama de Young del grupo  $U(N)$  con filas  $f_1, f_2, \dots, f_N$  y estados de otras partículas caracterizados por  $[f'_1 f'_2 \dots f'_N]$ . Los estados combinados se obtienen multiplicando estados de un conjunto por los del otro. Estos se transforman linealmente en representaciones de  $U(N)$  pero en general, no irreducibles. Los estados del sistema combinado se pueden expresar como combinaciones lineales de estados que se transforman irreduciblemente bajo  $U(N)$  mediante una serie de reglas conocidas como tableros de Young.

### 1.10.1. Reglas de los tableros de Young

1. Escribir en la primera fila del diagrama de un sistema el símbolo  $a$ , en la segunda el  $b$  y así sucesivamente
2. Añadir los  $f'_1$  cuadrados de este diagrama al diagrama del otro sistema teniendo en cuenta: i) Que la longitud resultante de las filas  $N$  sea monotonamente no creciente. ii) Que dos cuadrados en los que aparece  $a$  no se añadan a la misma columna.
3. Añadir los  $f'_2$  cuadrados con  $b$  teniendo en cuenta las condiciones anteriores y iii) que contando el número de símbolos añadidos de derecha a izquierda en la fila superior, en la segunda fila, etc . . . el número de  $b$ 's no sea superior al de  $a$ 's.
4. Añadir los  $f'_3$  cuadrados con  $c$  siguiendo las restricciones anteriores ahora con respecto al número de cuadrados conteniendo los símbolos  $a$  y  $b$ .
5. Si el mismo diagrama aparece en este proceso un cierto número de veces, la representación irreducible aparece el mismo número de veces en la descomposición del producto directo.
6. Si para un grupo dado  $U(N)$  el número de filas de uno de los diagramas resultantes excede  $N$ , la correspondiente representación irreducible no aparece en la descomposición del producto.

El resultado para el caso general se describe a continuación. Definimos un entero  $K$  como

$$K = \mu, \mu - 2, \dots, 1, 0 \quad (1.55)$$

los  $L$  valores de los diversos estados se escriben

$$L = K, K + 1, K + 2, \dots, K + \lambda \quad (1.56)$$

con  $K \neq 0$ , mientras que para  $K = 0$  vienen dados por

$$L = \lambda, \lambda - 2, \lambda - 4, \dots, 1, 0 \quad (1.57)$$

Si  $\mu < \lambda$  los papeles de  $\lambda$  y  $\mu$  en las expresiones anteriores se invierten. Una consecuencia inmediata de lo anterior es que el valor máximo de  $L$  en la representación irreducible  $(\lambda\mu)$  es  $\lambda + \mu$ . Además como el valor de  $L$  no puede exceder  $nN$ , donde  $n$  es el número de nucleones y  $N$  la capa del oscilador, tenemos

$$\lambda + 2\mu \leq nN \quad (1.58)$$

Debido a esta última desigualdad el autovalor más alto de  $\tilde{C}_2$  se obtiene para el valor máximo de  $\lambda$  consistente con el principio de Pauli. En la representación irreducible  $(\lambda, 0)$  la banda tiene estados con  $L = \lambda, \lambda - 2, \dots, 1, 0$  cuyas energías son proporcionales a  $L(L + 1)$ . En otras representaciones irreducibles con  $\mu \neq 0$  existen varias bandas cada una de las cuales empieza con uno de los  $K$  valores y contiene estados con valores  $L$ . Las energías dentro de cada banda son proporcionales a  $L(L + 1)$  con el mismo factor de proporcionalidad (iguales momentos de inercia). Los estados con  $L$  dado y dentro de la misma representación  $(\lambda\mu)$  son degenerados, sus energías son independientes de  $K$ . Debido a esta degeneración, asignar estados a las diversas bandas dentro de una representación irreducible es algo arbitrario.

## 1.11. Clasificación de acuerdo a $SU(3)$ y $SU(2) \times U(1)$

Veremos más adelante la conveniencia de usar la clasificación de los estados con respecto a  $SU(3)$  y  $SU(2) \times U(1)$ .

El grupo  $SU(2)$  es el grupo de transformaciones especiales unitarias en dos dimensiones, que pueden tomarse por ejemplo en el plano  $xy$ . Los operadores shift pueden elegirse como

$$A_{\alpha\beta} \quad (1.59)$$

para  $\alpha\beta = x, y$ .

