TEORÍA FENOMENÓLOGICA Y MICROSCÓPICA DE LA SUPERCONDUCTIVIDAD

JAVIER RUBIO PEÑA

Abstract

En este trabajo analizaré el fenómeno de la conductividad desde diversos puntos de vista. En primer lugar haré una descripción meramente fenoménológica del mismo, lo que me permitirá introducir las ideas esenciales. Abordaré el fenómeno clave de la teoría, la formación de pares de Cooper, dando una explicación a partir de teoría de campos del origen de la interacción atractiva (cuestión que a menudo no aparece en los libros de estado sólido) y cuantificando el tamaño de los pares de Cooper, lo que me llevará a introducir un función de onda que tenga en cuenta un gran número de partículas: la función BCS. Deduciré la forma de esta función de onda utilizando una transformación de Bogoliubov y la utilizaré para calcular la energía del gap y otra serie de parametros convenientes. Por último analizaré el papel de la ruptura de simetría en la teoría y utilizaré estos argumentos para entender el efecto Meissner desde un punto de vista fundamental.

Contents

Chapter 1

Bases experimentales y fenomenología de la superconductividad

1.1 Introducción

La superconductividad es uno de los capítulos más fascinantes de la física moderna. Ha sido una contínua fuente de inspiración para diversas ramas de la física y cuenta con gran cantidad de aplicaciones. Antes de abordar el problema de forma precisa expondré las características esenciales de este curioso fenómeno, sus evidencias experimentales y los modelos fenomenológicos más sencillos , dejando para los próximos capítulos la descripción microscópica del mismo.

1.2 Hechos experimentales básicos

La superconductividad fue descubierta en 1911 por Kamerlingh Onnes en Leiden. La observación básica realizada por el mismo fue la desaparición de la resistencia eléctrica en diversos metales en un pequeño rango de temperaturas en torno a una temperatura crítica T_c característica del material . Este efecto fué especialmente claro en experimentos con corrientes persistentes en anillos superconductores, que fluían sin un decremento apreciable hasta situar una cota mínima de 10^5 años en su tiempo de decaimiento. Nótese que mientras los conductores habituales tienen conductividades del orden de 10^{-6} ohm cm a varios grados Kelvin de temperatura, la conductividad típica de un superconductor es del orden de 10^{-23} ohm cm. Las temperaturas críticas se encuentran se situan en torno a los 4.15 K para el mercurio, 3.69 K para el aluminio y los 9.2 K para el niobio.

En 1933 Meissner y Ochsenfeld descubrieron el diamagnetismo perfecto, tal que un campo magnético $\mathbf{B}$ penetra tran sólo una profundidad en torno a los 500 $\AA$ quedando excluido por tanto del cuerpo del material.

Se podría pensar que debido a la desaparición de la resistencia eléctrica el campo eléctrico es cero en el interior del material y por tanto debido a la ecuación de Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{1.1}$$

el campo magnético se queda congelado cuando es expulsado. Esto implica que la superconductividad será destruida por un campo magnético crítico H_c tal que

$$f_s(T) + \frac{H_c^2(T)}{8\pi} = f_n(T) \tag{1.2}$$

donde $f_{s,n}(T)$ son las densidades de energía libre en la fase superconductora a campo magnético cero y la densidad de energía libre en la fase normal respectivamente. Experimentalmente se encuentra que el comportamiento del campo magnético crítico con la temperatura es parabólico

$$H_c(T) \sim H_c(0)\Big[1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^2\Big] \tag{1.3}$$

El campo crítico a temperatura cero es del orden de unos pocos cientos de Gauss para superconductores como el Al, Sn, In, Pb, etc. Se dicen que estos conductores son “blandos”, mientras que se denotan por conductores “duros” a aquellos que como el Nb_3Sn presentan un campo crítico de al menos 10^5 Gauss. Hasta un cierto valor crítico H_{c1} el efecto Meissner será completo, por encima de este el flujo magnético penetra en el material en forma de vórtices (vórtices de Abrikosov), llegando dicha penetración a ser completa para un cierto valor crítico H_{c2} del campo magnético.

A campo magnético cero se observa una transición de fase de segundo orden a $T = T_c$. El valor del calor específico se eleva tres veces respecto al calor específico en el estado normal. En el límite de temperatura cero el calor específico decrece exponencialmente (debido, como veremos, a la energía del gap de las excitaciones de quasipartículas).

Se observa además (Frolich, Maxwell y Reynolds, 1950)una cierta dependencia de la temperatura de transición con la masa isotópica del material, de la forma

$$T_c \sim H_c(0) \sim \frac{1}{M^\alpha}, \tag{1.4}$$

lo que hace que la temperatura crítica y el campo crítico sean mayores para los isotopos más ligeros.

Conocidas las distintas manifestaciones experimentales de la superconductividad nuestro objetivo será encontrar un formalismo matemático que sea capaz de explicar dichos fenómenos. La tarea no es sencilla, y de hecho, a día de hoy, no existe un entendimiento completo del fenómeno. En las siguientes secciones se presentan distintas modelizaciones fenomenológicas del proceso, dejándose la descripción microscópica del mismo para el siguiente capítulo.

1.3 Modelos fenomenológicos

En esta sección describiré someramente algunos de los primeros modelos fenomenológicos que intentaron explicar el fenómeno de la superconductividad. Desde el principio parecía claro que en un superconductor una cierta fracción de electrones formaba una especie de condensado o superfluido capaz de moverse como un todo (superfluido). A temperatura igual a cero esta condensación es completa en todo el volumen, pero al aumentar la temperatura parte del condensado se evapora y forma un líquido de Fermi usual debilmente interactuante. A la temperatura crítica todo el condensado desaparece. Comenzaremos revisando el primer modelo de dos fluidos formulado por Gorter y Casimir.

1.3.1 Teoría de Gorter-Casimir

Este modelo fue formulado por primera vez en 1934 y se basa en un simple "antsatz" para la energía libre del superconductor. Gorter y Casimir propusieron la siguiente expresión para dicha energía libre:

$$F(x,T) = \sqrt{x} f_n(T) + (1-x) f_s(T), \tag{1.5}$$

donde $f_n(T) = -\frac{\gamma}{2}T^2$ y $f_s(T) = -\beta = constante.$

La energía libre para los electrones en el estado normal es simplemente $f_n(T)$, mientras que $f_s(T)$ da la energía de condensación asociada al superfluido. Minimizando la energía libre con respecto a x, encontramos la fracción de electrones normales a temperatura T

$$x = \frac{\gamma^2}{16\beta^2} T^4. \tag{1.6}$$

Vemos que a $x = 1$ la temperatura crítica viene dada por

$$T_c^2 = \frac{4\beta}{\gamma}, \tag{1.7}$$

y por tanto,

$$x = \left(\frac{T}{T_c}\right)^4. \tag{1.8}$$

Es correspondiente valor de la energía libre será entonces

$$F_s(T) = -\beta \left(1 + \left(\frac{T}{T_c}\right)^4\right) \tag{1.9}$$

Teniendo en cuenta la expresión (1.2) para el campo magnético crítico, y usando

$$F_n(T) = -\frac{\gamma}{2}T^2 = -2\beta \left(\frac{T}{T_c}\right)^2 \tag{1.10}$$

se encuentra facilmente que

$$H_c(T) = H_0 \left(1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^2\right) \tag{1.11}$$

con $H_0 = \sqrt{8\pi\beta}$. El calor específico en la fase normal es

$$c_n = -T\frac{\partial^2 F_n(T)}{\partial T^2} = \gamma T, \tag{1.12}$$

mientras que en la fase superconductora

$$c_s = 3\gamma T \left(\frac{T}{T_c}\right)^3, \tag{1.13}$$

lo que muestra que existe un salto en el calor específico. En acuerdo general con los experimentos el cociente entre ambos calores específicos en el punto de transición es 3. Claramente este es un modelo "ad-hoc", sin ningún tipo de justificación teórica pero es interesante puesto que lleva consigo predicciones no triviales y esta en acuerdo razonable con los experimentos. No obstante, la expresión postulada para la energía libre no tiene nada que ver, como veremos, con la derivada a partir de la teoría microscópica.

1.3.2 Teoría de London

Los hermanos H. y F. London propusieron en 1935 una descripción fenomenológica de los aspectos básicos de la superconductividad basada en un superfluido y un fluido usual con densidades n_s y n_n con velocidades v_s y v_n respectivamente, tal que se satisface

$$n_s + n_n = n \tag{1.14}$$

donde n es el número medio de electrones por unidad de volumen. Las dos densidades de corriente satisfacen

$$\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} = \frac{n_s e^2}{m}\mathbf{E} \tag{1.15}$$

$$\mathbf{J}_n = \sigma_n \mathbf{E} \tag{1.16}$$

donde las corrientes se relacionan con la velocidad a través de la relación usual $J = -env$.

La primera de las ecuaciones no es más que la ecuación newtoniana para partícula de carga $-e$ y densidad n_s. La otra ecuación de London es

$$\nabla \times \mathbf{J}_s = -\frac{n_s e^2}{mc}\mathbf{B}. \tag{1.17}$$

De esta ecuación se sigue el efecto Meissner. Consideremos la ecuación de Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}_s, \tag{1.18}$$

donde hemos despreciado las corrientes de desplazamiento y la corriente del fluido isual. Tomando el rotacional de esta expresión y usando

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} = -\nabla^2 \mathbf{B}, \tag{1.19}$$

junto con la ecuación (1.17) llegamos a

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \frac{4\pi n_s e^2}{mc^2}\mathbf{B} = \frac{1}{\lambda_L^2}\mathbf{B}, \tag{1.20}$$

donde hemos definido la profundidad de penetración como

$$\lambda(T) = \left(\frac{mc^2}{4\pi n_s e^2}\right)^{1/2}. \tag{1.21}$$

Aplicando la ecuación (1.20) a una frontera plana situada en $x = 0$ obtenemos

$$B(x) = B(0)e^{-x/\lambda_L} \tag{1.22}$$

mostrando que el campo magnético se anula en el interior del material. Nótese que para $T \longrightarrow T_c$ es de esperar que $n_s \longrightarrow 0$ y por tanto que $\lambda_L(T)$ debería hacerse infinita en este límite. Por otro lado, pata $T \longrightarrow 0$, $n_s \longrightarrow n$, obteniendo

$$\lambda_L(0) = \left(\frac{mc^2}{4\pi n e^2}\right)^{1/2}. \tag{1.23}$$

En la teoría de dos fluidos propuesta por Gorter y Casimir teníamos

$$\frac{n_s}{n} = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^4 \tag{1.24}$$

y

$$\lambda_L(T) = \frac{\lambda_L(0)}{\left[1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^4\right]^{1/2}}. \tag{1.25}$$

Esto concuerda bastante bien con los experimentos. Nótese que a T_c el campo magnético penetra completamente en el material puesto que λ_L diverge. No obstante, tan pronto como la temperatura es menor que T_c la profundidad de penetración se aproxima mucho a su valor a $T = 0$ estableciendose el efecto Meissner en el cuerpo del superconductor.

Las ecuaciones de London se pueden justificar de la manera siguiente: asumamos que la función de onda describiendo el superfluido no cambia, a primer orden, debido a la presencia de una campo electromagnético. El momento canónico de la partícula es

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} + \frac{e}{c}\mathbf{A}. \tag{1.26}$$

En condiciones estacionarias es de esperar que el valor medio de dicho momento sea cero, o lo que es equivalente

$$\langle \mathbf{v}_s \rangle = -\frac{e}{mc}\mathbf{A}, \tag{1.27}$$

lo que implica que

$$\mathbf{J}_s = en_s\langle \mathbf{v}_s \rangle = -\frac{n_s e^2}{mc}\mathbf{A} \tag{1.28}$$

Tomando la derivada temporal y el rotacional de esta expresión obtenemos las dos ecuaciones de London.

