**1) Dos trenes separados por una distancia $d$ parten simultáneamente en direcciones paralelas (persiguiendo el uno al otro), con velocidades $0.8c$ y $0.6c$, visto todo ello en el sistema "en reposo". El maquinista del primer tren cronometra 2 minutos desde la salida hasta alcanzar al segundo tren. ¿Cuánto vale $d$? ¿Cuánto cronometra el segundo maquinista?**

Solución. En el sistema en reposo, el primer tren alcanza al segundo despues un tiempo $\Delta t$, donde $0.8c\Delta t = 0.6c\Delta t + d$, luego $\Delta t = \frac{d}{0.2c}$ . El tiempo propio medido por el primer maquinista es $\Delta\tau_1 = \dfrac{\Delta t}{\gamma_1} = \sqrt{1-0.8^2}\dfrac{d}{0.2c} = 2$ min, luego $d = 40$ s-luz=$1.2\cdot 10^7$ km. El tiempo propio medido por el segundo maquinista es $\Delta\tau_2 = \dfrac{\Delta t}{\gamma_2} = \dfrac{\gamma_1}{\gamma_2}\Delta\tau_1 = 2.67$ min.

**2) Calcular la probabilidad de que una partícula en el estado fundamental de un oscilador armónico se encuentre fuera de la zona clásicamente permitida. La función de ondas normalizada del estado fundamental del osciladir armónico es**

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}$$

**y además la función**

$$\mathrm{erf}(x) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt.$$

**admite el desarrollo en serie de potencias**

$$\mathrm{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{n!(2n+1)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{10} - \frac{z^7}{42} + \frac{z^9}{216} - \ \cdots\right)$$

**Solución** La zona clásica es

$$E_0 \equiv \frac{1}{2}\hbar\omega \geq \frac{m}{2}\omega^2 x^2$$

o lo que es lo mismo,

$$|x| \leq \frac{\hbar}{m\omega}$$

y la probabilidad pedida es

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_1^{\infty} e^{-t^2} \sim .16$$

**3) Considere una partícula sin spin, y con función de ondas $\psi \sim (x^2 + y^2 + z^2 + xz)\, e^{-r^2}$. Se pregunta: i. Qué se obtendrá (valor esperado) al medir $\vec{L}^2$? ii. Y al medir $L_z$? iii. La probabilidad de nedir $L_z = -1$. iv. Calcular la suma de las probabilidades de medir** $L_z = 1, L_z = 0, L_z = -1$

Solución.

$$\psi \sim \left( R^2\sqrt{4\pi} Y_{00} + \frac{r^2}{2}\sqrt{\frac{8\pi}{15}}\,(Y_{2-1} - Y_{21}) \right) e^{-r^2}$$

Claramente

$$\langle L^2 \rangle \sim 6\hbar^2$$

$$\langle L_z \rangle \sim 0$$

La probabilidad pedida es proporcional a

$$P_0 = |\langle Y_{00}|\psi\rangle|^2 = 4\pi$$

$$P_1 = |\langle Y_{21}|\psi\rangle|^2 = \frac{1}{4}\frac{8\pi}{15}$$

$$P_{-1} = |\langle Y_{2-1}|\psi\rangle|^2 = \frac{1}{4}\frac{8\pi}{15}$$

El exigir que esa suma sea igual a uno es la manera más fácil de normalizar la función de ondas.

$$N = \sqrt{\frac{5}{22\pi}}$$