El grupo de  $SU(2)$  es un subgrupo de  $U(2)$  formado por los operadores shift anteriores con excepción del que tiene traza nula que esta asociado con transiciones de fase en el espacio bidimensional.

Como sabemos, las relaciones de conmutación de  $SU(2)$  son las misma de  $SO(3)$  (ambos grupos son isomorfos, siendo uno el recubridor del otro)

$$[\omega_{+1}, \omega_{-1}] = -\omega_0 \quad (1.60)$$

$$[\omega_0, \omega_{\pm 1}] = \pm \omega_{\pm 1} \quad (1.61)$$

donde

$$\omega_0 = \frac{1}{2}(A_{xx} - A_{yy}) \quad (1.62)$$

$$\omega_{+1} = -\sqrt{\frac{1}{2}}A_{xy} \quad (1.63)$$

$$\omega_{-1} = +\sqrt{\frac{1}{2}}A_{yx} \quad (1.64)$$

Definimos un número  $\Lambda$  para describir la simetría con respecto a  $SU(2)$  a corresponder con el momento angular  $J$  que describe la clasificación con respecto a  $O(3)$ . Los estados se definirán como autofunciones de  $\omega_0$  con autovalor  $\nu/2$  por convenio, correspondiente al número cuántico  $M$  para  $L_0$  en  $O(3)$ . Tenemos

$$\frac{\nu}{2} = \Lambda, \Lambda - 1, \dots, -\Lambda \quad (1.65)$$

dentro de una representación  $\Lambda$  de  $SU(2)$ . Además

$$\langle \omega^2 \rangle = \langle \omega_0 - \omega_{+1}\omega_{-1} - \omega_{-1}\omega_{+1} \rangle = \Lambda(\Lambda + 1) \quad (1.66)$$

El grupo  $U(1)$  se describe sólo por un operador shift

$$Q_0 = 2A_{zz} - A_{xx} - A_{yy}, \quad (1.67)$$

operador que conmuta con todos los de  $SU(2)$  y permite por tanto una clasificación simultanea de acuerdo a ambos grupos. Denotaremos por  $\epsilon$  el autovalor de  $Q_0$ .

Resumimos ahora los valores de los números cuánticos  $\epsilon$  y  $\Lambda$

$$\epsilon = 2\lambda + \mu, 2\lambda + \mu - 3, \dots, -\lambda - 2\mu \quad (1.68)$$

y para cada  $\epsilon$  el grupo  $SU(2)$  tiene representaciones

$$\Lambda = \frac{1}{6}|2\lambda - 2\mu - \epsilon|, \frac{1}{6}|2\lambda - 2\mu - \epsilon| + 1, \dots, \min\left[\frac{1}{6}|2\lambda + 4\mu - \epsilon|, \frac{1}{2}|2\lambda + 4\mu + \epsilon|\right] \quad (1.69)$$

## 1.12. Construcción de los estados de acuerdo a $SU(3)$ y $O(3)$

En la sección anterior discutimos la clasificación de acuerdo a  $SU(3) \rightarrow SU(2) \times U(1)$  de estados que denotaremos aquí por  $\phi((\lambda\mu)\gamma\epsilon\Gamma\nu)$  donde  $\gamma$  describe propiedades del estado no dadas explícitamente por los otros números cuánticos. En esta sección recopilamos el análisis generalizado dado originalmente por Elliot. La invarianza del Hamiltoniano nuclear con respecto a  $O(3)$  significa que los estados de mayor interés físico tienen momento angular definido. Puesto que estamos tratando con  $SU(3)$  necesitamos tres números cuánticos para etiquetar los estados. Escribiremos estos estados como  $\psi((\lambda\mu)\alpha LM)$  donde  $\alpha$  es el tercer número cuántico. Veámos cual es la estructura explícita de estos estados y sus características rotacionales. Puesto que ambos conjuntos de estados forman una base, es posible expandir cualquiera de las funciones  $\phi$  en términos de  $\psi$

$$\phi((\lambda\mu)\gamma\epsilon\Lambda\nu) = \sum_{\alpha LK_L} a((\lambda\mu)\gamma\epsilon\Lambda\nu, \alpha LK_L) \psi((\lambda\mu)\alpha LK_L) \quad (1.70)$$

donde  $a$  son coeficientes de la expansión en serie. Consideremos la expansión anterior en un sistema rotado mediante los ángulos de Euler  $\Omega$  con respecto a un sistema fijo, como el del laboratorio

$$\phi_\Omega((\lambda\mu)\gamma\epsilon\Lambda\nu) = \sum_{\alpha LK_L} a((\lambda\mu)\gamma\epsilon\Lambda\nu, \alpha LK_L) \psi_\Omega((\lambda\mu)\alpha LK_L) \quad (1.71)$$