Pippard propuso en 1953 que la relación local entre $\mathbf{J}_s$ y $\mathbf{A}$ en la relación anterior debería ser sustituida por una relación de tipo no local. De hecho, la función de onda del estado superconductor no esta localizada. Esto puede verse de la siguiente manera: solamente los electrones con T_c en la superficie de Fermi pueden jugar un papel en la transición. El momento correspondiente será del orden

$$\delta p \sim \frac{T_c}{v_F} \tag{1.29}$$

y

$$\delta x \geq \frac{1}{\delta p} \approx \frac{v_F}{T_c}, \tag{1.30}$$

lo que define una longitud característica (Longitud de coherencia de Pippard)

$$\xi_0 = a\frac{v_F}{T_c}, \tag{1.31}$$

con $a \approx 1$. Para conductores típicos $\xi_0 \gg \lambda_L(0)$.

1.3.3 La teoría de Ginzburg-Landau

En 1950 Ginzburg y Landau formularon su teoría de la superconductividad introduciendo una función de onda compleja como parámetro de orden. Esto se hizo en el contexto de la teoría de Landau para transiciones de fase de segundo orden y como tal este tratamiento es estrictamente válido sólo en torno al punto crítico de segundo orden. La función de onda se relaciona con la densidad de superfluido a través de

$$n_s = |\psi(\mathbf{r})|^2. \tag{1.32}$$

Además se postuló una diferencia de energía libre entre la fase normal y la fase superconductora de la forma

$$F_s(T) - F_n(T) = \int d^3\mathbf{r} \left(-\frac{1}{2m*}\psi^*(\mathbf{r})|\nabla + ie^*\mathbf{A}|^2\psi(\mathbf{r}) + \alpha(T)|\psi(\mathbf{r})|^2 + \frac{1}{2}\beta(T)|\psi(\mathbf{r})|^4 \right) \tag{1.33}$$

donde m^* y e^* son la masa efectiva y la carga que en la teoría microscopica se convierten en $2m$ y $2e$ respectivamente. Podemos buscar una función de onda constante que minimice la energía libre. Encontramos

$$\alpha(T)\psi + \beta(T)\psi|\psi|^2 = 0 \tag{1.34}$$

o sea,

$$|\psi|^2 = -\frac{\alpha(T)}{\beta(T)}. \tag{1.35}$$

Para la densidad de energía libre tenemos

$$f_s(T) - f_n(T) = -\frac{1}{2}\frac{\alpha^2(T)}{\beta(T)} = -\frac{H_c^2(T)}{8\pi}, \tag{1.36}$$

donde la ultima igualdad se sigue de (1.2). Teniendo en cuenta que en la teoría de London

$$n_s = |\psi|^2 \approx \frac{1}{\lambda_L^2(T)}, \tag{1.37}$$

encontramos que

$$\frac{\lambda_L^2(0)}{\lambda_L^2(T)} = \frac{1}{n}|\psi(T)|^2 = -\frac{1}{n}\frac{\alpha(T)}{\beta(T)}. \tag{1.38}$$

De las ecuaciones (1.36) y (1.38) tenemos

$$n\alpha(T) = -\frac{H_c^2(T)}{4\pi}\frac{\lambda_L^2(T)}{\lambda_L^2(0)} \tag{1.39}$$

y

$$n^2\beta(T) = \frac{H_c^2(T)}{4\pi}\frac{\lambda_L^4(T)}{\lambda_L^2(0)}. \tag{1.40}$$

La ecuación de movimiento para campo electromagnético cero es

$$-\frac{1}{2m^*}\nabla^2\psi + \alpha(T)\psi + \beta(T)\psi|\psi|^2 = 0. \tag{1.41}$$

Es posible obtener soluciones próximas a la solución constante eligiendo $\psi = \psi_e + f$, donde

$$|\psi_e|^2 = -\frac{\alpha(T)}{\beta(T)}. \tag{1.42}$$

Al orden más bajo en f se tiene

$$\frac{1}{4m^*|\alpha(T)|}\nabla^2 f - f = 0, \tag{1.43}$$

lo que indica un decrecimiento exponencial

$$f \sim e^{-\sqrt{2}r/\xi(T)}, \tag{1.44}$$

donde hemos introducido la longitud de coherencia de Ginzburg-Landau

$$\xi(T) = \frac{1}{\sqrt{2m^*|\alpha(T)|}}. \tag{1.45}$$

Teniendo en cuenta que ($t = T/T_c$)

$$H_c(T) \approx (1 - t^2), \tag{1.46}$$

$$\lambda_L(T) \approx \frac{1}{(1 - t^4)^{1/2}}, \tag{1.47}$$

vemos que también esta longitid de coherencia tiende a infinito al aproximarnos a la temperatura crítica

$$\xi(T) \approx \frac{1}{H_c(T)\lambda_L(T} \approx \frac{1}{(1 - t^2)^{1/2}}. \tag{1.48}$$

1.4 Pares de Cooper

Uno de los pilares de la teoría microscópica, que abordaremos más en detalle en el siguiente capítulo, es que los electrones próximos a la superficie de Fermi se ligan en pares por una atracción arbitrariamente débil. El punto clave es que el problema tiene una enorme degeneración en la superficie de Fermi puesto que no hay coste en la energía libre por añadir o sustraer un electrón (tanto aquí como en lo que sigue abusaré del lenguaje al hablar de los potenciales termodinámicos; en este caso la cantidad relevante es el gran potencial)

$$\Omega = E - \longrightarrow (E \pm E_F) - (N \pm 1) = \Omega \tag{1.49}$$

Esta observación sugiere que un fenómeno de condensación puede tener lugar si 2 de fermiones se ligan. De hecho, supongamos que la energía de ligadura es E_B, luego añadiendo un par ligado a la superficie de Fermi tenemos

$$\Omega \longrightarrow (E + 2E_F - E_B) - \mu(N + 2) = -E_B. \tag{1.50}$$

Por tanto conseguimos mayor estabilidad añadiendo más estados a la superficie de Fermi. Cooper demostró que dos fermiones pueden dar lugar a un estado ligado con una interacción arbitraria considerando el siguiente modelo sencillo. Supongamos que añadimos dos fermiones a la superficie de Fermi a $T = 0$ y supongamos que estos interactuan a través de un potencial atractivo. Las interacciones entre este par de fermiones y el mar de Fermi se desprecian en primera aproximación, salvo en lo que se sigua de la estadística de Fermi. El siguiente paso es buscar una funció de onda de dos partículas adecuada. Asumiendo que el par tiene momento cero podemos escribir

$$\psi_0(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}. \tag{1.51}$$

Tanto aquí como en lo que sigue pasará a menudo de los momentos discretizados a los contínuos y viceversa. Recuérdese que la regla para ir de una notación a otra es simplemente

$$\sum_{\mathbf{k}} \longrightarrow \frac{L^3}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k}, \tag{1.52}$$

donde L es el volumen de cuantización, que a menudo también omitiremos, lo que significa que estaré considerando densidades. Esperámos que esto esté claro por el contexto. También podemos introducir la función de onda de spin y antisimetrizar adecuadamente. Tenemos

$$\psi_0(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}} \cos(\mathbf{k}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)), \tag{1.53}$$

donde α_i y β_i son las funciones de spin. Es de esperar que esta función de onda adopte el estado triplete, puesto que la estructura "cos" da una mayor probabilidad de que los fermiones esten juntos. Introduciendo esta función de onda en la ecuación de Schrodinguer tenemos

$$\Big[-\frac{1}{2m}(\nabla_1^2 + \nabla_2^2) + V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\Big]\psi_0(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = E\psi_0(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2), \tag{1.54}$$

obtenemos

$$(E - 2\epsilon_{\mathbf{k}})g_{\mathbf{k}} = \sum_{k'>k_F} V_{\mathbf{k},\mathbf{k'}} g_{\mathbf{k'}}, \tag{1.55}$$

donde $\epsilon_{\mathbf{k}} = |\mathbf{k}|^2/2m$ y

$$V_{\mathbf{k},\mathbf{k'}} = \frac{1}{L^3}\int V(\mathbf{r})e^{i(\mathbf{k'}-\mathbf{k})\mathbf{r}} d^3\mathbf{r}. \tag{1.56}$$

Para encontrar soluciones tales que $E < 2\epsilon_{\mathbf{k}}$, Cooper asumió el siguiente potencial

$$V_{\mathbf{k},\mathbf{k'}} = -G \qquad k_F \leq |\mathbf{k}| \leq k_c \tag{1.57}$$

con $G > 0$ y $\epsilon_{\mathbf{k}_F} = E_F$,y cero en caso contrario. El cutoff k_c se ha introducido de forma que

$$\epsilon_{k_c} = E_F + \delta \tag{1.58}$$

con $\delta \ll E_F$, lo que significa que nos estamos restringiendo a la física correspondiente a los grados de libertad próximos a la superficie de Fermi. La ecuación de Schrodinguer se reduce a

$$(E - 2\epsilon_{\mathbf{k}})g_{\mathbf{k}} = -G\sum_{k'>k_F} g_{\mathbf{k'}} \tag{1.59}$$

Sumando ahora sobre $\mathbf{k}$ tenemos

$$\frac{1}{G} = \sum_{k'>k_F} \frac{1}{2\epsilon_{\mathbf{k}} - E}. \tag{1.60}$$

Reemplazando ahora la suma por una integral obtenemos

$$\frac{1}{G} = \int_{k_F}^{k_c} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\epsilon_{\mathbf{k}} - E} = \int_{E_F}^{E_F+\delta} \frac{d\Omega}{(2\pi)^3}\frac{dk}{d\epsilon_{\mathbf{k}}}\frac{d\epsilon}{2\epsilon_{\mathbf{k}} - E}. \tag{1.61}$$

Introduciendo la densidad de estados en la superficie de estados para dos electrones con spin arriba y abajo

$$\rho = 2\int \frac{d\Omega}{(2\pi)^3} k^2 \frac{dk}{d\epsilon_{\mathbf{k}}}, \tag{1.62}$$

obtenemos

$$\frac{1}{G} = \frac{1}{4}\rho \log\frac{2E_F - E + 2\delta}{2E_F - E}. \tag{1.63}$$

En las proximidades del nivel de Fermi podemos asumir que $k \approx k_F$ y

$$\epsilon_{\mathbf{k}} = \mu + (\epsilon_{\mathbf{k}} - \mu) \approx \mu + \frac{\partial \epsilon_{\mathbf{k}}}{\partial \mathbf{k}}\Big|_{k=k_F} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}_F) = \mu + \mathbf{v}_F(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{l} \tag{1.64}$$

donde $\mathbf{l} = \mathbf{k} - \mathbf{k}_F$, es el momento residual. Por tanto

$$\rho = \frac{k_F^2}{\pi^2 v_F}. \tag{1.65}$$

Resolviendo la ecuación (1.63) obtenemos

$$E = 2E_F - 2\delta \frac{e^{-4/\rho G}}{1 - e^{-4/\rho G}}. \tag{1.66}$$

Para la mayoría de los superconductores

$$\rho G < 0.3. \tag{1.67}$$

En este caso (aproximación de acoplo débil, $\rho G \ll 1$) obtenemos

$$E \approx 2E_F - 2\delta e^{-4/\rho G}. \tag{1.68}$$

Vemos que se ha formado un estado ligado con una energía de ligadura

$$E_B = 2\delta e^{-4/\rho G}. \tag{1.69}$$

El resultado no es analítico en G y por tanto no puede obtenerse por una expansión perturbativa en G. Nótese también que el estado ligado existe con independencia del valor de G. Definiendo

$$N = \sum_{k>k_F} g_{\mathbf{k}}, \tag{1.70}$$

tenemos la función de onda

$$\psi_0(\mathbf{r}) = N \sum_{k>k_F} \frac{\cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}{2\xi_{\mathbf{k}} + E_B}. \tag{1.71}$$

Vemos que la función de onda en el espacio de momentos tiene un mínimo para $\xi_{\mathbf{k}} = 0$, es decir, para el par en el nivel de Fermi, y decae con $\xi_{\mathbf{k}}$. Por tanto, los electrones involucrados en la formación de pares son aquellos con un rango E_B por encima de E_F. Puesto que $\rho G \ll 1$ tenemos que $E_B \ll \delta$, de lo que se sigue que el comportamiento de $V_{\mathbf{k},\mathbf{k'}}$ lejos de la superficie de Fermi es irrelevante. Sólamente los grados de libertad próximos al nivel de Fermi son importantes.

