Fundamentos de Física III

Hoja de problemas 6

1) Las autofunciones de los operadores momento angular total L^2 y componente z del momento angular L_z son los armónicos esféricos $Y_{lm}(\theta, \phi)$. La fórmula exacta para ellos es complicada, algo así como:

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = P_l^m(\cos\theta)e^{im\phi}$$

donde $P_l^m(x)$ son los llamados polinomios asociados de Legendre[1]. Sabiendo que estos son reales y cumplen la relación de ortonormalidad $\int_{-1}^{1} P_l^m(x)P_{l'}^m(x)\,dx = \delta_{ll'}$, demuestra que los armónicos esféricos son ortonormales:

$$\int_{S^2} Y_{lm}^* Y_{l'm'} = \delta_{ll'}\delta_{mm'}$$

S^2 es la esfera. Es conveniente saber el resultado de $\int_0^{2\pi} e^{im\phi}d\phi$.

Primeros armónicos

$$Y_{00}(\theta, \varphi) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\pi}}$$

$$Y_{1,\pm1}(\theta, \varphi) = \mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\sin\theta\, e^{\pm i\varphi}\ ,\ Y_{1,0}(\theta, \varphi) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\cos\theta$$

2) Estrictamente hablando, una función de onda tridimensional tiene que depender también de r, pero en el problema siguiente os pido que calculeis con funciones de onda que sólo dependen de los ángulos... Pero según el problema 11 de la hoja 5 y la forma de los operadores L_i y L^2, puedes demostrar facilmente que si sustituyes en el problema siguiente "para Y_{lm}" por "para $u(r)Y_{lm}$", el resultado no se verá alterado.

3) Calcula el valor esperado de L_z y L_i, donde $i = x$ ó y a tu elección, para Y_{00}, $Y_{1,0}$ e $Y_{1,1}$.

4) La elección de L_z a la hora de diagonalizar es arbitraria (aunque es cómoda, porque las autofunciones se escriben en coordenadas polares fácilmente). Si escogemos L^2 y L_x para buscar los autovalores simultáneos, el espectro es exáctamente

[1]En realidad, los polinomios asociados de Legendre son proporcionales a los que estamos usando.

el mismo: $\hbar^2 l(l+1)$ con $l \in \mathbb{N}$ para L^2 y $|m_x| \in \{0, \dots l\}$ para L_x, pero las autofunciones serán otras (e igualmente para L^2 y L_y). ¿Cuál es la autofunción simúltanea de L^2 y L_x con autovalores $l = 0$ y $m_x = 0$? ¿Y para L^2 y L_y?

5)Encuentra todas las combinaciones lineales de los $Y_{1,m}$ que sean autofunciones de L_x (en otras palabras: diagonaliza el operador L_x^2 en el subespacio $l = 1$).