Podemos escribir

$$\psi_\Omega((\lambda\mu)\alpha LK_L) = \sum_{K'_L} \mathcal{D}_{K'_L K_L}^{L*}(\Omega) \psi_\Omega((\lambda\mu)\alpha LK'_L) \quad (1.72)$$

donde  $\mathcal{D}$  es un elemento de la matriz de rotación. Sustituyendo esta última expresión en la anterior, multiplicando por  $\mathcal{D}_{M_L K_L}^L$  e integrando sobre los ángulos de Euler tenemos

$$\int \mathcal{D}_{M_L K_L}^L \phi_\Omega((\lambda\mu)\gamma\epsilon\Lambda\nu) d\Omega = \sum_{\alpha} \frac{a((\lambda\mu)\gamma\epsilon\Lambda\nu, \alpha LK_L)}{2L+1} \psi((\lambda\mu)\alpha LM_L) \quad (1.73)$$

En esta ecuación las funciones  $\psi$  no están definidas con respecto al número cuántico  $\alpha$ . Los estados  $\psi$  se definirán ahora como aquellos estados de  $L$  definido y  $K_L$  en la expansión del estado de máximo peso  $\phi$  de máximo  $\epsilon$  y  $\nu$  en la representación  $(\lambda\mu)$  de  $SU(3)$  y por tanto

$$\phi_\Omega((\lambda\mu)\gamma(\epsilon\Lambda\nu)_{max}) = \sum_{LK_L} a((\lambda\mu)\gamma(\epsilon\Lambda\nu)_{max}, \alpha LK_L) \psi_\Omega((\lambda\mu)LK_L) \quad (1.74)$$

La propiedad importante del estado de máximo peso  $\phi(\lambda\mu)$  es que las funciones  $\psi((\lambda\mu)LK_L M_L)$ ,  $M_L = L, L-1, \dots, -L$ , generan todos los estados de la representación  $(\lambda\mu)$  (ver el artículo original de Elliot).

Por tanto cualquier estado de la representación  $(\lambda\mu)$  de  $SU(3)$  con momento angular  $L$  se pueden escribir en términos de la proyección de  $L$  y  $K_L$  desde el estado de máximo peso

$$\psi((\lambda\mu)\gamma K_L L M_L) = \frac{2L+1}{a((\lambda\mu)LK_L)} \int \mathcal{D}_{M_L K_L}^L \phi_\Omega((\lambda\mu)\gamma) d\Omega \quad (1.75)$$

Por tanto, las funciones con momento angular definido en una representación de  $SU(3)$  se pueden escribir de manera muy similar a los estados del modelo colectivo con el estado intrínseco  $\phi((\lambda\mu)\gamma)$ . El número cuántico  $K_L$  es sólo la proyección del momento angular orbital en el eje intrínseco  $z$ .

Elliot mostró que proyectando desde el estado de máximo peso  $\epsilon_{max} = 2\lambda + \mu$  los valores permitidos de  $L$  vienen dados por

$$K = \min[\lambda, \mu], \min[\lambda, \mu] - 2, \dots, 0, 1 \quad (1.76)$$

$$L = K, K+1, \dots, K + \max[\lambda, \mu] \quad (1.77)$$

para  $K \neq 0$  y

$$L = \max[\lambda, \mu], \max[\lambda, \mu] - 2, \dots, 0, 1 \quad (1.78)$$

para  $K = 0$ .