1.4.1 El tamaño del par de Cooper

Es interesante evaluar el tamaño de un par de Cooper en terminos del radio cuadrático medio

$$\overline{R}^2 = \frac{\int |\psi_0(\mathbf{r})|^2 |\mathbf{r}|^2 d^3\mathbf{r}}{\int |psi_0(\mathbf{r})|^2 d^3\mathbf{r}}. \tag{1.72}$$

Usando la expresión (1.51) para ψ_0 se tiene

$$|\psi_0(\mathbf{r})|^2 = \sum_{k,k'} g_{\mathbf{k}} g^*_{\mathbf{k'}} e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k'})\cdot\mathbf{r}} \tag{1.73}$$

y

$$\int |\psi_0(\mathbf{r})|^2 d^3\mathbf{r} = L^3 \sum_{\mathbf{k}} |g_{\mathbf{k}}|^2. \tag{1.74}$$

Además

$$\int |\psi_0(\mathbf{r})|^2 |\mathbf{r}|^2 d^3\mathbf{r} = \int \sum_{k,k'} [-i\nabla_{\mathbf{k'}} g^*_{\mathbf{k'}}][i\nabla_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}}] e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k'})\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{r} = L^3 \sum_{\mathbf{k}} |\nabla_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}}|^2. \tag{1.75}$$

Con todo esto

$$\overline{R}^2 = \frac{\sum_{\mathbf{k}} |\nabla_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}}|^2}{\sum_{\mathbf{k}} |g_{\mathbf{k}}|^2}. \tag{1.76}$$

Teniendo en cuenta que

$$g_{\mathbf{k}} \approx \frac{1}{2\epsilon_{\mathbf{k}} + E_B}, \tag{1.77}$$

obtenemos

$$\sum_{\mathbf{k}} |\nabla_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}}|^2 \approx \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{(2\epsilon_{\mathbf{k}} + E_B)^4} \left| 2\frac{\partial \epsilon_{\mathbf{k}}}{\partial \mathbf{k}} \right|^2 = 4v_F^2 \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{(2\epsilon_{\mathbf{k}} + E_B)^4}. \tag{1.78}$$

Pasando a variables contínuas y dándose cuenta de que la densidad de estados se cancela en el cociente, se obtiene finalmente

$$\overline{R}^2 = 4v_F^2 \frac{\int_0^\infty \frac{d\xi}{(2\epsilon_{\mathbf{k}} + E_B)^4}}{\int_0^\infty \frac{d\epsilon}{(2\epsilon_{\mathbf{k}} + E_B)^2}} = \frac{4}{3} \frac{v_F^2}{E_B^2}, \tag{1.79}$$

donde, debido a la convergencia hemos extendido las integrales a infinito. Asumiendo que E_B es del orden de la temperatura crítica T_c, con $T_c \approx 10K$ y $v_F \approx 10^8$ cm/s se tiene

$$\overline{R} \approx 10^4 cm = 10^4 \mathring{A}. \tag{1.80}$$

El orden de magnitud de $\overline{R}$ es el mismo que el de la longitud de coherencia ξ_0. Puesto que el electrón ocupa un tamaño típico de $(2\ \mathring{A})^3$, esto significa que en un volumen coherente hay 10^{11} electrones. Por tanto no es razonable construir una función de onda del par, sino que necesitamos una función de onda que tenga en cuenta todos los electrones. Esto es lo que haremos en la teoría BCS.

1.5 Origen de la interacción atractiva

Hemos supuesto una interacción atractiva entre electrones, lo cual no es nada fácil. De hecho la interacción Coulombiana es repulsiva, aunque se ve apantallada en el medio con una longitud de apantallamiento del orden de $1/k_s \approx 1\mathring{A}$. El potencial de Coulomb apantallado viene dado por

$$V(\mathbf{q}) = \frac{4\pi e^2}{q^2 + k_s^2}. \tag{1.81}$$

Para conseguir una interacción efectiva es necesario considerar el efecto del movimiento de los iones. La idea es que un electrón atrae iones positivos y polariza el medio. Estos atraen a un segundo electrón dando lugar a una interacción neta entre los dos electrones. Para cuantificar esta idea es necesario tener en cuenta la interacción entre los electrones y la red o, en otros términos, la interacción entre los fonones y los electrones. Esta idea, como ya comentamos, fue confirmada por el descubrimiento del efecto isotópico, es decir, la dependencia de la temperatura T_c o del gap con la masa isotópica. Pines realizó diversos cálculos utilizando el modelo de "jellium". El potencial en este modelo es

$$V(\mathbf{q},\omega) = \frac{4\pi e^2}{q^2 + k_s^2}\left(1 + \frac{\omega_{\mathbf{q}}^2}{\omega^2 - \omega_{\mathbf{q}}^2},\right) \tag{1.82}$$

donde $\omega_{\mathbf{q}}$ es la energía del fonón, que para una cadena lineal viene dada por

$$\omega_{\mathbf{q}} = 2\sqrt{\frac{k}{M}\sin{(qa/2)}}, \tag{1.83}$$

donde a es la constante de la red, k es la constante elástica de la fuerza entre los iones y M su masa. Para $\omega < \omega_{\mathbf{q}}$ la interacción con el fonón es atractiva y puede llegar a superar la fuerza coulombiana. Además, puesto que el cutoff a ser usado en la determinación de la energía de ligadura o del gap, es esencialmente la frecuencia de Debye que es proporcional a $\omega_{\mathbf{q}}$ uno obtiene de manera natural el efecto isotópico.

Chapter 2

Teoría efectiva en la superficie de Fermi

2.1 Introducción

Resulta que la teoría BCS se puede derivar a partir de la teoría de Landau de líquidos de Fermi, donde un conductor es tratado como un gas de electrones casi libres, . Esto se debe a que uno puede utilizar la idea de quasipartículas. Una justificación de este hecho ha sido dada por Benfatto y Gallavotti (1990), Polchinski (1993) y Shankar (1994). En lo que sigue utilizaré el tratamiento dado por Polchinski (1993). Para definir una teoría de campos efectiva debemos empezar identificando la escala a la cual, para conductividad ordinaria es del orden de decenas de eV. Por ejemplo,

$$E_0 = m\alpha^2 \approx 27 \ \ eV \tag{2.1}$$

es la energía típica en los sólidos. Otra posible escala son las masas de los iones M. La velocidad de la luz puede considerarse a efectos prácticos infinita. En un conductor es posible excitar una corriente con un campo arbitrariamente pequeño , lo que significa que el espectro de excitaciones cargadas va a energía cero. Si estamos interesados en el estudio de estas excitaciones debemos intentar construir nuestra teoría efectiva a energías mucho menores que E_0 (el gap superconductor resulta ser del orden de 10^{-3} eV). Nuestro primer problema a tratar es identificar las quasipartículas. La opción más natural es que sean partículas de spin un medio al igual que los electrones en el metal. Si medimos la energía con respecto a la superficie de Fermi la acción libre más general la podremos escribir como

$$S_{libre} = \int dtd^3\mathbf{p}[i\psi^\dagger_\sigma(\mathbf{p})i\partial_t\psi_\sigma(\mathbf{p}) - (\epsilon(\mathbf{p}) - \epsilon_F)\psi^\dagger_\sigma(\mathbf{p})\psi_\sigma(\mathbf{p})] \tag{2.2}$$

donde σ es un índice de spin y ϵ_F es la energía libre de Fermi. El estado fundamental de la teoría viene dado por el mar de Fermi con todos los estados $\epsilon(\mathbf{p}) < \epsilon_F$ llenos y todos los estados $\epsilon(\mathbf{p}) > \epsilon_F$ vacíos. La superficie de Fermi viene definida por $\epsilon(\mathbf{p}) = \epsilon_F$.

La acción libre define las propiedades de escala de los campos. En particular estamos interesados en la física en las proximidades de la superficie de Fermi y por tanto en las propiedades de escala para $\epsilon \longrightarrow \epsilon_F$. Midiendo la energía con respecto al nivel de Fermi introducimos un factor de escala $s < 1$. Luego, cuando la energía se escala a cero, los momentos se deben escalar hacia la superficie de Fermi. Es conveniente descomponer los momentos como sigue

$$\mathbf{p} = \mathbf{k} + 1. \tag{2.3}$$

Por tanto obtenemos

$$E \longrightarrow sE \tag{2.4}$$

$$\mathbf{k} \longrightarrow \mathbf{k} \tag{2.5}$$

$$\mathbf{l} \longrightarrow s\mathbf{l}. \tag{2.6}$$

Podemos expandir el segundo término de la ecuación (2.2) obteniendo

$$\epsilon(\mathbf{p}) - \epsilon_F = \frac{\partial \epsilon(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}}\Big|_{p=k} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{k}) = l v_F(\mathbf{k}), \tag{2.7}$$

donde

$$\mathbf{v}_F(\mathbf{k}) = \frac{\partial \epsilon(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}}\Big|_{p=k}. \tag{2.8}$$

Nótese que $\mathbf{v}_F(\mathbf{k})$ es un vector ortogonal a la superficie de Fermi. Tenemos

$$S_{libre} = \int dt d^3\mathbf{p}[\psi^\dagger_\sigma(\mathbf{p})(i\partial_t - l v_F(\mathbf{k}))\psi_\sigma(\mathbf{p})]. \tag{2.9}$$

Las diversas leyes de escala son

$$dt \longrightarrow s^{-1} dt \tag{2.10}$$

$$d^3\mathbf{p} = d^2\mathbf{k} dl \longrightarrow s d^2\mathbf{k} dl \tag{2.11}$$

$$\partial_t \longrightarrow s\partial t \tag{2.12}$$

$$l \longrightarrow sl. \tag{2.13}$$

Por tanto para dejar la acción invariante debemos transformar los campos como

$$\psi_\sigma(\mathbf{p}) \longrightarrow s^{-1/2}\psi_\sigma(\mathbf{p}). \tag{2.14}$$

Nuestro análisis se basa en considerar todas las posibles interacciones compatibles con las simetrías de la teoría y buscando aquellas relevantes. Las simetrías de la teoría son el número de electrones y el spin SU(2), puesto que estamos considerando el límite no relativista. Los posibles términos son

1. Términos cuadráticos

$$\int dt d^3\mathbf{k} dl \mu(\mathbf{k})\psi^\dagger_\sigma(\mathbf{p})\psi_\sigma(\mathbf{p}). \tag{2.15}$$

   Este es un término relevante a escalas s^{-1} pero puede incorporarse dentro de la definición de la superficie de Fermi.

2. Términos cuárticos

$$\int \prod_{i=1}^{4}(d\mathbf{k}_i dl_i)(\psi^\dagger_\sigma(\mathbf{p}_1)\psi_\sigma(\mathbf{p}_3))(\psi^\dagger_\sigma(\mathbf{p}_2)\psi_\sigma(\mathbf{p}_4))V(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4)\delta^3(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_4). \tag{2.16}$$

   Para una situación genérica la funcion δ no escala. No obstante consideremos un proceso de scattering $1 + 2 \longrightarrow 3 + 4$ y descompongamos los momentos como sigue

$$\mathbf{p}_3 = \mathbf{p}_1 + \delta\mathbf{k}_3 + \delta\mathbf{l}_3 \tag{2.17}$$

$$\mathbf{p}_4 = \mathbf{p}_2 + \delta\mathbf{k}_4 + \delta\mathbf{l}_4, \tag{2.18}$$

lo que da lugar a

$$\delta^3(\delta\mathbf{k}_3 + \delta\mathbf{k}_4 + \delta\mathbf{l}_3 + \delta\mathbf{l}_4). \tag{2.19}$$

Cuando $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2$, y $\mathbf{p}_3 = -\mathbf{p}_4$, vemos que la función δ se factoriza

$$\delta^2(\delta\mathbf{k}_3 + \delta\mathbf{k}_4)(\delta\mathbf{l}_3 + \delta\mathbf{l}_4) \tag{2.20}$$

escalando como s^{-1}. Por tanto, en esta situación cinemática el término cuártico es marginal (no escala). Esto significa que sus propiedades de escala deberían mirarse al nivel de las correciones cuánticas.

3. Términos de orden superior:

   Términos con $2n$ fermiones ($n > 2$) escalan como s^{n-1} veces la escala de la función δ y por tanto son irrelevantes.

Vemos que el único término potencialmente peligroso es la interacción cuártica con la configuración cinemática particular correspondiente al par de Cooper. Discutiremos las correcciones a un loop un poco más tarde. Antes de hacer eso estudiemos el caso libre.

2.2 Gas de electrones libres

Consideremos la teoría de fermiones libres que hemos discutido antes. Los fermiones son descritos por la ecuación de movimiento

$$(i\partial_t - lv_F)\psi_\sigma(\mathbf{p}, t) = 0. \tag{2.21}$$

La función de Green o propagador de la teoría viene descrita por

$$(i\partial_t - lv_F)G_{\sigma\sigma'}(\mathbf{p}, t) = \delta_{\sigma\sigma'}\delta(t). \tag{2.22}$$

Es fácil verificar que la solución viene dada por

$$G_{\sigma\sigma'}(\mathbf{p,t}) = \delta_{\sigma\sigma'}G(\mathbf{p}, t) = -i\delta_{\sigma\sigma'}[\theta(t)\theta(l) - \theta(-t)\theta(-l)]e^{-ilv_Ft}. \tag{2.23}$$

Usando la representación integral de la función escalón

$$G(\mathbf{p}, t) = \frac{i}{2\pi}\int d\omega \frac{e^{-i\omega t}}{\omega + i\epsilon}, \tag{2.24}$$

llegamos a

$$G(\mathbf{p}, t) = \frac{1}{2\pi}\int d\omega \frac{e^{-ilv_Ft}}{\omega + i\epsilon}[e^{-i\omega t}\theta(l) - e^{i\omega t}\theta(-l)]. \tag{2.25}$$

Haciendo ahora el cambio de variable $\omega \longrightarrow \omega' \pm lv_F$ en las dos integrales y pasando $\omega' \longrightarrow -\omega'$ en la segunda integral tenemos

$$G(\mathbf{p}, t) = \frac{1}{2\pi}\int dp_0 G(p_0, \mathbf{p})e^{-ip_0t}. \tag{2.26}$$

donde

$$G(p) = \frac{1}{(1 + i\epsilon)p_0 - lv_F}. \tag{2.27}$$

Nótese que esta definición de $G(p)$ se corresponde con el propagador estandar de Feynmann puesto que propaga hacia adelante en el tiempo soluciones de energía positiva $l > 0$ $(p > p_F)$ y hacia atrás soluciones con energía negativa $l < 0 (p < p_F)$ correspondientes a huecos en la esfera de Fermi. Para hacer contacto con la formulación usual en teoría cuántica de campos introducimos los campos de Fermi

$$\psi_\sigma(x) = \sum_p b_\sigma(\mathbf{p}, t) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} = \sum_p b_\sigma(\mathbf{p}) e^{-ip\cdot x}, \tag{2.28}$$

donde $x^\mu = (t, \mathbf{x})$, $p^\mu = (lv_F, \mathbf{p})$ y

$$p \cdot x = lv_F t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}. \tag{2.29}$$

Nótese que con este formalismo los fermiones no tienen antipartículas, sin embargo el estado fundamental viene descrito por las siguientes relaciones

$$b_\sigma(\mathbf{p})|0\rangle = 0 \qquad |\mathbf{p}| > p_F \tag{2.30}$$

$$b^\dagger_\sigma(\mathbf{p})|0\rangle = 0 \qquad |\mathbf{p}| < p_F. \tag{2.31}$$

Podemos, como es usual en teoría de campos relativista, introducir una redefinición para los operadores de creación para partículas con $p < p_F$ como operadores de aniquilación para huecos, pero no haremos esto aquí. Además estamos cuantizando en una caja, pero tenemos libertad de normalizar libremente dependiendo de las circunstancias. Los operadores de Fermi satisfacen las relaciones usuales de anticonmutación

$$[b_\sigma(\mathbf{p}), b^\dagger_{\sigma'}(\mathbf{p}')]_+ = \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}\delta_{\sigma\sigma'} \tag{2.32}$$

de lo que se sigue

$$[\psi_\sigma(\mathbf{x}, t), \psi^\dagger_{\sigma'}(\mathbf{y}, t)]_+ = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})\delta_{\sigma\sigma'} \tag{2.33}$$

Podemos ver ahora que el propagador se define en el espacio de configuraciones en términos del producto T usual para los campos de Fermi

$$G_{\sigma\sigma'}(x) = -i\langle 0|T(\psi_\sigma(x)\psi_{\sigma'}(0))|0\rangle. \tag{2.34}$$

De hecho tenemos

$$G_{\sigma\sigma'}(x) = -i\delta_{\sigma\sigma'} \sum_p \langle 0|T(b_\sigma(\mathbf{p}, t) b^\dagger_\sigma(\mathbf{p}, 0))|0\rangle e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \equiv \delta_{\sigma\sigma'} \sum_p G(\mathbf{p}, t), \tag{2.35}$$

donde hemos usado

$$\langle 0|T(b_\sigma(\mathbf{p}, t) b^\dagger_\sigma(\mathbf{p'}, 0))|0\rangle = \delta_{\sigma\sigma'}\delta\mathbf{pp'}\langle 0|T(b_\sigma(\mathbf{p}, t) b^\dagger_\sigma(\mathbf{p}, 0))|0\rangle \tag{2.36}$$

Puesto que

$$\langle 0|b^\dagger_\sigma(\mathbf{p}) b_\sigma(\mathbf{p})|0\rangle = \theta(p_F - p) = \theta(-l) \tag{2.37}$$

$$\langle 0|b_\sigma(\mathbf{p}) b^\dagger_\sigma(\mathbf{p})|0\rangle = 1 - \theta(p_F - p) = \theta(l) \tag{2.38}$$

llegamos a

$$G(\mathbf{p}, t) = \mp i\theta(\pm l) e^{-ilv_F t} \tag{2.39}$$

para $t > 0$ y $t < 0$ respectivamente. Podemos también escribir

$$G(x) = \int \frac{d^4\mathbf{p}}{(2\pi)^4} e^{-ip\cdot x} G(p) \tag{2.40}$$

con $G(p)$ definida como en la ecuación (2.27). Es interesante darse cuenta de que la densidad fermiónica puede obtenerse a partir del propagador. De hecho, en el límite $\delta \longrightarrow 0$ para $\delta > 0$ tenemos

$$G_{\sigma\sigma'}(\mathbf{0}, -\delta) = -i\langle 0|T(\psi_\sigma(\mathbf{0}, -\delta)\psi^\dagger_{\sigma'}(0))|0\rangle \Longrightarrow i\langle 0|\psi^\dagger_\sigma{}'\psi_\sigma|0\rangle \equiv i\rho_F. \tag{2.41}$$

Tenemos por tanto

$$\rho_F = -i \lim_{\delta\longrightarrow 0^+} G(\mathbf{0}, -\delta) = -2i \int \frac{d^4\mathbf{p}}{(2\pi)^4} e^{-ip_0\cdot\delta} \frac{1}{(1+i\epsilon)p_0 - lv_F}. \tag{2.42}$$

La exponencial es convergente en el plano superior de p_0, donde tomamos el polo para $l < 0$ en

$$p_0 = lv_F + i\epsilon. \tag{2.43}$$

Por tanto,

$$\rho_F = 2\int \frac{d^4\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\theta(-l) = 2\int \frac{d^4\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\theta(p_F - |\mathbf{p}|) = \frac{p_F^3}{3\pi^2}. \tag{2.44}$$

2.3 Correcciones a un loop

Evaluamos ahora las correcciones al scattering de 4 fermiones. Tenemos

$$G(E) = G - G^2 \int \frac{dE' d^2\mathbf{k} dl}{(2\pi)^4} \frac{1}{((E+E')(1+i\epsilon) - v_F(\mathbf{k})l)((E-E')(1+i\epsilon) - v_F(\mathbf{k})l)}, \tag{2.45}$$

El integrando de esta ecuación lo podemos reescribir como

$$\frac{1}{2(E - lv_F)}\Big[\frac{1}{E' + E - (1-i\epsilon)lv_F} - \frac{1}{E' - E + (1-i\epsilon)lv_F}\Big] \tag{2.46}$$

Cerrando el camino de integración por el semiplano superior encontramos que

$$iG(E) = iG - G^2 \int \frac{d^2\mathbf{k} dl}{(2\pi)^4} \frac{1}{2(E - lv_F)}[(-2\pi i)\theta(l) + (2\pi i)\theta(-l)]. \tag{2.47}$$

Cambiando $l \longrightarrow -l$ en la segunda de las integrales

$$iG(E) = iG + G^2 \int \frac{d^2\mathbf{k} dl}{(2\pi)^4} \frac{lv_F}{E^2 - (lv_F)^2}\theta(l). \tag{2.48}$$

Tomando una energía de corte E_0 en la integración sobre l tenemos

$$G(E) = G - \frac{1}{2}G^2\rho\log(\delta/E), \tag{2.49}$$

donde δ es un cutoff sobre $v_F l$ y

$$\rho = 2\int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{1}{v_F(\mathbf{k})} \tag{2.50}$$

es la densidad de estados en la superficie de Fermi para los dos fermiones apareados. Para un superficie esférica

$$\rho = \frac{p_F^2}{\pi^2 v_F} \tag{2.51}$$

donde el momento de Fermi viene definido por $\epsilon(p_F) = \mu$. A partir del grupo de normalización o simplemente al mismo orden de aproximación llegamos facilmente a

$$G(E) \approx \frac{G}{1 + \frac{\rho G}{2}\log(\delta/E)} \tag{2.52}$$

mostrando que para $E \longrightarrow 0$ tenemos

- $G > 0$ (interacción repulsiva), G(E) se hace más débil (interacción irrelevante)
- $G < 0$ (interacción atractiva), G(E) se hace más fuerte (interacción relevante)

Por tanto, una interacción atractiva es inestable y uno esperaría un reordenamiento del vacío. Esto lleva a la formación de pares de Cooper. En metales el origen físico de la interacción es la interacción con los fonones. Si a alguna escala intermedia

$$E_1 \approx \left(\frac{m}{M}\right)^{1/2} \delta \tag{2.53}$$

con m la masa del electrón y M la masa del núcleo, la interacción con los fonones es más fuerte que la interacción de Coulomb, y tendremos por tanto superconductividad, en caso contrario tendremos un metal normal. En un superconductor tenemos un valor de expectación distinto de cero para el condensado difermiónico

$$\langle \psi_\sigma(\mathbf{p})\psi_{-\sigma}(-\mathbf{p})\rangle \tag{2.54}$$

2.4 Análisis del grupo de renormalización

Este análisis indica la posible existencia de inestabilidades a la escala donde los acoplos se hacen fuertes. Debemos buscar el acoplo con mayor coeficiente C

$$\frac{dG(E)}{d\log E} = CG^2 \longrightarrow G(E) = \frac{G}{1 - CG\log(E/E_0)} \tag{2.55}$$

La escala de inestabilidad viene fijada por el correspondiente polo de Landau.

Chapter 3

La teoría BCS

3.1 Introducción

En este capítulo estudiaré en detalle la ecuación del gap derivándola a partir de la aproximaci'on BCS.