Lo que muestra que los  $L$  valores que obtenemos dentro de  $SU(3)$  son los de una serie de niveles en una banda rotacional, con un cut-off a un valor máximo  $L = K + \max[\lambda, \mu]$ . En base a esto podemos interpretar  $\phi$  como el estado intrínseco,  $\epsilon$  como el momento cuadrupolar intrínseco, y  $K$  como la proyección del momento angular sobre el eje de simetría  $z$ . El estado  $\psi$  puede identificarse como el estado  $LM$  proyectado desde un estado intrínseco con  $K$  a lo largo del eje de simetría. Por tanto hay una analogía completa con el modelo rotacional.

### 1.13. Aplicación a núcleos ligeros

En el modelo  $SU(3)$  los estados nucleares más bajos están descritos por funciones que tienen simetría orbital máxima y se transforman de acuerdo a las representaciones que maximizan el valor esperado del Casimir. Debemos recordar sin embargo, que el marco  $SU(3)$  se ha diseñado específicamente para describir efectos colectivos en el núcleo. Si las fuerzas en un núcleo particular no cooperan para dar efectos colectivos, la clasificación  $SU(3)$  fallará. Si los efectos colectivos están presentes pero se deben parcialmente a

fuerzas dependientes del espín, la clasificación  $SU(3)$  también fallará. No es posible saber a priori por cálculos teóricos la validez del marco en el modelo de capas aislado debido al tamaño del problema. La validez del modelo  $SU(3)$  se basa en su habilidad para la descripción correcta de los núcleos reales. En esta sección discutiremos muy brevemente las predicciones y consecuencias asumiendo la clasificación exacta según  $SU(3)$ .

Para la discusión de los estados de paridad normal con una capa activa en la región  $0 < A \leq 16$ , es decir, el llenado de las capas  $1s$  y  $1p$  el modelo  $SU(3)$  añade poco al modelo de capas. Para núcleos de masa por encima de  $A = 40$  incluso el modelo partículas independientes implica efecto espín-órbita no triviales en el potencial medio, invalidando la aplicación del modelo  $SU(3)$ . Las aplicaciones de la clasificación  $SU(3)$  se restringen usualmente a masas  $16 \leq A \leq 40$ , es decir, al llenado de las capas  $2s$  y  $1d$ , aunque en principio pueda ser aplicado a cualesquiera órbitas de oscilador.

## 1.14. Precisión en las capas (2s, 1d)

Para que el modelo  $SU(3)$  sea válido la parte central del potencial residual debe dominar la interacción.

Al introducir el modelo, Elliot, mostró que para  $^{18}F, ^{18}O$  y  $^{19}F$  la similitud existente entre los estados de paridad positiva de excitación cero, clasificados de acuerdo a  $SU(3)$ , y las autofunciones dentro del modelo de un hamiltoniano realista que había sido usado para describir las propiedades de los núcleos ligeros. La interacción usada tenía una dependencia radial Yukawa y un potencial de partícula independiente para reproducir el splitting de los niveles de partícula independiente observados en  $O^{17}$ .

Los resultados de Elliot mostraron un gran porcentaje de estados de máxima simetría orbital en el estado variacional indicando la dominancia de las fuerzas independientes del espín. Los estados de máxima simetría orbital se adaptan muy bien a los estados de la representación dominante de  $SU(3)$ , lo cual indica fenómenos colectivos efectivos.

El esquema general parece indicar que al inicio de la capa (2s, 1d) una gran cantidad de estados del modelo de capas asociados a una capa activa pueden clasificarse de acuerdo a la representación dominante de  $SU(3)$  con máximo momento orbital. Este comportamiento falla al avanzar en la capa debido al crecimiento de las partes de la interacción dependientes del espín.

## 1.15. Algunos ejemplos sencillos

En esta sección aplicaremos de manera práctica el modelo de Elliot a algunos núcleos ligeros seleccionados. Además de todo lo mencionado anteriormente en cuanto a la maximización del operador de Casimir se deberá tener en cuenta ahora que sólo serán físicas las representaciones totalmente antisimétricas. Esto no contradice lo anterior puesto que aunque la parte asociada a  $SU(3)$  es simétrica, la parte asociada al grupo  $U(4)$  que describe los cuatro estados de carga-espín es antisimétrica, de manera que la representación asociada al grupo total

$$U(24) \supset SU(3) \times U(4) \quad (1.79)$$

es antisimétrica.