3.2 Un modelo de juguete

La física de fermiones a densidad finita se puede tratar de forma sistemática usando la idea de Landau de quasipartículas. Un ejemplo es la teoría de Landau de líquidos de Fermi. Un condutor es tratado como un gas de electrones casi libres. No obstante, estos electrones estan influidos por las interaccíónes. Como hemos visto, según Polchinski, este procedimiento funciona debido a que las interacciones pueden ser integradas en el sentido usual de las teorías efectivas. Por supuesto, esto es una consecuencia de la especial naturaleza de la superficie de Fermi, que es tal que no existen practicamente interacciones no relevantes o marginales. De hecho, todas las interacciones son irrelevantes excepto para acoplos entre pares de momento opuesto. Esto explica la inestabilidad de la superficie de Fermi para electrones quasilibres contra cualquier interacción de este tipo, pero nos gustaría entender mejor la física que hay debajo de la formación de condensados y cómo surge la idea de quasipartículas. Para esto, haremos uso de un modelo de juguete que involucra dos osciladores de Fermi con spin arriba y abajo por ejemplo. Por supuesto, en un sistema dimensionalmente finito no hay ruptura espontanea de simetría, pero este modelo es útil para ilustrar muchos de los puntos que son comunes en el tratamiento general, evitando la mayoría de los aspectos técnicos. Asumamos que nuestro sistema dinámico viene descrito por el siguiente hamiltoniano conteniendo acoplos cuárticos entre los osciladores.

$$H = \epsilon(a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2) + G(a_1^\dagger a_2^\dagger a_1 a_2) = \epsilon(a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2) - G a_1^\dagger a_2^\dagger a_2 a_1. \tag{3.1}$$

Estudiaremos este modelo utilizando un principio variacional. Empezaremos introduciendo la siguiente función de onda prueba adecuadamente normalizada

$$|\Psi\rangle = \left(\cos\theta + \sin\theta a_1^\dagger a_2^\dagger\right)|0\rangle \tag{3.2}$$

El operador difermiónico $a_1 a_2$, tiene el siguiente valor de expectación

$$\Gamma = \langle\Psi|a_1 a_2|\Psi\rangle = -\sin\theta\cos\theta. \tag{3.3}$$

Escribamos el hamiltoniano H como la suma de

$$H = H_0 + H_{res}, \tag{3.4}$$

donde

$$H_0 = \epsilon(a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2) - G\Gamma(a_1 a_2 - a_1^\dagger a_2 \dagger) + \Gamma G^2 \tag{3.5}$$

$$H_{res} = G(a_1^\dagger a_2^\dagger + \Gamma)(a_1 a_2 - \Gamma). \tag{3.6}$$

Nuestra aproximación consistirá en despreciar H_{res}, lo que es equivalente a la aproximación de campo medio, donde el operador $a_1 a_2$ se aproxima por su valor medio Γ. Determinaremos el valor de θ buscando el mínimo del valor de expectación de H_0 en el estado prueba

$$\langle\Psi|H_0|\Psi\rangle = 2\epsilon\sin^2\theta - G\Gamma^2. \tag{3.7}$$

Haciendo esto tememos

$$\tan 2\theta = -\frac{G\Gamma}{\epsilon}. \tag{3.8}$$

Usando la expresión (3.3) para Γ obtenemos la ecuación de gap

$$\Gamma = -\frac{1}{2}\sin 2\theta = \frac{1}{2}\frac{G\Gamma}{\sqrt{\epsilon^2 + G^2\Gamma^2}}, \tag{3.9}$$

o

$$1 = \frac{1}{2}\frac{G}{\sqrt{\epsilon^2 + \Delta^2}}, \tag{3.10}$$

donde $\Delta = G\Gamma$. Por tanto, la ecuación del gap se puede entender como la ecuación que determina el estado fundamental del sistema, puesto que da el valor del condensado. Introduciremos ahora la idea de quasipartículas en este contexto partícular. La idea es buscar una transformación en los osciladores de Fermi H_0 tal que H_0 adquiera una forma canónica (transformación Bogoliubov) y definir un nuevo vacío aniquilado por los nuevos operadores de aniquilación. Escribimos la transformación en la forma

$$A_1 = a_1\cos\theta - a_2^\dagger\sin\theta \tag{3.11}$$

$$A_2 = a_1^\dagger\sin\theta + a_2\cos\theta. \tag{3.12}$$

Sustituyendo esto en H_0

$$H_0 = 2\epsilon\sin^2\theta + G\Gamma\sin 2\theta + G\Gamma^2 + (\epsilon\cos 2\theta - G\Gamma\sin 2\theta)(A_1^\dagger A_1 + A_2^\dagger A_2) + (\epsilon\sin 2\theta + G\Gamma\cos 2\theta)(A_1^\dagger A_2^\dagger - A_1 A_2) \tag{3.13}$$

Exigiendo la cancelación de los términos bilineales en los opeadores creación y destrucción llegamos a

$$\tan 2\theta = -\frac{G\Gamma}{\epsilon} = -\frac{\Delta}{\epsilon}. \tag{3.14}$$

Es fácil verificar que el nuevo estado aniquilido por A_1 y A_2 es

$$|0\rangle_N = (\cos\theta + a_1^\dagger a_2^\dagger\sin\theta)|0\rangle \tag{3.15}$$

$$A_1|0\rangle_N = A_2|0\rangle_N = 0. \tag{3.16}$$

El término constante en H_0 que es igual a $\langle\Psi|H_0|\Psi\rangle$ viene dado por

$$\langle\Psi|H_0|\Psi\rangle = 2\epsilon\sin^2\theta - G\Gamma^2 = \left(\epsilon - \frac{\epsilon^2}{\sqrt{\epsilon^2 + \Delta^2}}\right) - \frac{\Delta^2}{G} \tag{3.17}$$

El primer término de la expresión anterior viene de la energía cinética mientras que el segundo se debe a la interacción. Definimos el límite de acoplamiento débil tomando el límite $\Delta \ll \epsilon$, luego el primer término de la expresión viene dado por

$$\frac{1}{2}\frac{\Delta^2}{\epsilon} = \frac{\Delta^2}{G}, \tag{3.18}$$

donde hemos hecho uso de la ecuación del gap al orden más bajo en Δ. Vemos que en este límite el valor de expectación de H_0 se anula, lo que significa que el estado normal de vacío y el condensado tienen la misma energía. No obstante, veremos que en el caso realista, 3-dimensional, el estado condensado tiene una energía menor en una cantidad que es proporcional a la densidad de estados en la superficie de Fermi. En el caso que estamos tratando no hay condensación puesto que no hay degeneración en el estado fundamental, a diferencia de lo que ocurre en el caso realista. No obstante, este caso es interesante puesto que el algebra es más simple que en la discusión completa de la próxima sección.

En defiitiva tenemos,

$$H_0 = \left(\epsilon - \frac{\epsilon^2}{\sqrt{\epsilon^2+\Delta^2}}\right) - \frac{\Delta^2}{G} + \sqrt{\epsilon^2+\Delta^2}(A_1^\dagger A_1 + A_2^\dagger A_2). \tag{3.19}$$

La ecuación de gap se recupera evaluando Γ

$$\Gamma =_N \langle 0|a_1 a_2|0\rangle_N = -\frac{1}{2}\sin 2\theta \tag{3.20}$$

y sustituyendo en la ecuación (3.14) encontramos de nuevo

$$\Gamma = \frac{1}{2}\frac{G\Gamma}{\sqrt{\epsilon^2+G^2}}. \tag{3.21}$$

De la expresión de H_0 vemos que los operadores $A_i^\dagger$ crean quasipartículas a partir del vacío de energía

$$E = \sqrt{\epsilon^2+\Delta^2}. \tag{3.22}$$

La condensación da lugar al gap de energía, Δ. La transformación de Bogoliubov nos lleva de los operadores originales a_i y $a_i^\dagger$ a aquellos para quasipartículas A_i y $A_i^\dagger$. Por supuesto, la interacción todavía está presente, pero parte de ella ha sido incorporada en el proceso consiguiendo un mejor punto de partida para una expansión perturbativa.

3.3 Hamiltoniano BCS

Veámos ahora el caso general. Empecemos con el siguiente hamiltoniano conteniendo término de interacción 4-Fermi del tipo que da lugar a una contribución a un loop relevante.

$$\tilde{H} = H - \mu N = \sum_{k\rho} \xi_{\mathbf{k}} b_\sigma^\dagger(\mathbf{k}) b_\sigma^\dagger(\mathbf{k}) + \sum_{kq} V_{\mathbf{kq}} b_1^\dagger(\mathbf{k}) b_2^\dagger(-\mathbf{k}) b_2(-\mathbf{q}) b_1(\mathbf{q}), \tag{3.23}$$

donde

$$\xi_{\mathbf{k}} = \epsilon_{\mathbf{k}} - E_F = \epsilon_{\mathbf{k}} - \mu. \tag{3.24}$$

Los indices 1 y 2 se refieren a espín arriba y abajo respectivamente. Al igual que hicimos en la sección anterior escribimos

$$H = H_0 + H_{res}, \tag{3.25}$$

donde

$$H_0 = \sum_{k\rho} \xi_{\mathbf{k}} b_\sigma^\dagger(\mathbf{k}) b_\sigma^\dagger(\mathbf{k}) + \sum_{kq} V_{\mathbf{kq}} b_1^\dagger(\mathbf{k}) b_2^\dagger(-\mathbf{k})\Gamma_{\mathbf{q}} + b_2(-\mathbf{q})b_1(\mathbf{q})\Gamma_{\mathbf{k}}^* - \Gamma_{\mathbf{k}}^*\Gamma_{\mathbf{q}} \tag{3.26}$$

y

$$H_{res} = \sum_{kq} V_{\mathbf{kq}} \left(b_1^\dagger(\mathbf{k}) b_2^\dagger(-\mathbf{k}) - \Gamma_{\mathbf{k}}^*\right)\left(b_2(-\mathbf{q})b_1(\mathbf{q}) - \Gamma_{\mathbf{q}}\right) \tag{3.27}$$

donde

$$\Gamma_{\mathbf{k}} = \langle b_2(-\mathbf{k}) b_1(\mathbf{k})\rangle \tag{3.28}$$

es el valor de expectación del operador difermiónico $b_2(-\mathbf{k})b_1(\mathbf{k})$ en el estado fundamental, que determinaremos posteriormente. Despreciaremos al igual que hicimos antes H_{res}. Definimos

$$\Delta_{\mathbf{k}} = -\sum_{\mathbf{q}} V_{\mathbf{kq}}\Gamma_{\mathbf{q}}, \tag{3.29}$$

de donde

$$H_0 = \sum_{k\rho} \xi_{\mathbf{k}} b_\sigma^\dagger(\mathbf{k}) b_\sigma^\dagger(\mathbf{k}) - \sum_{kq}\left[\Delta_{\mathbf{k}} b_1^\dagger(\mathbf{k}) b_2^\dagger(-\mathbf{k}) + \Delta_{\mathbf{k}}^* b_2(-\mathbf{k}) b_1(\mathbf{k}) - \Delta_{\mathbf{k}}\Gamma_{\mathbf{k}}^*\right]. \tag{3.30}$$

Buscamos nuevos operadores $A_i(\mathbf{k})$

$$b_1(\mathbf{k}) = u_{\mathbf{k}}^* A_1(\mathbf{k}) + v_{\mathbf{k}} A_2^\dagger(\mathbf{k}) \tag{3.31}$$

$$b_2(-\mathbf{k})^\dagger = -v_{\mathbf{k}}^* A_1(\mathbf{k}) + u_{\mathbf{k}} A_2^\dagger(\mathbf{k}), \tag{3.32}$$

con

$$|u_{\mathbf{k}}|^2 + |v_{\mathbf{k}}|^2 = 1. \tag{3.33}$$

para obtener las relaciones de anticonmutación canónica entre los osciladores. Expresando H_0 en términos de los nuevos operadores tenemos

$$\begin{aligned} H_0 \;=\; & \sum_{k\rho} \xi_{\mathbf{k}}\big[(|u_k|^2| - v_{\mathbf{k}}|^2) A_\sigma^\dagger(\mathbf{k}) A_\sigma(\mathbf{k})\big] \\ & + 2\sum_k \xi_{\mathbf{k}}\big[|v_{\mathbf{k}}|^2 + u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} A_1^\dagger(\mathbf{k}) A_2^\dagger(\mathbf{k}) - u_{\mathbf{k}}^* v_{\mathbf{k}}^* A_1(\mathbf{k}) A_2(\mathbf{k})\big] \\ & + \sum_k \big[(\Delta_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}^* + \Delta_{\mathbf{k}}^* u_{\mathbf{k}}^* v_{\mathbf{k}})\left(A_1^\dagger(\mathbf{k}) A_1(\mathbf{k}) + A_2^\dagger(\mathbf{k}) A_2(\mathbf{k}) - 1\right) \\ & + (\Delta_k^* u_k^{*2} - \Delta_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}^{*2}) A_1(\mathbf{k}) A_2(\mathbf{k}) - (\Delta_{\mathbf{k}}^2 - \Delta_{\mathbf{k}}^* v_{\mathbf{k}}^2) A_1^\dagger(\mathbf{k}) A_2^\dagger(\mathbf{k}) + \Delta_{\mathbf{k}}\Gamma_{\mathbf{k}}^*\big]. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Para expresar H_0 en forma canónica debemos cancelar los términos $A_1^\dagger(\mathbf{k})A_2^\dagger(\mathbf{k})$ y $A_1(\mathbf{k})A_2(\mathbf{k})$, lo que podemos hacer escogiendo

$$2\xi_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} - (\Delta_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}^2 - \Delta_{\mathbf{k}}^* v_{\mathbf{k}}^2) = 0 \tag{3.35}$$