### 1.15.1. El ${}^8Be$

Llenamos completamente la capa  $1s$ , quedándonos con dos protones y dos neutrones en un cuanto de oscilador  $N = 1$ . Tenemos por tanto<sup>1</sup>.

$$(1, 0) \otimes (1, 0) \otimes (1, 0) \otimes (1, 0) = (4, 0) \oplus (2, 1) \oplus (0, 2) \oplus (0, 2) \oplus (2, 1) \quad (1.80)$$

La representación maximamente simétrica que extremiza el valor del Casimir es la  $(4, 0)$ . Tenemos por tanto

$$K = \min[\lambda, \mu], \dots = 0 \quad (1.81)$$

$$L = \max[\lambda, \mu], \max[\lambda, \mu] - 2, \dots, 0, 1 = 4, 2, 0 \quad (1.82)$$

La amplitud de probabilidad reducida en general viene dada por

$$B(E2, J \longrightarrow J - 2) = \frac{15}{32\pi} \frac{J(J+1)}{(2J+1)(2J-1)} e^2 Q_0^2 \quad (1.83)$$

donde  $Q_0^2$  es el momento cuadrupolar viene dado por

$$Q_0 = (2\lambda + \mu + 3)b^2 \quad (1.84)$$

La probabilidad total será

$$W(E2) = 1, 23 \times 10^9 E_\gamma^5 B(E2) \quad (1.85)$$

---

<sup>1</sup>No incluimos aquí los tableros de Young por ahorrarnos escribirlos en Latex

En este caso tenemos

$$B(E2, 2^+ \longrightarrow 0^+) = \frac{1}{16\pi} e^2 Q_0^2 = \frac{1}{16\pi} (11b^2) e^2 \quad (1.86)$$

Tomando  $b = 1,6$  fermis y  $E_\gamma = 3\text{MeV}$  tenemos una probabilidad total

$$W(E2) = 7,938 \times 10^{12} s^{-1} \quad (1.87)$$

Con lo que el tiempo de vida medio es

$$\tau = \frac{1}{W(E2)} = 1,25 \times 10^{-13} s \quad (1.88)$$

Para comparar con los datos experimentales calculamos la semivida

$$t_{1/2} = \tau \ln 2 = 8,74 \times 10^{-14} s \quad (1.89)$$

Experimentalmente  $\Gamma^{exp} = 8,3$  eV, con lo que  $t_{1/2} = 7,9 \times 10^{-17} s$ .

La vida media experimental es tres ordenes de magnitud menor que la calculada. Esto no debe sorprender, el  $^8Be$  se desintegra mediante desintegración  $\alpha$  en lugar de por desintegración electromagnética. La desintegración  $E2$  *nunca* llega a producirse.

## 1.16. El $^{12}C$

Tenemos 6 protones y 6 neutrones, de los cuales llenan la capa  $1s$  completamente quedándonos 4 protones y 4 neutrones en un cuanto de oscilador. Con esto el producto de representaciones queda

$$(1, 0) \otimes (1, 0) \quad (1.90)$$

La representación maximamente simétrica a considerar es la  $(0,4)$  pues al añadir 4 partículas más obtenemos la representación  $0, 0$  como esperaríamos. Tenemos por tanto

$$K = 0 \quad (1.91)$$

$$L = 4, 2, 0 \quad (1.92)$$

Para la transición  $2^+ \longrightarrow 0^+$  y tomando  $b = 1,6$  fermis y  $E_\gamma = 4,458\text{MeV}$  tenemos una probabilidad total

$$W(E2) = 1,32 \times 10^{13} s^{-1} \quad (1.93)$$

Con lo que el tiempo de vida medio es

$$\tau = \frac{1}{W(E2)} = 7,5 \times 10^{-14} s \quad (1.94)$$

Para comparar con los datos experimentales calculamos la semivida

$$t_{1/2} = \tau \ln 2 = 5,19 \times 10^{-14} s \quad (1.95)$$

El valor obtenido concuerda en orden de magnitud con el esperado  $6,09 \times 10^{-14}$ , aunque existe una ligera diferencia.