Multiplicando esta ecuación por $\Delta_{\mathbf{k}}^*/u_{\mathbf{k}}^2$ tenemos

$$\Delta_{\mathbf{k}}^{*\,2}\frac{v_{\mathbf{k}}^2}{u_{\mathbf{k}}^2} + 2\xi_{\mathbf{k}}\Delta_{\mathbf{k}}^*\frac{v_{\mathbf{k}}}{u_{\mathbf{k}}} - |\Delta_{\mathbf{k}}|^2 = 0 \tag{3.36}$$

o

$$\left(\Delta^*_{\mathbf{k}}\frac{v_{\mathbf{k}}}{u_{\mathbf{k}}}+\xi_{\mathbf{k}}\right)^2=\xi^2_{\mathbf{k}}+|\Delta_{\mathbf{k}}|^2 \tag{3.37}$$

Introduciendo

$$E_{\mathbf{k}}=\sqrt{\xi^2_{\mathbf{k}}+|\Delta_{\mathbf{k}}|^2}, \tag{3.38}$$

que, como veremos, es la energía de las quasipartículas, llegamos a

$$\Delta^*_{\mathbf{k}}\frac{v_{\mathbf{k}}}{u_{\mathbf{k}}}=E_{\mathbf{k}}-\xi_{\mathbf{k}}, \tag{3.39}$$

o

$$\left|\frac{v_{\mathbf{k}}}{u_{\mathbf{k}}}\right|=\frac{E_{\mathbf{k}}-\xi_{\mathbf{k}}}{|\Delta_{\mathbf{k}}|}, \tag{3.40}$$

ecuación que junto a $|v_{\mathbf{k}}|^2+|u_{\mathbf{k}}|^2=1$ nos da

$$|v_{\mathbf{k}}|^2=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\xi_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}}\right) \tag{3.41}$$

$$|u_{\mathbf{k}}|^2=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\xi_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}}\right). \tag{3.42}$$

Usando estas relaciones podemos evaluar facilmente los coeficientes de los otros términos en H_0. Del término bilineal en los operadores creación y destrucción tenemos

$$\xi_{\mathbf{k}}(|u_{\mathbf{k}}|^2-|v_{\mathbf{k}}|^2)+\Delta_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{k}}v^*_{\mathbf{k}}+\Delta^*_{\mathbf{k}}u^*_{\mathbf{k}}v_{\mathbf{k}}=\xi_{\mathbf{k}}(|u_{\mathbf{k}}|^2-|v_{\mathbf{k}}|^2)+2|u_{\mathbf{k}}|^2(E_{\mathbf{k}}-\xi)=E_{\mathbf{k}}, \tag{3.43}$$

mostrando que $E_{\mathbf{k}}$ es de hecho la energía asociada a los nuevos operadores de creación y destrucción. Llegamos finalmente a

$$H_0=\sum_{k\sigma}E_{\mathbf{k}}A^\dagger_\sigma(\mathbf{k})A_\sigma(\mathbf{k})+\langle H_0\rangle \tag{3.44}$$

con

$$\langle H_0\rangle=\sum_k\left[2\xi_{\mathbf{k}}|v_{\mathbf{k}}|^2-\Delta^*_k u^*_{\mathbf{k}}v_{\mathbf{k}}-\Delta_k u_{\mathbf{k}}v^*_{\mathbf{k}}+\Delta_{\mathbf{k}}\Gamma^*_{\mathbf{k}}\right] \tag{3.45}$$

3.4 La función de onda BCS del estado fundamental

Necesitamos ahora el estado BCS fundamental. Este lo conseguimos buscando un estado aniquilado por los operadores $A_\sigma(\mathbf{k})$:

$$A_1(\mathbf{k})=u_{\mathbf{k}}b_1(\mathbf{k})-v_{\mathbf{k}}b^\dagger_2(-\mathbf{k}) \tag{3.46}$$

$$A_2(\mathbf{k})=v_{\mathbf{k}}b^\dagger_1(\mathbf{k})-u_{\mathbf{k}}b_2(-\mathbf{k}). \tag{3.47}$$

Es fácil verificar que el estado requerido es

$$|0\rangle_{BCS}=\prod_k\left(u_{\mathbf{k}}+v_{\mathbf{k}}b^\dagger_1(\mathbf{k})b^\dagger_2(\text{-}\mathbf{k})\right)|0\rangle \tag{3.48}$$

Conocido el estado fundamental podemos evaluar $\Gamma_{\mathbf{k}}$. Tenemos

$$\Gamma(\mathbf{k})=\langle b_2(-\mathbf{k})b_1(\mathbf{k})=\left\langle\left(-v_{\mathbf{k}}A^\dagger_1(\mathbf{k})+u^*_{\mathbf{k}}A_2(\mathbf{k})\right)\left(u_kA_1(\mathbf{k})+v_{\mathbf{k}}A^\dagger_2(\mathbf{k})\right)\right\rangle \tag{3.49}$$

de donde

$$\Gamma(\mathbf{k}) = u_{\mathbf{k}}^* v_{\mathbf{k}}. \tag{3.50}$$

Con esto podemos reescribir

$$\langle H_0 \rangle = \sum_k \left[2\xi_{\mathbf{k}}|v_{\mathbf{k}}|^2 - \Delta_k^* u_{\mathbf{k}}^* v_{\mathbf{k}}\right] \tag{3.51}$$

y utilizando las ecuaciónes (3.41) y (3.42)

$$\langle H_0 \rangle = \sum_k \left[\xi_{\mathbf{k}} - \frac{\xi_{\mathbf{k}}^2}{E_{\mathbf{k}}} - \Delta_k^* u_{\mathbf{k}}^* v_{\mathbf{k}}\right] \tag{3.52}$$

3.5 La ecuación de gap a $T = 0$

Antes de continuar derivaremos la ecuación de gap. Partiendo del complejo conjugado de la ecuación (3.39) y usando las ecuaciones (3.41) y (3.42) tenemos

$$u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}^* = \frac{1}{2}\frac{\Delta_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}} \tag{3.53}$$

y

$$\Gamma_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2}\frac{\Delta_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}} \tag{3.54}$$

De la definición de $\Delta_{\mathbf{k}}$ obtenemos finalmente la ecuación del gap

$$\Delta_{\mathbf{k}} = -\frac{1}{2}\sum_q V_{\mathbf{kq}}\frac{\Delta_{\mathbf{q}}}{E_{\mathbf{q}}}. \tag{3.55}$$

Procedamos ahora a la evaluación de el valor de expectación de H_0. Nótese que podemos escribir[1]

$$\langle H_0 \rangle = \sum_k \left[\xi_{\mathbf{k}} - \frac{\xi_{\mathbf{k}}^2}{E_{\mathbf{k}}} + \sum_q \Delta_{\mathbf{k}} V_{\mathbf{kq}}^{-1} \Delta_{\mathbf{q}}^*\right]. \tag{3.56}$$

Eligiendo $V_{\mathbf{kq}}$ como en la discusión de los pares de Cooper encontramos

$$\langle H_0 \rangle = \sum_k \left(\xi_{\mathbf{k}} - \frac{\xi_k^2}{E_{\mathbf{k}}}\right) - \frac{\Delta^2}{G}. \tag{3.57}$$

puesto que la ecuación del gap tiene ahora soluciones para Δk independientes del momento. De forma más detallada podríamos escribir la suma como

$$\langle H_0 \rangle = \sum_{|k|>k_F} \left(\xi_{\mathbf{k}} - \frac{\xi_k^2}{E_{\mathbf{k}}}\right) + \sum_{|k|<k_F} \left(-\xi_{\mathbf{k}} - \frac{\xi_k^2}{E_{\mathbf{k}}}\right) - \frac{\Delta^2}{G}. \tag{3.58}$$

or

$$\langle H_0 \rangle = 2\sum_{|k|>k_F} \left(\xi_{\mathbf{k}} - \frac{\xi_k^2}{E_{\mathbf{k}}}\right) - \frac{\Delta^2}{G} \tag{3.59}$$

[1] El único requisito es que la matriz $V_{\mathbf{kq}}$ sea invertible

Convirtiendo ahora la suma en una integral

$$\langle H_0\rangle = 2\frac{p_F^2}{2\pi^2 v_F}\int_0^\delta d\xi\left(\xi - \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+\Delta^2}}\right) - \frac{\Delta^2}{G} = \rho\Big[\delta^2 - \delta\sqrt{\delta^2+\Delta^2} + \Delta^2\log\frac{\delta+\sqrt{\delta^2+\Delta^2}}{\Delta}\Big] - \frac{\Delta^2}{G}. \tag{3.60}$$

Consideremos ahora la ecuación del gap

$$\Delta = \frac{1}{2}\frac{p_F^2}{2\pi^2 v_F}2G\int_0^\delta d\xi\frac{\Delta}{\sqrt{\xi^2+\Delta^2}} = \frac{1}{2}\rho G\Delta\log\frac{\delta+\sqrt{\delta^2+\Delta^2}}{\Delta} \tag{3.61}$$

de donde

$$1 = \frac{1}{2}\rho G\log\frac{\delta+\sqrt{\delta^2+\Delta^2}}{\Delta}. \tag{3.62}$$

Usando esta ecuación en la ecuación (3.60) tenemos

$$\langle H_0\rangle = \frac{\rho}{2}\Big[\delta^2 - \delta\sqrt{\delta^2+\Delta^2} + \frac{2\Delta^2}{\rho G}\Big] - \frac{\Delta^2}{G} \tag{3.63}$$

El primer término de esta expresión viene de la energía cinética mientras que el segundo viene de la interacción. Simplificando tenemos:

$$\langle H_0\rangle = \frac{\rho}{2}\Big[\delta^2 - \delta\sqrt{\delta^2+\Delta^2}\Big]. \tag{3.64}$$

Tomando el límite débil,$\rho G \ll 1$ o $\Delta \ll \delta$, obtenemos de la ecuación del gap

$$\Delta = 2\delta e^{-2/G\rho} \tag{3.65}$$

y

$$\langle H_0\rangle = -\frac{1}{4}\rho\Delta^2. \tag{3.66}$$

3.6 La ecuación del gap para $T \neq 0$

Todo este cálculo puede repetirse facilmente para $T \neq 0$. De hecho el único punto donde interviene la temperatura es en la evaluación de Γ_k, que debe tomarse como una media térmica

$$\langle X\rangle_T = \frac{Tr[e^{-H/T}X]}{Tr[e^{-H/T}]}. \tag{3.67}$$

La media térmica de un oscilador de Fermi con hamiltoniano $H = Eb^\dagger b$ se obtiene facilmente ya que

$$Tr[e^{-Eb/T}] = 1 + e^{-E/T} \tag{3.68}$$

y

$$Tr[b^\dagger b e^{-Eb^\dagger b/T}] = e^{-E/T}. \tag{3.69}$$

Por tanto

$$\langle b^\dagger b\rangle_T = f(E) = \frac{1}{e^{E/T}+1}. \tag{3.70}$$

Se sigue de la ecuación (3.49) que

$$\Gamma_{\mathbf{k}}(T) = \langle b_2(-\mathbf{k})b_1(\mathbf{k})\rangle_T = u_{\mathbf{k}}^* v_{\mathbf{k}}\Big\langle\Big(1 - A_1^\dagger(\mathbf{k})A_1(\mathbf{k}) - A_2^\dagger(\mathbf{k})A_2(\ )\Big)\Big\rangle = u_{\mathbf{k}}^* v_{\mathbf{k}}(1 - 2f(E_{\mathbf{k}})) \tag{3.71}$$

La ecuación del gap viene dada entonces por

$$\Delta_{\mathbf{k}} = -\sum_q V_{\mathbf{kq}} u^*_{\mathbf{q}} v_{\mathbf{q}} (1 - 2f(E_{\mathbf{q}})) = -\sum_q V_{\mathbf{kq}} \frac{\Delta_{\mathbf{q}}}{2E_{\mathbf{q}}} \tanh \frac{E_{\mathbf{q}}}{2T} \tag{3.72}$$

y en la aproximación BCS

$$1 = \frac{1}{4}\rho G \int_{-\delta}^{\delta} \frac{d\xi_{\mathbf{p}}}{E_{\mathbf{p}}} \tanh \frac{E_{\mathbf{q}}}{2T}, \tag{3.73}$$

con $E_{\mathbf{p}} = \sqrt{\xi_{\mathbf{p}} + \Delta^2}$.

Esta ecuación proporciona una relación implicita para la dependencia de la temperatura con el parámetro del gap $\Delta(T)$; cuando $T \longrightarrow$ tenemos[2] $\tanh(\beta\sqrt{\xi_p + \Delta^2}/2) \longrightarrow 1$ y recuperamos la ecuación (3.65). Cuando T aumenta esta cantidad es siempre menor que 1 y la integral en el segundo miembro de la ecuación (3.73) mantendrá su valor constante solo si Δ decrece. Esa ecuación pone por tanto en evidencia que en el estado supercondcuctor ocurre un efecto cooperativo de decrecimiento del parámetro de energía del gap cuando aumenta la temperatura, llevando a la desaparición de la energía del gap y la transición al estado normal. De esta misma ecuación vemos que la energía del gap desaparece a una temperatura crítica T_c determinada implicitamente por

$$1 = G\rho \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{1}{\xi} \tanh \frac{\xi}{2k_B T_c} d\xi \tag{3.74}$$

Introduciendo la variable adimensional $x = \xi/k_B T_c$,

$$\int_0^{\hbar\omega_D/k_B T_c} \frac{1}{x} \tanh \frac{x}{2} dx = \frac{1}{G\rho}. \tag{3.75}$$

Para valores grandes de $\hbar\omega_D/k_B T_c$ la integral toma el valor $\ln(1.13\hbar\omega_D/k_B T_c)$. Luego en el límite de acoplo débil, $\rho G \ll 1$, tenemos

$$k_B T_c = 1.13\hbar\omega_D e^{-1/\rho G}. \tag{3.76}$$

Utilizando la ecuación (3.65) tenemos

$$\Delta(0) = 1.76 k_B T_c \tag{3.77}$$

El comportamiento de $\Delta(T)$ como función del tiempo se obtiene por integración numérica de la ecuación (3.73). En particular para $T \longrightarrow T_c$ (y $T < T_c$) la forma de $\Delta(T)$ viene dada por

$$\Delta(T) = 3.06 k_B T_c \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{1/2}, \tag{3.78}$$

donde el exponente 1/2 es característico de las teorías de campo medio.

3.7 Calor específico de un semiconductor

Estudiaremos ahora el calor específico de un superconductor y la discontinuidad del mismo en la transición de fase. Existe un salto brusco en el calor específico de un superconductor a la temperatura crítica. Para temperaturas mayores que la temperatura crítica el calor específico

[2]El factor $\beta = 1/k_B T$ se debe a que hemos vuelto al sistema de unidades estandar.

es lineal en la temperatura como corresponde a un material usual. Para temperaturas próximas a cero el calor específico decae exponencialmente a cero; el comportamiento exponencial a bajas temperaturas es de la forma esperada cuando existe un gap energía en el espectro de energías de las quasipartículas. Para calcular el calor específico electrónico de un superconductor partímos de la expresión general de la entropía para un sistema de quasipartículas. En este caso tenemos

$$S(T) = -2k_B \sum_k \Big[f_k \ln f_k + (1 - f_k) \ln(1 - f_k) \Big] \tag{3.79}$$

donde el factor 2 tiene en cuenta las dos posibles orientaciones del spin y $f_{\mathbf{k}}$ es la distribución de Fermi-Dirac

$$f_{\mathbf{k}} = \frac{1}{e^{\beta E_{\mathbf{k}}+1}} \tag{3.80}$$

con $E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\xi_{\mathbf{k}}^2 + \Delta^2(T)}$.

El calor específico viene dado por

$$C(T) = T\frac{dS(T)}{dT}. \tag{3.81}$$

Nótese que

$$\frac{dS(T)}{dT} = \sum_k \frac{\partial S}{\partial f_{\mathbf{k}}} \frac{\partial f_{\mathbf{k}}}{\partial T}. \tag{3.82}$$

Tenemos

$$\frac{\partial S}{\partial f_k} = -2k_B \ln \frac{f_k}{1 - f_k} = 2\frac{1}{T}\sqrt{\xi_k^2 + \Delta^2(T)} \tag{3.83}$$

y

$$\frac{\partial f_{\mathbf{k}}}{\partial T} = \frac{1}{k_B T^2} \frac{\exp(\beta E_{\mathbf{k}})}{[\exp(\beta E_{\mathbf{k}}) + 1]^2} \Big[\sqrt{\xi_{\mathbf{k}}^2 + \Delta^2(T)} - T\frac{d}{dT}\sqrt{\xi_{\mathbf{k}}^2 + \Delta^2(T)} \Big] \tag{3.84}$$

Con esto

$$C(T) = \frac{2}{k_B T^2} \sum_{\mathbf{k}} \frac{\exp(\beta E_{\mathbf{k}})}{[\exp(\beta E_{\mathbf{k}}) + 1]^2} \Big[\xi_{\mathbf{k}}^2 + \Delta^2(T) - \frac{T}{2}\frac{d}{dT}\Delta^2(T) \Big]. \tag{3.85}$$

Reemplazando la suma por la integral de la manera usual tenemos

$$C(T) = \frac{2D_0(E_F)}{k_B T^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(\beta E_{\mathbf{k}})}{[\exp(\beta E_{\mathbf{k}}) + 1]^2} \Big[\xi_{\mathbf{k}}^2 + \Delta^2(T) - \frac{T}{2}\frac{d}{dT}\Delta^2(T) \Big]. \tag{3.86}$$

donde $D_0(E_F)$ es la densidad de estados.

Para $T > T_c$ tenemos $\Delta(T) = 0$ y la ecuación anterior se convierte en

$$C(T) = \frac{4}{k_B T^2} D_0(E_F) \int_0^{\infty} \frac{e^{\beta\xi}}{(e^{\beta\xi} + 1)^2} \xi^2 d\xi = \frac{\pi^2}{3} D(E_F) k_B^2 T, \tag{3.87}$$

que es el resultado usual para un metal.

Para $T = T_c$ aparece una discontinuidad debido a $d\Delta^2(T)/dT$, el valor de estac discontinuidad es

$$\Delta C(T_c) = 9.36 k_B^2 T_c D_0(E_F) 2 \int_0^{\infty} \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} dx = 4.68 D(E_F) k_B^2 T_c. \tag{3.88}$$

A la temperatura crítica se produce un salto $C_s - C_n$ del estado superconductor al estado normal. Si dividimos esto por C_n tenemos

$$\frac{C_s - C_n}{C_n} = 1.42. \tag{3.89}$$

Finalmente para $T \ll T_c$

$$C(T) \approx e^{(\beta\Delta(0))} = e^{(-1.76T_c/T)}. \tag{3.90}$$

3.8 Impurezas y el teorema de Anderson: Un breve comentario

Una de las mejores formas de aprender como funciona el estado superconductor es ver que lo destruye y que no. En el año 1959 P.W.Anderson demostró que un débil desorden no afecta a la termodinámica de un conductor isotrópico (veáse la referencia [2]). El teorema de Anderson se basa en la idea de que el momento $\mathbf{k}$ ya no es un buen número cuántico del sistema desordenado. Si la descripción de quasipartícula de Landau del estado fundamental es válida, existirán autoestados análogos con funciones de onda $\psi(r)$ con energías ξ_n. La teoría BCS puede reformularse con las nuevas funciones de onda, y las nuevas energías resultan ser $E_n = \sqrt{\xi_n^2 + |\Delta|^2}$. No es dificil ver que la nueva ecuación del gap reformulada en presencia de desorden nos lleva a la misma temperatura crtíca, y las propiedadades termodinámicas no se ven afectadas. No obstante, el teorema de Anderson falla si el scattering es magnético y por tanto rompe la simetría de inversión temporal entre los dos estados de partícula singlete, si el scattering es inelástico, si la densidad de estados usual se ve fuertemente modificada debido al desorden, si el cambio en la fase es fuertemente dependiente de la energía o si el estado es altamente anisótropo. La demostración completa del teorema nos llevaría gran cantidad de tiempo pues tendríamos que intriducir las ecuaciones de Bogoliuvov-de Gennes. El lector interesado podrá encontrar una demostración de esto en el artículo original [2] o bien en las fantásticas notas de Kophin [12].

Chapter 4

El efecto Meissner

4.1 El papel de la ruptura de simetría

La superconductividad parece ser un fenómeno fundamental y por tanto nos gustaría entenderla desde un punto de vista más fundamental que haciendo un montón de aproximaciones microscópicas. Este es el caso si uno hace la observación de que la simetría electromagnética se rompe de manera espontanea. En lo que sigue utilizaré el tratamiento dado por Weinberg (1996). Hemos visto que en el estado fundamental de un superconductor se forma un condensado

$$\langle \epsilon_{\alpha\beta}\psi^{\alpha}\psi^{\beta}\rangle. \tag{4.1}$$

Este condensado rompe la simetría electromagnética puesto que el operador difermiónico tiene carga $-2e$. Esto es lo único que es necesario asumir. Pensando en términos de un parámetro de orden uno introduce un campo escalar Φ, transformándose como el condensado bajo una transformación gauge

$$A_\mu \longrightarrow A_\mu + \partial_\mu f \tag{4.2}$$

$$\psi \longrightarrow e^{ief}\psi \Longrightarrow \Phi \longrightarrow e^{2ief}\Phi \tag{4.3}$$

donde ψ es el campo del electrón. Introducimos ahora el campo de Golstone ϕ como la fase de Φ

$$\Phi = \rho e^{2ie\phi}. \tag{4.4}$$

ϕ transforma la fase del condensado como una transformación gauge

$$\phi \longrightarrow \phi + f. \tag{4.5}$$

En el caso de f constante la teoría solo depende de $\partial_\mu\phi$. Nótese también que se rompe la invarianza gauge pero un subgrupo Z_2 permanece sin romper, el correspondiente a $f = 0$ y $f = \pi/e$. En particular ϕ y $\phi + \pi/e$ deberían ser identificadas. Es conveniente introducir campos de Fermi invariantes gauge

$$\tilde{\psi} = e^{-ie\phi}\psi. \tag{4.6}$$

El sistema será descrito por un lagrangiano invariante gauge dependiente de $\tilde{\psi}$,A_μ y $\partial_\mu\phi$. Integrando los campos de Fermi nos queda un lagrangiano invariante gauge dependiente sólo de A_μ y $\partial_\mu\phi$. La invarianza gauge requiere que estos campos aparezcan sólo en la combinación

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{4.7}$$

$$A_\mu - \partial_\mu \phi \tag{4.8}$$

Por tanto el lagrangiano tendrá la forma

$$L = -\frac{1}{4}\int d^3\mathbf{x} F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} + L_s(A_\mu - \partial_\mu \phi). \tag{4.9}$$

Las ecuaciones del movimiento para el campo escalar

$$0 = \partial_\mu \frac{\delta L_s}{\delta \partial_\mu \phi} = -\partial_\mu \frac{\partial L_s}{\partial A_\mu} = -\partial_\mu J^\mu, \tag{4.10}$$

donde J_μ es la corriente definida como

$$J_\mu = \frac{\delta L_s}{\delta A^\mu}. \tag{4.11}$$

Esta ecuación de movimiento no es más que la ecuación de conservación de corriente. La única condición sobre L_s es que de lugar a un estado estable del sistema en ausencia de A_μ y ϕ. En particular basta decir que el punto $A_\mu = \partial_\mu \phi$ es un mínimo local de la teoría, luego la segunda derivada de L_s con respecto a su argumento no debería anularse en ese punto.