Para la transición  $4^+ \rightarrow 2^+$  y  $E_\gamma = 9,645$  MeV tenemos una probabilidad total

$$W(E2) = 9,23 \times 10^{14} s \quad (1.96)$$

Con lo que el tiempo de vida medio es

$$\tau = \frac{1}{W(E2)} = 1,083 \times 10^{-15} s \quad (1.97)$$

Para comparar con los datos experimentales calculamos la semivida

$$t_{1/2} = \tau \ln 2 = 7,5 \times 10^{-16} s \quad (1.98)$$

Valor que difiere significativamente del experimental  $2,55 \times 10^{-21}$ .

### 1.17. El $^{20}Na$

De nuevo llenamos la capa  $1s$ , la  $1p$  y tenemos 2 protones y 2 neutrones en  $N = 2$ . Es decir, tenemos un producto de representaciones de la forma

$$(2, 0) \otimes (2, 0) \otimes (2, 0) \otimes (2, 0) \quad (1.99)$$

Podemos ahora utilizar los resultados del apartado anterior. La representación irreducible que maximiza el Casimir es la  $(8, 0)$ . Tenemos por tanto

$$K = 0 \quad (1.100)$$

$$L = 8, 6, 4, 2, 0 \quad (1.101)$$

Con lo que para la transición  $2^+ \rightarrow 0^+$  tenemos

$$B(E2, 2^+ \rightarrow 0^+) = 25,3e^2 fm^4 \quad (1.102)$$

donde hemos tomado  $b \sim 1,8$  fm. Con esto y teniendo en cuenta que la energía del fotón es  $E_\gamma = 1,63$  MeV tenemos

$$W(E2) = 1,072 \times 10^{-12} s^{-1} \quad (1.103)$$

Con lo que

$$t_{1/2} = 0,65 \times 10^{-12} s \quad (1.104)$$

Comparando con el valor experimental  $t_{1/2}^{exp} = 0,73$  ps vemos que el acuerdo es muy bueno.

Para la transición  $4^+ \longrightarrow 2^+$  tenemos  $E_\gamma = 2,61$  MeV, con lo que

$$B(E2, 4^+ \longrightarrow 2^+) = 106,11 e^2 fm^4 \quad (1.105)$$

y

$$W(E2) = 1,6 \times 10^{13} s^{-1} \quad (1.106)$$

de manera que finalmente

$$t_{1/2} = 43 \times 10^{-15} s \quad (1.107)$$

Comparando con el valor experimental  $t_{1/2}^{exp} = 64 \times 10^{-15}$  s vemos que el acuerdo es relativamente bueno.

Por último, para la transición  $6^+ \longrightarrow 4^+$  se tiene  $E_\gamma = 4,529$  MeV

$$B(E2, 6^+ \longrightarrow 4^+) = 117,5 e^2 fm^4 \quad (1.108)$$

y

$$W(E2) = 2,79 \times 10^{14} s^{-1} \quad (1.109)$$

lo cual implica

$$t_{1/2} = 2,49 \times 10^{-15} s \quad (1.110)$$

El valor experimental  $t_{1/2}^{exp} \sim 6 \times 10^{-18}$  s con lo que vemos que el modelo no funciona bien..

## 1.18. El $^{24}Mg$

Tenemos 12 protones y 12 neutrones que llenan las capas  $1s, 1p$ , quedándonos 4 protones y 4 neutrones en  $N = 2$ . Tenemos por tanto el producto de representaciones

$$(2, 0) \times (2, 0) \quad (1.111)$$

No interesa hacer el cálculo completo pues estamos interesados solamente en la configuración maximamente simétrica que maximiza el Casimir. La

representación irreducible que maximiza el Casimir es la  $(8, 4)$ . De manera que

$$K = 4, 2, 0 \quad (1.112)$$

Para  $K = 4$

$$L = 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \quad (1.113)$$

Para  $K = 2$

$$L = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \quad (1.114)$$

Para  $K = 0$

$$L = 8, 6, 4, 2, 0 \quad (1.115)$$

En el caso  $K = 0$  tenemos, tomando  $b = 1,8\text{fm}$  y  $E_\gamma = 1,368\text{ MeV}$

$$B(E2, 2^+ \longrightarrow 0^+) = 110,67e^2 fm^4 \quad (1.116)$$

y

$$W(E2) = 6,31 \times 10^{11} s^{-1} \quad (1.117)$$

lo cual implica

$$t_{1/2} = 1,11 \times 10^{-12} s \quad (1.118)$$

El valor experimental  $t_{1/2}^{exp} = 1,35 \times 10^{-12} s$  con lo que vemos que el acuerdo teoría experimento es excelente.