4.2 El efecto Meissner

El efecto Meissner se sigue facilmente de las consideraciones previas. De hecho, si entramos en el interior profundo del conductor estaremos en el mínimo $A_\mu = \partial_\mu \phi$, implicando que A_μ es una simple elección de gauge, puesto que

$$F_{\mu\nu}(\partial_\lambda \phi) = 0. \tag{4.12}$$

En particular el campo magnético dentro del conductor desaparece $\mathbf{B} = 0$. Podemos refinar este análisis haciendo algunas consideraciones sobre la energía. Cerca del mínimo tenemos

$$L_s(A_\mu - \partial_\mu \phi) \approx L_s(0) + \frac{1}{2}\frac{\delta^2 L_s}{\delta(A_\mu - \partial_\mu \phi)^2}(A_\mu - \partial\phi)^2. \tag{4.13}$$

Nótese que las dimensiones de la segunda derivada son $[E \times E^{-2}] = [E^{-1}] = [L]$. Por tanto, en el caso estático, salvo una constante

$$L_s \approx \frac{L^3}{\lambda^2}|\mathbf{A} - \nabla\phi|^2, \tag{4.14}$$

donde L^3 es el volumen del superconductor y λ alguna longitud típica del material. Si el campo magnético penetra dentro del material, esperamos que

$$|\mathbf{A} - \nabla\phi| \approx BL \tag{4.15}$$

de donde

$$L_s \approx \frac{B^2 L^5}{\lambda^2}. \tag{4.16}$$

Para que el estado superconductor se mantenga el campo magnético debe expulsarse con un coste de energía

$$B^2 L^3. \tag{4.17}$$

Por tanto convendrá expulsar el campo si

$$\frac{B^2L^5}{\lambda^2} \gg B^2L^3, \tag{4.18}$$

o

$$L \gg \lambda. \tag{4.19}$$

λ es la longitud de penetración, de hecho de su definición se sigue que es la región sobre la cual el campo magnético es distinto de cero. Repitiendo el mismo razonamiento hecho en la introducción uno puede ver la existencia de un campo magnético crítico. Nótese que un campo magnético menor que el crítico penetra dentro del conductor hasta una profundidad λ y en esa región fluira corriente eléctrica, ya que

$$\mathbf{J} \sim \nabla \times \mathbf{B}. \tag{4.20}$$

Consideremos ahora un superconductor grueso con la forma de un toro. A lo largo del eje C que recorre la circunferencia del toro la cantidad $|\mathbf{A} - \nabla\phi|$ se anula pero los dos campos no tienen que ser necesariamente cero. No obstante, recorriendo el camino C ϕ pasa a un valor equivalente $\phi + n\pi/e$, y por tanto

$$\int_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{n\pi}{e}, \tag{4.21}$$

donde A es el área que rodea C. Vémos que el flujo dentro del toro se encuentra cuantizado. Nótese también que la corriente eléctrica sosteniendo a $\mathbf{B}$ fluye en una anchura λ por debajo de la superficie del toro. Se sigue de lo anterior que la corriente no puede decaer suavemente sino que debe saltar de forma que la variación del flujo del campo magnético sea un múltiplo de π/e. Por tanto la resistencia eléctrica de un superconductor es bastante peculiar. Para entender mejor esta resistencia consideremos la siguiente ecuación

$$\frac{\delta L_s}{\delta \dot{\phi}} = -\frac{\delta L_s}{\delta A_0} = -J_0, \tag{4.22}$$

que muestra que $-J_0$ es la densidad de momento canónica conjugada de ϕ. Por tanto las ecuaciones hamiltonianas de movimiento nos dan

$$\dot{\phi}(x) = \frac{\delta H_s}{\delta(-J_0(x))} = -V(x), \tag{4.23}$$

donde $V(x)$ es la variación de energía por cambio en la densidad de corriente, es decir, el *voltaje* en x. Si en el superconductor hay una corriente estacionaria (es decir, independiente de los campos), las ecuaciones anteriores nos muestran que el voltaje es cero. Pero la existencia de una corriente con voltaje cero significa que la resistencia debe ser cero.

4.3 El efecto Josephson

Estamos ahora en posición de explicar el efecto Josephson. Este efecto aparece en la unión de dos semiconductores separados por una fina barrera aislante. A diferencia de voltaje nula entre los dos superconductores fluye una corriente contínua, dependiente de la diferencia de fase debida a los dos campos de Golstone distintos. Más es, si se mantiene una diferencia de voltaje constante entre los dos superconductores fluye una corriente alterna. Estos dos efectos se conocen como efectos Josephson *dc* y *ac*. Consideremos primero el caso de una diferencia de voltaje nula. Por invarianza gauge el lagrangiano de la unión depende sólo de la diferencia de fase

$$L_{union} = F(\Delta\phi). \tag{4.24}$$

La función F debe ser una función periódica puesto que los campos de Golstone en los dos superconductores son modos definidos π/e, es decir

$$F(\Delta\phi) = F(\Delta\phi + n\pi/e). \tag{4.25}$$

Para evaluar la corriente introduzcamos un potencial vector $\mathbf{A}$. Entonces

$$\Delta_A\phi = \int_l d\mathbf{x} \cdot (\Delta\phi - \mathbf{A}), \tag{4.26}$$

donde la línea l se toma a través de la unión. Tenemos por tanto

$$J^k = \frac{\delta L_{union}}{\delta A_k} = n^k F'(\Delta_A\phi), \tag{4.27}$$

donde n^k es el vector unitario normal a la superficie de la unión. Tomando $\mathbf{A} = 0$ tenemos

$$\mathbf{J} = \mathbf{n}F'(\Delta\phi), \tag{4.28}$$

lo que muestra el efecto Josephson.

Veámos ahora el segundo caso. Para ello consideremos una diferencia constante de voltaje. De

$$\dot{\phi} = -V, \tag{4.29}$$

tenemos

$$\Delta\phi(t) = |\Delta V|t + \Delta\phi(0). \tag{4.30}$$

Puesto que F tiene un periodo π/e se sigue que la corriente oscila con una frecuencia

$$\nu = \frac{e|\Delta V|}{\pi}. \tag{4.31}$$

Usando esta relación se puede conseguir una medida muy precisa de $e/\hbar$ (volviendo a unidades estandar $\nu = e|\Delta V|/\pi\hbar$).

La corriente el efecto Josephson *dc* puede ser del orden de varios miliamperios por superconductores convencionales. En el caso *ac* para voltajes del orden de milivoltios, la frecuencia puede alcanzar los cientos o miles de gigaherzios.

Cuando nos encontramos próximos a la transición de fase la descripción de la teoría en términos de bosones de Golstone no es suficiente. De hecho, existe un modo de longitud larga asociado al parámetro de orden. Esto se debe a que la simetría $U(1)$ se recupera y su descripción mínima esta en función de un campo complejo. Por tanto se introduce

$$\Phi = \rho e^{2ie\phi}. \tag{4.32}$$

Expandiendo L_s para pequeños valores de Φ tenemos

$$L_s \int d^3\mathbf{x}\Big[-\frac{1}{2}\Phi^*|\nabla - 2ie\mathbf{A}|^2\Phi - \frac{1}{2}\alpha|\Phi|^2 - \frac{1}{4}\beta|\Phi|^4\Big] \tag{4.33}$$

En esta sección hemos definido la longitud de penetración con la inversa de la raiz cuadrada del coeficiente de $-(\nabla\phi - \mathbf{A})^2/2$. Por tanto

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{4e^2\langle\rho^2\rangle}}. \tag{4.34}$$

Usando

$$\langle\rho^2\rangle = -\frac{\alpha}{\beta}, \tag{4.35}$$

llegamos a

$$\lambda = \frac{1}{2e}\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}, \tag{4.36}$$

que está de acuerdo con el resultado obtenido en el primer capítulo[1]. Podemos obtener otra longitud estudiando el comportamiento de las fluctuaciones del campo ρ. Definiendo

$$\rho = \langle\rho\rangle + \rho', \tag{4.37}$$

tenemos

$$\nabla^2\rho' = -2\alpha\rho'. \tag{4.38}$$

Esto permite introducir la longitud de coherencia como

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{-2\alpha}}, \tag{4.39}$$

de acuerdo con las expresiones que vimos en el primer capítulo. Usando las definiciones de ξ y λ tenemos

$$\alpha = -\frac{1}{2\xi^2} \tag{4.40}$$

$$\beta = 2\frac{e^2\lambda^2}{\xi^2}. \tag{4.41}$$

Por tanto la densidad de energía del estado superconductor es menor que la energía del estado normal en

$$\frac{1}{4}\frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{1}{32}\frac{1}{e^2\xi^2\lambda^2}. \tag{4.42}$$

El tamaño relativo de ξ y λ es muy importante, puesto que se pueden formar vórtices en el interior del semiconductor y su estabilidad depende de este punto. Los superconductores se clasifican de acuerdo al siguiente criterio:

- Tipo I: $\xi > \lambda$. Los vórtices no son estables puesto que la penetración del campo magnético es muy pequeña.
- Tipo II: $\xi < \lambda$. Los vórtices son estables y el campo magnético penetra dentro del conductor exactamente dentro de los vórtices. Esto puede ocurrir puesto que el núcleo del vórtice es mucho más pequeño que la región en la que el campo magnético se anula. En estos casos existen dos campos magnéticos críticos, H_{c1}, donde para $H < H_{c1}$ el estado es superconductor, mientras que en caso contrario, se forman vortíces. Aumentando el campo magnético, se formas más y más líneas de vórtices, hasta un valor H_{c2}, en el cual el campo magnético penetra completamente en el superconductor y se produce la transición al estado normal.

[1] Salvo constantes, ya que α y β no están normalizadas del mismo modo en ambos casos.

Bibliography

[1] G.Grosso y G.P.Parravicini *Solid State Physics* Cambridge University Press, Cambridge, 2003

[2] P.W.Anderson, J.Phys.Chem.Solids 11, 26 ('59)

[3] J.Bardeen, L.N.Cooper y J.R.Schrieffer *Theory of Superconductivity* Phys.Rev.**108**,1175 (1957)

[4] A.Barone y G.Paterno *Physics and Applications of the Josephson Effect* Wiley,Nueva York 1982

[5] R.D.Parks *Superconductivity* Vol.1 (Dekker,Nueva York,1969)

[6] J.R.Schrieffer *Theory of Superconductivity* (Benjamin, Nueva York, 1983)

[7] M.Tinkham *Introduction to superconductivity* McGraw-Hill, Nueva York, 1996

[8] Christopher Mudry *Lecture notes: Superconductivity* http://people.web.psi.ch/mudry

[9] L.N.Cooper, Bound Electron Pairs in a Degenerate Fermi Gas*, Phys.Rev* ***104****,*1189 (1956)

[10] T.van Duzer y C.W.Turner, *Principles of Superconductivity Devices and Circuits*, Elsevier,NY (1981)

[11] P.J.Hirschfeld *Lecture notes: BCS Theory* PHZ428 Topics in Theoretical Physics 1996

[12] N.B.Kophin Lecture notes *Theory of Superconductivity*, 2004