Para la transición  $4^+ \longrightarrow 2^+$  con  $E_\gamma = 2,75\text{ MeV}$

$$B(E2, 4^+ \longrightarrow 2^+) = 155,50e^2 fm^4 \quad (1.119)$$

con lo que

$$W(E2) = 3,01 \times 10^{13} s^{-1} \quad (1.120)$$

y

$$t_{1/2} = 23 \times 10^{-15} s \quad (1.121)$$

El valor experimental  $t_{1/2} = 23 \times 10^{-15} s$  es de nuevo muy similar al predicho por el modelo teórico de Elliot.

Por último analicemos la transición  $6^+ \longrightarrow 4^+$ . En este caso tenemos fotones de energía  $E_\gamma = 3,99\text{ MeV}$  con lo que

$$B(E2, 6^+ \longrightarrow 4^+) = 173,82e^2 fm^4 \quad (1.122)$$

$$W(E2) = 2,16 \times 10^{14} s^{-1} \quad (1.123)$$

y

$$t_{1/2} = 3,2 \times 10^{-15} s \quad (1.124)$$

De nuevo el valor experimental  $t_{1/2} = 3,5 \times 10^{-15} s$  se asemeja muchísimo al valor obtenido.

## 1.19. Un aspecto curioso: la similitud con el Hartree-Fock

Consideraremos ahora el problema de si el esquema Hartree-Fock y el  $SU(3)$  dan lugar al mismo estado intrínseco para las fuerzas independientes del espín. El método de Hartree-Fock da un determinante de Slater para el estado intrínseco, por tanto la equivalencia entre los dos métodos se alcanzará si el estado intrínseco de  $SU(3)$  es también un determinante.

El potencial de partícula independiente por el método autoconsistente de Hartree-Fock que se deriva de un potencial a 2 cuerpos general  $V^{(2)}$  se puede escribir

$$V_{HF} = \sum_{\alpha\beta} \left( \sum_{\gamma\delta} \tilde{V}_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(2)} \langle a_{\gamma}^{\dagger} a_{\delta} \rangle \right) a_{\alpha}^{\dagger} a_{\beta} \quad (1.125)$$

donde  $\tilde{V}_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(2)} = \langle \alpha\gamma | V^{(2)} | \beta\delta - \delta\beta \rangle$  y los valores de expectación se toman con respecto al estado base de Hartree-Fock. Si asumimos un potencial  $V^{(2)} = V_0 \sum_{i<j} (Q(i) \cdot Q(j))$  y tomamos sólo el término directo en la ecuación anterior tenemos

$$V_{HF} = \sum_{\alpha\beta} \left( V_0 \sum_q (-1)^q \sum_{\gamma\delta} \langle \alpha | Q_q | \beta \rangle \langle \gamma | Q_{-q} | \delta \rangle \langle a_{\gamma}^{\dagger} a_{\delta} \rangle \right) a_{\alpha}^{\dagger} a_{\beta} \quad (1.126)$$

Recordando que el operador cuadrupolar puede escribirse

$$Q_q = \sum_{\alpha\beta} \langle a | Q_q | \beta \rangle a_{\alpha}^{\dagger} a_{\beta} \quad (1.127)$$

tenemos

$$V_H = V_0 \sum_q (-1)^q \langle Q_{-q} \rangle Q_q \quad (1.128)$$

Si asumimos ahora que el estado intrínseco  $SU(3)$  de peso máximo es el estado Hartree a la hora de construir  $V_H$ , entonces podemos mostrar que  $V_H$  tiene realmente  $\phi(\lambda\mu)$  como autoestado, es decir, habremos llegado a la autoconsistencia para el estado  $\phi(\lambda\mu)$ . Para el estado  $\phi(\lambda\mu)$

$$\langle Q_0 \rangle = 2\lambda + \mu \quad (1.129)$$

$$\langle Q_{\pm 1} \rangle = 0 \quad (1.130)$$

$$\langle Q_{\pm 2} \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{6} \mu \quad (1.131)$$

y

$$V_H = V_0 \left( (2\lambda + \mu) Q_0 + \frac{1}{2} \sqrt{6} \mu (Q_2 + Q_{-2}) \right) \quad (1.132)$$

$V_H$  viene dado en términos de operadores diagonales en la representación intrínseca y por tanto tiene el estado  $\phi(\lambda\mu)$  como autoestado.

Nótese que para  $\mu = 0$  (simetría axial) el potencial de Hartree no es más que el potencial de Nilsson después de ignorar los términos de partícula independiente o lo que es lo mismo, es la región de gran deformación  $\delta$ .

No debería sorprendernos demasiado la similitud entre ambos enfoques. El procedimiento de Hartree-Fock saca los efectos de campo de un potencial dado y aquellos que son de largo alcance. Uno de los términos dominantes de largo rango tiene un potencial de la forma  $QQ$  que esta intimamente relacionado con el operador de Casimir de  $SU(3)$ .

Para potenciales centrales ambos enfoques dan lugar a los mismos estados colectivos. Con potenciales dependientes del espín los dos enfoques pueden desviarse en sus prescripciones para generar el estado colectivo más bajo.

## 1.20. Conclusiones

El modelo  $SU(3)$  describe de manera cualitativa muchos de los efectos colectivos observados en los núcleos ligeros. En muchos casos los aspectos cualitativos de muchos de los estados de paridad natural de núcleos con masas  $A < 24$  pueden entenderse con una simple estructura de capa activa.

El acuerdo cuantitativo con el experimento no es tan bueno, y en los casos donde se ha conseguido un muy buen acuerdo, se piensa que esto se debe a una falta de datos y no a un completo éxito del modelo.

El fallo cuantitativo del modelo no significa que deba abandonarse. Por el contrario, el acuerdo cualitativo con el experimento sugiere que no estamos tan lejos de la respuesta correcta al asumir que el potencial  $QQ$  juega un papel importante en determinar la estructura de los estados, al menos para algunos núcleos ligeros. Podemos utilizar el modelo  $SU(3)$  de la misma manera que se usa el modelo de partículas independientes para estudiar los fenómenos colectivos, es decir, como base para comparar con los datos experimentales.

# Capítulo 2

## Apéndice I

### 2.1. Reglas de los tableros de Young

1. Escribir en la primera fila del diagrama de un sistema el símbolo  $a$ , en la segunda el  $b$  y así sucesivamente
2. Añadir los  $f'_1$  cuadrados de este diagrama al diagrama del otro sistema teniendo en cuenta: i) Que la longitud resultante de las filas  $N$  sea monotonamente no creciente. ii) Que dos cuadrados en los que aparece  $a$  no se añadan a la misma columna.
3. Añadir los  $f'_2$  cuadrados con  $b$  teniendo en cuenta las condiciones anteriores y iii) que contando el número de símbolos añadidos de derecha a izquierda en la fila superior, en la segunda fila, etc . . . el número de  $b$ 's no sea superior al de  $a$ 's.
4. Añadir los  $f'_3$  cuadrados con  $c$  siguiendo las restricciones anteriores ahora con respecto al número de cuadrados conteniendo los símbolos  $a$  y  $b$ .
5. Si el mismo diagrama aparece en este proceso un cierto número de veces, la representación irreducible aparece el mismo número de veces en la descomposición del producto directo.
6. Si para un grupo dado  $U(N)$  el número de filas de uno de los diagramas resultantes excede  $N$ , la correspondiente representación irreducible no aparece en la descomposición del producto.



# Bibliografía

- [1] Elliot, J.P, Proc.Roy. Soc.**A425**:128 y 562 (1958)
- [2] Nuclear Structure Theory, J.M. Irvine, Pergamon Press 1972
- [3] Unified Theory of Nuclear Models and Forces, G.E.Brown, North-Holland Publishing Company 1971
- [4] Simple Models of Complex Nuclei. Igal Talmi. Harwood Academic Publishers 1993
- [5] Elliot's  $SU(3)$  model and its developments in Nuclear Physics, A.Arima, J.Phys.G: Nucl.Part:Phys.**25** (1999) 581-588
- [6] Nuclear Rotational Spectra, the Elliot Model, and de  $P_2$  Force, Ramond S.Willey. PHysical Review **126** 3 (1962)
- [7] Group Symmetries in Nuclear Structure, Jitendra C.Parkikh, Plenum Press, 1978